Олимпиадные задания по математике.

Вариант 1.

Задание 1. Велосипедисты в первый день велопохода проехали 80 км. В каждый следующий день они проезжали на 5 км меньше, чем в предыдущий день. Сколько дней длился велопоход, если велосипедисты за все дни велопохода проехали 605 км?

Решение:

80 – в 1-ый день
$80 - 5$ во 2-ой день
....
$80 - (n-1) * 5$ в n-ый день
Убывающая арифметическая прогрессия
$S_n = 605$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$$

$$\frac{80 + 80 - (n-1) * 5}{2} * n = 605$$

$$(160 - (n-1) * 5) * n = 1210$$

$$(33 - n) * n = 242$$

$$n^2 - 33n + 242 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 242 * 4}}{2} = \frac{33 \pm 11}{2}$$

$n_1 = 22$ $\quad$ $n_2 = 11$

$80 - (22-1) * 5 < 0$ — Не подходит

$80 - (11-1) * 5 > 0$ — Подходит

Ответ: 11 дней

Задание 2. Школе выделили 200000 рублей на покупку компьютеров. На сколько компьютеров больше можно купить, если до снижения цены на 5%, один компьютер

стоил 19000 рублей?

Решение:

$19000 * 0{,}95 = 18050$ стоит 1 компьютер сейчас

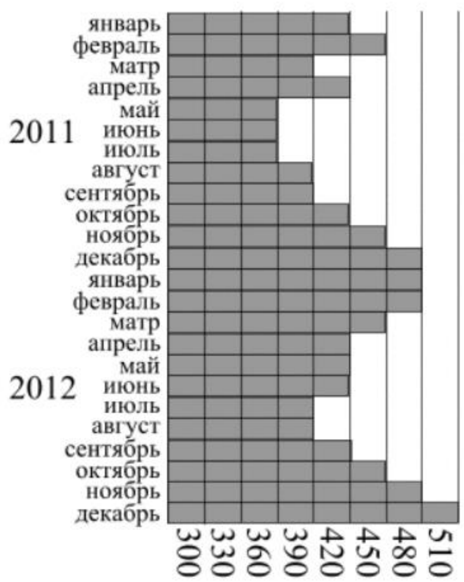
$\frac{200000}{18050} = 11{,}080 \ldots$ => сейчас можно купить 11 компьютеров

$\frac{200000}{19000} = 10{,}526 \ldots$ => раньше можно было купить 10 компьютеров

$11 - 10 = 1$

Ответ: .1

Задание 3. На диаграмме показана средняя цена на топливо в течении 2011-2012 годов. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – цена в условных единицах. Определите по диаграмме среднюю цену на топливо в зимние месяцы 2012 года.



Решение:

Зимние месяцы 2012 года это

Декабрь	510
Январь	480
Февраль	480

(Январь и февраль в начале года, декабрь в конце)

$$\frac{510 + 480 + 480}{3} = 490$$

Ответ: 490

Задание 4. Для транспортировки 38 тонн вспомогательного оборудования на 700 км энергетической компании необходимо воспользоваться услугами одной из трех фирм перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность машин для каждого из перевозчиков указанна в таблице. Определите минимальную сумму (в тыс. руб.) которую необходимо будет заплатить предприятию перевозчику за самую дешевую перевозку за один рейс.

Фирма перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобиля (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	8500	12

Решение:

А) $\frac{38}{3{,}5} = 10, \dots \quad => 11 \text{ машин} \qquad 11 * 3200 * 7 = 246400$

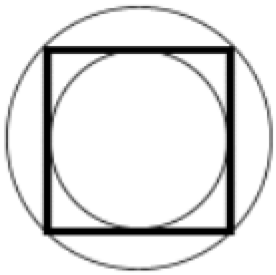
Б) $\frac{38}{5} = 7, \dots \quad => 8 \text{ машин} \qquad 8 * 4100 * 7 = 229600$

В) $\frac{38}{12} = 3, \ldots \quad => 4 \text{ машины} \qquad 4 * 8500 * 7 = 238000$

Наименьшая сумма 229600

Ответ: 229,6 тыс. руб.

Задание 5. Найдите площадь кольца между вписанной и описанной вокруг квадрата окружностями, если его сторона $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$



Решение:

Радиус вписанной окружности

$r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

Радиус описанной окружности

$R = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$ (по теореме Пифагора)

$S_{\text{м}} = \pi r^2 = \frac{1}{4}$

$S_{\text{б}} = \pi R^2 = \frac{1}{2}$

$S_{\text{б}} - S_{\text{м}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Ответ: 0,25

Задание 6. В школе 120 учащихся шестых классов, из них 90 учащихся изучают английский язык, а остальные французский язык. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик шестого класса изучает французский язык?

Решение:

$120 - 90 = 30$ человек изучают французский

$P = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Ответ: 0,25

Задание 7. Найдите корень уравнения $\log_2(5+x) = 3$

Решение:

$\log_2(5 + x) = 3$

$5 + x = 2^3$

$5 + x = 8$

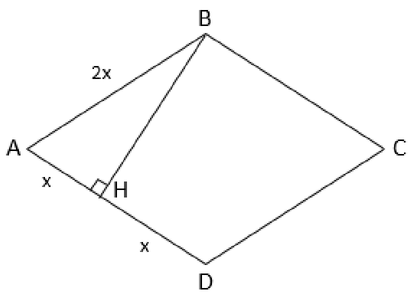
$x = 8 - 5$

$x = 3$

Ответ: x=3

Задание 8. Найдите острый угол ромба, если его высота делит сторону пополам.

Решение:



ABH – прямоугольный треугольник

$AH = \frac{AB}{2}$ => угол $ABH = 30°$ => угол $BAH = 60°$

Ответ: $\mathbf{60°}$

Задание 9. Одна из первообразных функции $f(x) = 3x^2 + 2x$ равна $F(x) = x^3 + x^2 + 12$. Найти площадь криволинейной трапеции образованной самой функцией $f(x)$ осью Ox и прямыми x = 1, x =2.

Решение:

$$S = \int_1^2 f(x)dx = F(x)|_1^2$$

Можно брать любую первообразную
Для удобства возьмем $x^3 + x^2$ (без константы)

$$S = (x^3 + x^2)|_1^2 = (8 + 4) - (1 + 1) = 10$$

Ответ: 10

Задание 10. Во сколько раз необходимо увеличить высоту конуса, чтобы его объем остался постоянным, при условии, что диаметр основания был уменьшен в два раза.

Решение:

$V_к = \frac{1}{3}S_{осн} * h = \frac{1}{3}\pi R^2 * h$

$R_н = \frac{1}{2}R_{старый}$ => если радиус уменьшить в 2 раза =>
Объем уменьшится в 4 раза (2^2) чтобы этого не произошло, необходимо увеличить высоту конуса в 4 раза

Ответ: 4

Задание 11. Вычислите $\dfrac{\sqrt[4]{4^3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}}$

Решение:

$$\frac{\sqrt[4]{4^3} + \sqrt{4} * \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{4}\left(\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}\right)}{\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: 2

Задание 12. Для оптимальной работы солнечного коллектора с центральной башней необходимо чтобы расстояние от приемника солнечного излучения до основного коллектора удовлетворяло условию:

$$\frac{1}{10 \cdot k} - \frac{1}{b} = \frac{1}{s}$$

где k – фокусное расстояние параболического концентратора k=3; b – расстояние от концентратора до основного коллектора (меняется в пределах 30 – 50 м); s – расстояние от основного коллектора до распределяющего устройства (меняется в пределах 70-80 м). На каком наименьшем расстоянии от основного коллектора можно расположить распределяющее устройство при выполнении условия оптимальной работы коллектора.

Решение:

$$\frac{1}{30} - \frac{1}{b} = \frac{1}{S}$$
$$b \in [30; 50]$$
$$S \in [70; 80] \qquad S \to min$$

Если S = 70 => $\frac{1}{30} - \frac{1}{70} = \frac{4}{210} = \frac{1}{52,5}$

b не попадает в отрезок, чем больше b, тем меньше S => возьмем b максимальным

$$\frac{1}{30} - \frac{1}{50} = \frac{2}{150} = \frac{1}{75} => S = 75$$

Ответ: 75

Задание 13. Какое количество мазута необходимо добавить в цилиндрический резервуар возведенный вместо аналогичного, если площадь боковой поверхности нового в два раза больше, а высота не изменилась. Известно, что исходный резервуар содержал 5000 м3 мазута.

Решение:

$S_{бок} = 2\pi Rh$

Если площадь увеличилась в 2 раза => радиус увеличился в 2 раза, т.к. h не изменилась

$V = S * h = \pi R^2 h$

т.к. V зависит от квадрата радиуса основания => V увеличится в 4 раза, т.к. радиус увеличился вдвое

$V_{был} = 5000$ $V_{стал} = 4*5000 = 20000$

=> изменился на 20000 – 5000 = 15000

=> необходимо добавить 15000 м^3

Ответ: 15000

Задание 14. В соревнования по бегу на дистанции 120 м участвуют три спортсмена. Скорость первого из них больше скорости второго на 1м/с, а скорость второго равна полусумме скоростей первого и третьего. Определите скорость третьего спортсмена, если известно, что первый пробежал дистанцию на 3 с быстрее третьего. (ответ укажите в м/с)

Решение:

X – скорость второго

X+1 – скорость первого

У – скорость третьего

$\frac{x+1+y}{2} = x$ => $x + 1 + y = 2x$ => $y = x - 1$

$\frac{120}{x+1}$ - Время за которое пробежал первый

$\frac{120}{x-1}$ - Время за которое пробежал третий

$$120(x-1) + 3(x+1)(x-1) = 120(x+1)$$
$$40(x-1) + (x+1)(x-1) = 40(x+1)$$
$$40x - 40 + x^2 - 1 - 40x - 40 = 0$$
$$x^2 - 81 = 0$$
$$x = \pm 9$$

Скорость не может быть отрицательна => х = 9
Скорость третьего 9 – 1 = 8 м/с

Ответ: 8

Задание 15. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{16}{x^2}$$

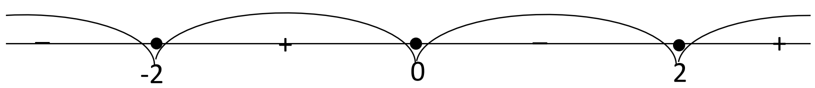
на промежутке Х>0

Решение:

$$y^{|} = 2x - \frac{32}{x^3} = \frac{2x^4 - 32}{x^3}$$

$$y^{|} = 0 => x^4 = 16 \qquad x = \pm 2$$

В точке х = 0 $y^{|}$ не существует



На промежутке $x > 0$ в точке 2 производная меняет знак с «-» на «+»

$$=> \text{в точке 2 минимум}$$

$$y(2) = 2^2 + \frac{16}{2^2} = 4 + 4 = 8$$

Ответ: 8