

**Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады
студентов по теоретической механике**

**Казань, Казанский государственный
энергетический университет
19 – 23 ноября 2018 г.**

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:

доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштары Айрат Ильдарович

Рецензент:

доцент кафедры АГД К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович

Согласовано:

председатель жюри олимпиады, профессор кафедры ТМ
НГАСУ (Сибстрин) Юдин Владимир Алексеевич

Решение задачи С1.

Обозначим через \bar{G} вес твердого тела, образованного стержнем AB и материальной точкой на его конце B (рис. 1). Из условия задачи: $G = 8P$. Обозначим центр тяжести этого твердого тела через C , а длину стержня через l . Будем отсчитывать ось x от точки B вдоль луча BA . По формуле для центра тяжести:

$$BC = x_C = \frac{P(l/2) + 7P \cdot 0}{8P} = \frac{l}{16}. \quad (1)$$

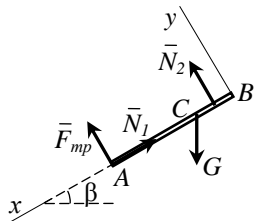


Рис. 1

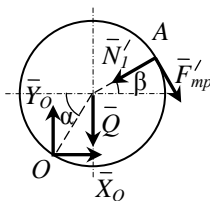


Рис. 2

Запишем пока одно из уравнений равновесия тела AB :

$$\sum_k F_{kx} = G \sin \beta - N_1 = 0.$$

$$N_1 = \frac{G}{2}. \quad (2)$$

Сила трения \bar{F}_{mp} , действующая со стороны диска на AB , может быть направлена параллельно оси y в одном из двух возможных направлений. Формально выбираем одно из них, как указано на рисунках. При этом в уравнениях равновесия будем использовать обозначение $F_{mp,y}$ с учетом знака проекции. По 3-му закону Ньютона:

$\bar{F}'_{mp} = -\bar{F}_{mp}$, $F'_{mp} = F_{mp}$. С учетом этого при равновесии диска (рис. 2):

$$\sum_k M_O(\bar{F}_k) = -QR \cos \alpha + N_1 R \sin(\alpha - \beta) - F_{mp,y}(R + R \cos(\alpha - \beta)) = 0. \quad (3)$$

С учетом (2):

$$-Q \cdot \frac{1}{2} + \frac{G}{2} \cdot \frac{1}{2} - F_{mp,y} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

$$F_{mp,y} = \frac{G - 2Q}{4 + 2\sqrt{3}}. \quad (4)$$

При равновесии выполняется: $-fN_1 \leq F_{mp,y} \leq fN_1$. Тогда из (4) с учетом (2):

$$-\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{G}{2} \leq \frac{G - 2Q}{4 + 2\sqrt{3}} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{G}{2}.$$

$$-G \leq 2G - 4Q \leq G. \quad (5)$$

Из левого неравенства в (5):

$$Q \leq \frac{3}{4}G. \quad (6)$$

Из правого неравенства в (5):

$$Q \geq \frac{G}{4}. \quad (7)$$

Очевидно, что твердое тело AB не может опрокинуться против часовой стрелки вокруг крайней левой точки наклонной поверхности в случае $F_{mp,y} < 0$, так как плечо \bar{F}_{mp} относительно этой точки по условию пренебрежимо мало по сравнению с плечом силы \bar{G} . Для того, чтобы AB не опрокинулся по часовой стрелке относительно точки B в случае $F_{mp,y} > 0$, должно быть:

$$\sum_k M_B(\bar{F}_k) = G \cos \beta \cdot \frac{l}{16} - F_{mp,y} \cdot l - N_2 \cdot h = 0. \quad (8)$$

Здесь h – расстояние до точки B от точки приложения равнодействующей нормальной реакции \bar{N}_2 со стороны наклонной поверхности. Условие неопрокидывания: $h \geq 0$, т.е. точка приложения \bar{N}_2 должна находиться на отрезке AB . Тогда из (8):

$$G \cos \beta \cdot \frac{l}{16} - F_{mp,y} \cdot l \geq 0.$$

$$\frac{G\sqrt{3}}{32} - F_{mp,y} \geq 0. \quad (9)$$

Из (9) с учетом (4):

$$\frac{G\sqrt{3}}{32} \geq \frac{G - 2Q}{4 + 2\sqrt{3}}.$$

$$Q \geq \frac{13 - 2\sqrt{3}}{32} G. \quad (10)$$

Коэффициент $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{32} \approx 0,298$. Так как $\frac{1}{4} < \frac{13 - 2\sqrt{3}}{32} < \frac{3}{4}$, из (6), (7), (10) получаем искомое условие:

$$\frac{13 - 2\sqrt{3}}{32} G \leq Q \leq \frac{3}{4} G.$$

$$\frac{13 - 2\sqrt{3}}{4} P \leq Q \leq 6P.$$

Замечание. Еще одно уравнение равновесие AB :

$$\sum_k F_{ky} = F_{mp,y} + N_2 - G \cos \beta = 0.$$

Так как $N_2 \geq 0$: $G \cos \beta - F_{m.p.y} \geq 0$. Это выполняется в силу (9). Из этого следует невозможность полного отрыва тела AB от наклонной плоскости. Но это и так достаточно очевидно из общих соображений.

Ответ. $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{4} P \leq Q \leq 6P$.

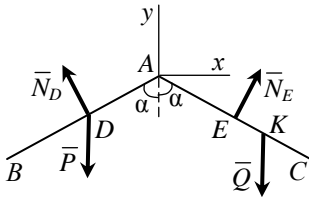


Рис. 3

Решение задачи С2.

1). Обозначим $AB = AC = l$, α – угол между стержнями и вертикалью y (рис. 3). Пусть вес \bar{Q} приложен к некоторой точке K стержня AC . Обозначим $AK = a$, $0 \leq a \leq l$. Силы реакции выступов \bar{N}_D и \bar{N}_E перпендикулярны стержням. Достаточно записать два уравнения равновесия твердого тела BAC :

$$\sum_k F_{kx} = -N_D \sin \alpha + N_E \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = -N_D \cdot \frac{l}{2} + N_E \cdot \frac{l}{2} + P \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} - Q \sin \alpha \cdot a = 0, \quad (2)$$

Из (1) получим:

$$N_D = N_E. \quad (3)$$

Из (2) с учетом (1):

$$a = \frac{Pl}{2Q}. \quad (4)$$

Так как величина a может изменяться в пределах $0 \leq a \leq l$, то из (4) получаем условие:

$$Q \geq \frac{P}{2}.$$

2). Вначале рассмотрим равновесие невесомого стержня AC (рис. 4). Введем оси x и y перпендикулярно и параллельно AC , соответственно. Укажем силы реакции шарнира \bar{X}_A, \bar{Y}_A . Однако, из уравнения равновесия

$$\sum_k F_{ky} = Y_A = 0$$

сразу следует

$$Y_A = 0. \quad (5)$$

Таким образом, AC находится под действием системы параллельных сил. Кроме того,

$$\sum_k M_E(\bar{F}_k) = X_A \cdot \frac{l}{2} - N_C \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

$$X_A = N_C. \quad (6)$$

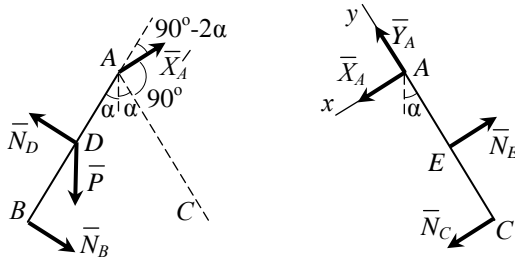


Рис. 4

Далее рассмотрим равновесие стержня AB . С учетом (5) к его точке A приложена сила реакции $\bar{X}'_A = -\bar{X}_A$.

$$\sum_k M_D(\bar{F}_k) = N_B \cdot \frac{l}{2} - X'_A \sin(90^\circ - 2\alpha) \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

$$N_B = X_A \cos 2\alpha. \quad (7)$$

Заметим, что (7) получается независимо от того, будет ли $90^\circ - 2\alpha > 0$ как на рис. 4, либо $90^\circ - 2\alpha \leq 0$.

Из (6) и (7) получаем:

$$N_B = N_C \cos 2\alpha. \quad (8)$$

Отметим, что $N_C = 0$ не может реализоваться. Иначе из (8): $N_B = 0$ и из (6): $X_A = 0$. При этом стержень AB находится под дей-

ствием системы двух непараллельных сил $\{\bar{P}, \bar{N}_D\}$. Это противоречит равновесию AB .

Таким образом, должно выполняться:

$$N_C > 0, \quad (9)$$

$$N_B \geq 0, N_D \geq 0, N_E \geq 0. \quad (10)$$

Рассмотрим три случая в зависимости от знака $\cos 2\alpha$.

1. Если $\cos 2\alpha < 0$, то в силу (9) из (8) следовало бы $N_B < 0$, что противоречит (10). Значит, этот случай не может реализоваться.

2. Если $\cos 2\alpha = 0$, то из (8): $N_B = 0$. При этом $2\alpha = \pi/2$, $\bar{X}'_A \uparrow \uparrow \bar{BA}$ и AB находится под действием системы сходящихся сил $\{\bar{P}, \bar{N}_D, \bar{X}_A\}$. Из двух уравнений равновесия для проекций выражаются через P значения $N_D > 0$ и $X_A > 0$. Из (6) получаем $N_C = X_A > 0$. Далее, из $\sum_k F_{kx} = 0$ для AC получаем $N_E = 2X_A > 0$. Итак, условия (9), (10) и все уравнения равновесия выполняются непротиворечиво.

3. Если $\cos 2\alpha > 0$, то с учетом (9) из (8): $N_B > 0$. При этом $0 < 2\alpha < \pi/2$, AB находится под действием плоской системы сил $\{\bar{P}, \bar{N}_B, \bar{N}_D, \bar{X}_A\}$. В уравнении

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = M_A(\bar{N}_B) + M_A(\bar{P}) + M_A(\bar{N}_D) = 0 \quad (11)$$

первые два момента положительны, значит $M_A(\bar{N}_D) < 0$ и поэтому $N_D > 0$. Несложно заметить, что система трех уравнений равновесия тела AB с тремя неизвестными реакциями решается однозначно. Из (7) получаем значение $X_A > 0$. (Подробнее, из уравнения проекций на прямую AB : $X_A = P/(2\sin\alpha)$). Из (7): $N_B = P\cos 2\alpha/(2\sin\alpha)$. Из (11): $N_D = P\cos^2\alpha/\sin\alpha$.)

Далее, рассуждая, как в случае 2, получаем значения $N_C > 0$, $N_E > 0$. Итак, условия (9), (10) и все уравнения равновесия выполняются непротиворечивым образом.

Таким образом, система находится в равновесии в случаях 2 и 3, то есть при $0 < 2\alpha \leq \pi/2$, откуда следует первый ответ:

$$0 < \alpha \leq \pi/4.$$

При этом из (8) получаем второй ответ:

$$N_B / N_C = \cos 2\alpha.$$

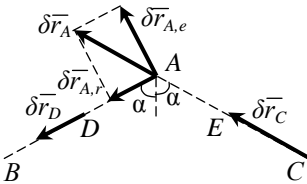


Рис. 5

Замечание 1. В качестве дополнения укажем, каким образом произойдет выход из равновесия в случае 1 (рис. 5). Под воздействием веса \bar{P} произойдет малое перемещение $d\bar{r}_D \uparrow\uparrow \overline{AB}$. Тогда $d\bar{r}_A = d\bar{r}_C$, $d\bar{r}_A \uparrow\uparrow \overline{CA}$, что возможно именно в силу $2\alpha > \pi/2$. Для обоснования этого удобно рассмотреть малое перемещение точки A как сложное: $d\bar{r}_A = d\bar{r}_{A,e} + d\bar{r}_{A,r}$, где переносная составляющая, связанная с поворотом A вокруг D : $d\bar{r}_{A,e} \perp \overline{AB}$, а относительная составляющая, связанная с поступательным перемещением AB : $d\bar{r}_{A,r} = d\bar{r}_D$.

Замечание 2. Требование, чтобы все нормальные реакции были строго положительны, было бы излишним. Это иллюстрирует случай 2, когда при равновесии реализуется $N_B = 0$.

Замечание 3. Одной лишь неотрицательности нормальных реакций недостаточно для утверждения о равновесии системы. Необходимо убедиться в непротиворечивости системы уравнений равновесия.

Например, рассмотрим известную задачу о лестнице, в состоянии покоя опирающейся концами на гладкие пол и стену. Отрыва концов лестницы от опор при этом не будет, то есть обе нормальные реакции положительны. Но лестница из-за отсутствия трения не будет находиться в равновесии. Строго обосновать это позволяет попытка решить систему уравнений равновесия, приводящая к противоречию из-за того, что в трех уравнениях содержатся две неизвестные реакции.

Другой пример может быть получен, если в нашей задаче отбросить стержень AC , а для стержня AB одну из опор расположить не в

середине D , а несколько ближе к концу B . Тогда стержень AB начнет соскальзывать вдоль своей линии. При этом обе нормальные реакции опор будут положительными. Однако не соблюдается условие равенства нулю проекций сил на ось, параллельную AB .

Ответ. 1). $Q \geq \frac{P}{2}$. 2). $0 < \alpha \leq \pi/4$. $\frac{N_B}{N_C} = \cos 2\alpha$.

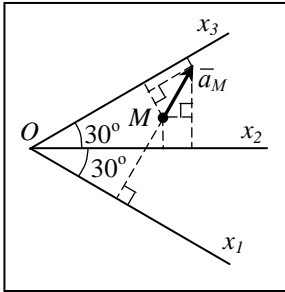


Рис. 6

Решение задачи К1.

Из условия получаем:

$$a_{x_1} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(t) = 0.$$

Значит, вектор \bar{a}_M ускорения точки M перпендикулярен оси x_1 (рис. 5). Тогда углы между \bar{a}_M и осями x_3 и x_2 равны 30° и 60° , соответственно.

$$a_{x_3} = \frac{d^2 x_3}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(t^3) = 6t. \quad (1)$$

С другой стороны:

$$a_{x_3} = a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), находим:

$$a = \frac{12t}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Тогда с учетом (3) получаем:

$$a_{x_2} = a \cos 60^\circ = \frac{12t}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} t.$$

Ответ. $a_{x_2}(t) = 2\sqrt{3} t$.

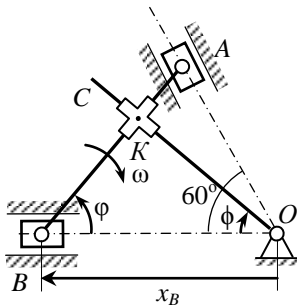


Рис. 7

Решение задачи К2.

Способ 1 (аналитический).

1). Обозначим для произвольного момента времени: $\varphi = \angle KBO$, $\phi = \angle BOK$ (рис. 7). Тогда $\varphi = (\pi/2) - \phi$, откуда

$$\dot{\varphi} = -\dot{\phi} = -\omega. \quad (1)$$

Обозначим $x_B = OB$. В $\triangle OAB$: $\angle OAB = \pi - (\pi/3) - \varphi = (2\pi/3) - \varphi$. По теореме синусов:

$$\frac{x_B}{\sin((2\pi/3) - \varphi)} = \frac{AB}{\sin(\pi/3)}.$$

$$x_B = \frac{2l}{\sqrt{3}} \sin((2\pi/3) - \varphi). \quad (2)$$

Дифференцируем (2) по времени с учетом (1):

$$\dot{x}_B = \frac{2l}{\sqrt{3}} \cos((2\pi/3) - \varphi) \cdot (-\dot{\varphi}) = \frac{2l\omega}{\sqrt{3}} \cos((2\pi/3) - \varphi). \quad (3)$$

Для рассматриваемого положения механизма отрезок OK является одновременно высотой и медианой в $\triangle ABC$, откуда $OA = OB$. А так как $\angle AOB = 60^\circ$, то $\triangle ABC$ – правильный и $\varphi = 60^\circ$.

Таким образом, при $\varphi = \pi/3$ из (3) получим:

$$v_B = \dot{x}_B = \frac{2l\omega}{\sqrt{3}} \cos(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}l\omega}{3}. \quad (4)$$

2). Дифференцируем (3) по времени с учетом (1):

$$\ddot{x}_B = \frac{2l\omega}{\sqrt{3}} (-\sin((2\pi/3) - \varphi)) \cdot (-\dot{\varphi}) = -\frac{2l\omega^2}{\sqrt{3}} \sin((2\pi/3) - \varphi). \quad (5)$$

При $\varphi = \pi/3$ из (5):

$$\ddot{x}_B = -\frac{2l\omega^2}{\sqrt{3}} \sin(\pi/3) = -l\omega^2. \quad (6)$$

Обозначим $s = OK$. Из прямоугольного $\triangle OBK$:

$$s = x_B \sin \varphi. \quad (7)$$

Дифференцируем (7) по времени дважды с учетом (1):

$$\dot{s} = \dot{x}_B \sin \varphi + x_B \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \dot{x}_B \sin \varphi - \omega x_B \cos \varphi. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \ddot{x}_B \sin \varphi + \dot{x}_B \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - \omega \dot{x}_B \cos \varphi + \omega x_B \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = \\ &= \ddot{x}_B \sin \varphi - 2\omega \dot{x}_B \cos \varphi - \omega^2 x_B \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

При $\varphi = \pi/3$: $x_B = l$. Из (9) получим с учетом (4), (6):

$$\ddot{s} = -l\omega^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\omega \frac{\sqrt{3}l\omega}{3} \cdot \frac{1}{2} - \omega^2 l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4\sqrt{3}l\omega^2}{3}.$$

Ускорение крестовины K относительно OC по модулю равно:

$$a_r = |\ddot{s}| = \frac{4\sqrt{3}l\omega^2}{3}. \quad (10)$$

Способ 2 (геометрический).

1). Так как угол между стержнями все время равен 90° , очевидно, что угловая скорость AB также равна ω и направлена по часовой стрелке (рис. 8). (Строгое обоснование следует из (1)).

На пересечении к перпендикулярам к \bar{v}_A и \bar{v}_B строим мгновенный центр скоростей P для стержня AB . Так как для данного положения механизма ΔABC – правильный, то $\angle BOK = 30^\circ$, откуда $\angle OPB = 60^\circ$.

$$BP = \frac{BK}{\sin 60^\circ} = \frac{l/2}{\sqrt{3}/2} = l/\sqrt{3}.$$

$$v_B = BP \cdot \omega = \frac{\sqrt{3}l\omega}{3}.$$

2). Движение точки K рассмотрим как сложное движение двумя различными способами (рис. 9).

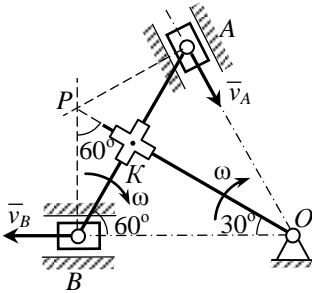


Рис. 8

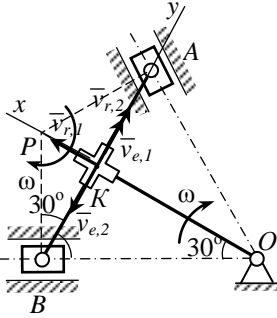


Рис. 9

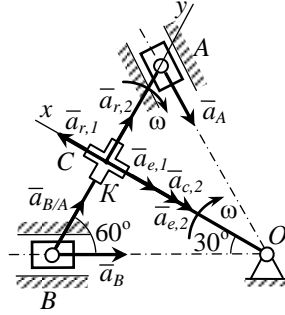


Рис. 10

При 1-м способе относительным движением будет скольжение точки K вдоль стержня OC , а переносным – вращение K вместе с OC . При этом: $\vec{v}_K = \vec{v}_{e,1} + \vec{v}_{r,1}$, где $\vec{v}_{r,1} \parallel OC$, $\vec{v}_{e,1} \perp OK$,

$$v_{e,1} = OK \cdot \omega = (\sqrt{3}/2)l\omega. \quad (11)$$

При 2-м способе относительным движением будет скольжение точки K вдоль стержня AB , а переносным – движение точки K' стержня AB , положение которой в данный момент совпадает с положением точки K . При этом: $\vec{v}_K = \vec{v}_{e,2} + \vec{v}_{r,2}$, где $\vec{v}_{r,2} \parallel AB$, $\vec{v}_{e,2} \perp PK$,

$$v_{e,2} = PK \cdot \omega = l\omega/(2\sqrt{3}). \quad (12)$$

Проецируем $\vec{v}_{e,1} + \vec{v}_{r,1} = \vec{v}_{e,2} + \vec{v}_{r,2}$ на наклонные оси x и y :

$$v_{r,1} = 0. \quad (13)$$

$$v_{e,1} = -v_{e,2} + v_{r,2}. \quad (14)$$

Учитываем (11), (12) в (14):

$$v_{r,2} = v_{e,1} + v_{e,2} = (\sqrt{3}/2)l\omega + l\omega/(2\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}l\omega. \quad (15)$$

Для ускорений при 1-м способе задания сложного движения точки K получим по теореме Кориолиса (рис. 10): $\vec{a}_K = \vec{a}_{e,1} + \vec{a}_{r,1} + \vec{a}_{c,1}$, где $\vec{a}_{r,1} \parallel OC$, ускорение Кориолиса $\vec{a}_{c,1} = 0$ в силу (13), $\vec{a}_{e,1} = \vec{a}_{e,1}^n \uparrow \uparrow \overline{KO}$,

$$a_{e,1} = a_{e,1}^n = OK \cdot \omega^2 = (\sqrt{3}/2)l\omega^2. \quad (16)$$

При 2-м способе получим: $\bar{a}_K = \bar{a}_{e,2} + \bar{a}_{r,2} + \bar{a}_{c,2}$. Здесь $\bar{a}_{r,2} \parallel AB$, направление $\bar{a}_{c,2}$ получаем поворотом $\bar{v}_{r,2}$ на 90° в направлении ω . Тогда $\bar{a}_{c,2} \uparrow\uparrow \overline{KO}$ и с учетом (15):

$$a_{c,2} = 2\omega v_{r,2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} l\omega^2. \quad (17)$$

Далее, $\bar{a}_{e,2} = \bar{a}_{K'}$.

1-й способ определения $\bar{a}_{K'}$. Так как $\varepsilon_{AB} = 0$, то мгновенный центр ускорений стержня AB находится на пересечении линий, проходящих через \bar{a}_A , \bar{a}_B , то есть в точке O . Тогда $\bar{a}_{K'} \uparrow\uparrow \overline{KO}$,

$$a_{e,2} = a_{K'} = OK \cdot \omega^2 = (\sqrt{3}/2)l\omega^2. \quad (18)$$

2-й способ определения $\bar{a}_{K'}$. При плоскопараллельном движении AB по теореме о сложении ускорений: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A}$, где $\bar{a}_{B/A} = \bar{a}_{B/A}^n$, $a_{B/A} = a_{B/A}^n = AB \cdot \omega^2 = l\omega^2$. Векторы \bar{a}_B , \bar{a}_A , $\bar{a}_{B/A}$ лежат на сторонах правильного треугольника, поэтому

$$a_A = a_{B/A} = l\omega^2. \quad (19)$$

(Тот же результат можно получить проецированием на ось, перпендикулярную \bar{a}_B .) Далее,

$$\bar{a}_{K'} = \bar{a}_A + \bar{a}_{K'/A}, \quad (20)$$

Здесь $\bar{a}_{K'/A} = \bar{a}_{K'/A}^n$,

$$a_{K'/A}^n = KA \cdot \omega^2 = (l/2)\omega^2. \quad (21)$$

Проецируем (20) на оси x , y с учетом (19), (21):

$$a_{K',x} = -a_A \sin 60^\circ = -(\sqrt{3}/2)l\omega^2.$$

$$a_{K',y} = -a_A \cos 60^\circ + a_{K'/A}^n = -l\omega^2/2 + l\omega^2/2 = 0.$$

Отсюда $\bar{a}_{K'} \uparrow\uparrow \overline{KO}$ и $a_{K'} = |a_{K',x}| = (\sqrt{3}/2)l\omega^2$, что совпадает с (18).

Приравнивая выражения для ускорений при двух способах задания сложного движения точки K , получаем окончательно:

$$\bar{a}_{e,1} + \bar{a}_{r,1} = \bar{a}_{e,2} + \bar{a}_{r,2} + \bar{a}_{c,2}. \quad (22)$$

Проецируем (22) на ось x :

$$-a_{e,1} + a_{r,1} = -a_{e,2} - a_{c,2}. \quad (23)$$

(Проецируя (22) на y , попутно можно получить $a_{r,2} = 0$.)

Определяем искомое ускорение точки K относительно OC из (23) с учетом (16) – (18):

$$a_{r,1} = a_{e,1} - a_{e,2} - a_{c,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l\omega^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}l\omega^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}l\omega^2 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}l\omega^2. \quad (24)$$

Выражение (24) совпадает по модулю с ответом (10), полученным по аналитическому способу.

Замечание 1. Наиболее короткое решение получается, если v_B и a_B находить геометрическим способом (v_B с помощью МЦС, а a_B с помощью МЦУ: $a_B = BO \cdot \omega^2 = l\omega^2$), а далее, используя это, определять a_r аналитическим способом.

Замечание 2. Соотношение (13) следует также и из аналитического способа. При $\varphi = \pi/3$ из (8) получим с учетом (4):

$$\dot{s} = \frac{l\omega}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \omega l \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Траектория точки K имеет достаточно сложный вид. Рассматриваемый в задаче момент времени соответствует наиболее удаленному от точки O положению крестовины K . Поэтому $v_{r,1} = 0$. Но, так как траектория имеет закругление и скорость точки K в этом положении не равна нулю, то искомое $a_{r,1} \neq 0$ и $\bar{a}_{r,1} \uparrow \uparrow \overline{KO}$.

Ответ. 1). $v_B = \frac{\sqrt{3}l\omega}{3}$. 2). $a_r = \frac{4\sqrt{3}l\omega^2}{3}$.

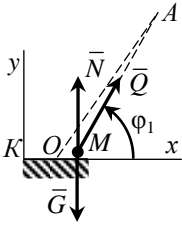


Рис. 11

Решение задачи Д1.

Рассмотрим произвольное положение точки M на площадке. В треугольнике OMA сторона OM , $OM \leq \delta$, пренебрежимо мала по сравнению со стороной OA (рис. 11). Поэтому угол φ_1 между MA и осью x можно принять равным $\varphi = \omega t$. Учтем $\vec{Q} \uparrow \uparrow \vec{MA}$. Условие неотрыва точки M от поверхности:

$$\sum_k F_{ky} = Q \sin \omega t + N - G = 0.$$

$$N = mg - Q \sin \omega t \geq 0.$$

Это условие выполняется при любом t , так как $Q \leq mg$.

Выберем начало оси x в точке K . Запишем дифференциальное уравнение движения точки M вдоль оси x с началом в точке O :

$$m \frac{dv_x}{dt} = Q \cos \omega t. \quad (1)$$

Интегрируем (1) при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$, $v_x(0) = 0$:

$$m \int_0^{v_x} dv_x = Q \int_0^t \cos \omega t \, dt.$$

$$v_x = \frac{Q}{m} \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^t = \frac{Q}{m\omega} \sin \omega t.$$

$$\int_0^x dx = \frac{Q}{m\omega} \int_0^t \sin \omega t \, dt.$$

$$x = \frac{Q}{m\omega} \cdot \frac{1}{\omega} (-\cos \omega t) \Big|_0^t = \frac{Q}{m\omega^2} (-\cos \omega t + 1).$$

Учтем, что в любой момент времени: $-1 \leq \cos \omega t \leq 1$. При $\cos \omega t = 1$ величина x принимает свое минимальное значение, равное 0, что соответствует крайнему левому положению K точки M .

При $\cos \omega t = -1$ величина x принимает свое максимальное значение, равное $\frac{2Q}{m\omega^2}$. Для того, чтобы точка M не оказалась правее положения L , должно быть $x \leq 2\delta$, откуда

$$\frac{2Q}{m\omega^2} \leq 2\delta.$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{Q}{m\delta}}.$$

Замечание. Если начало оси x выбрать в точке O , то интегрирование ДУ происходит при начальных условиях $x(0) = -\delta$, $v_x(0) = 0$, что чуть менее удобно.

Ответ. $\omega \geq \sqrt{\frac{Q}{m\delta}}.$

Решение задачи Д2.

Так как объем диска 2 в $2^2 = 4$ раза превосходит объем диска 1, а их плотности одинаковы, то их массы: $m_2 = 4m_1$. Момент инерции тела относительно вертикальной оси Cz , проходящей через центры обоих дисков:

$$J_{Cz} = J_1 + J_2 = \frac{m_1 r^2}{2} + \frac{m_2 (2r)^2}{2} = \frac{17}{2} m_1 r^2.$$

Отсюда $m_1 = 2J_{Cz} / (17r^2)$. Тогда масса тела:

$$M = m_1 + m_2 = 5m_1 = \frac{10}{17} \frac{J_{Cz}}{r^2}. \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения плоского движения тела в неподвижной системе координат xu , где x и u сонаправлены \bar{F}_1 и \bar{F}_2 :

$$M \frac{dv_{Cx}}{dt} = F_1(t), \quad M \frac{dv_{Cy}}{dt} = F_2(t), \tag{2}$$

$$J_{Cz} \frac{d\omega_z}{dt} = -F_1(t) \cdot r - F_2(t) \cdot 2r, \quad (3)$$

где ω_z – алгебраическая угловая скорость тела. Обозначим

$$Q(t) = \int_0^t e^{\sin t} dt. \text{ Так как } \bar{v}_C(0) = 0, \omega_z(0) = 0, \text{ то из (2), (3) получим:}$$

$$Mv_{Cx} = \int_0^t e^{\sin t} dt, \quad Mv_{Cy} = 2 \int_0^t e^{\sin t} dt, \quad J_{Cz} \omega_z = -5r \int_0^t e^{\sin t} dt.$$

$$v_{Cx} = \frac{Q(t)}{M}, \quad v_{Cy} = \frac{2Q(t)}{M}, \quad \omega_z = -\frac{5r}{J_{Cz}} Q(t). \quad (4)$$

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \frac{\sqrt{5}}{M} Q(t). \quad (5)$$

Мгновенный центр скоростей тела P находится на перпендикуляре к \bar{v}_C , с учетом направления угловой скорости по часовой стрелке (рис. 12). Из (4), (5), с учетом (1):

$$CP = \frac{v_C}{|\omega_z|} = \frac{\sqrt{5} J_{Cz}}{M 5r} = \frac{17}{10\sqrt{5}} r. \quad (6)$$

Отметим, что положение точки P относительно C не зависит от t .

Для угла наклона α вектора \bar{v}_C к оси x , с учетом (4):

$$\operatorname{tg} \alpha = v_{Cy} / v_{Cx} = 2.$$

$$\sin^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{5}.$$

Уравнение движения невесомой точки A приложения силы \bar{F}_1 : $0 = \bar{F}_1 + \bar{S}_1$, где \bar{S}_1 – сила натяжения нити, сходящей с диска I . Отсюда $\bar{S}_1 = -\bar{F}_1$. Поэтому \bar{S}_1 , а значит и сама нить, со временем остаются параллельны оси

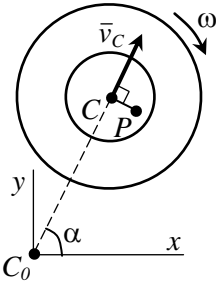


Рис. 12

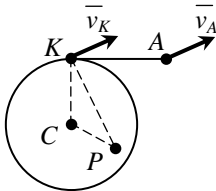


Рис. 13

x (рис. 13). Кроме того, нить нерастяжима. Вывод: участок нити после схода с тела движется поступательно. В силу непрерывности, скорость точки нити на сходе с тела равна скорости точки тела, контактирующей с ней. Поэтому для точки K тела на сходе нити с диска I : $\vec{v}_K = \vec{v}_A$, причем в данный момент: $v_K = v_A = v$.

В треугольнике CPK : $CK = r$, CP определено в (6), угол $\angle KCP = 90^\circ + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ - \alpha$.

$$\begin{aligned}
 KP^2 &= CK^2 + CP^2 - 2 CK \cdot CP \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = \\
 &= r^2 \left[1 + \frac{289}{500} + 2 \cdot \frac{17}{10\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right] = \frac{1129}{500} r^2 = 2.258 r^2.
 \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{v_K}{KP} = \frac{v}{\sqrt{2.258} r}.$$

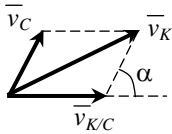


Рис. 14

Замечание 1. Скорость точки K можно было выразить не с помощью МЦС, а с использованием теоремы о сложении скоростей при плоском движении: $\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{v}_{K/C}$ (рис. 14). Из (4), (5) находится связь (6) между v_C и ω : $v_C = \frac{17}{10\sqrt{5}} r\omega$.

Учитываем $v_{K/C} = r\omega$. Тогда $\frac{v_C}{v_{K/C}} = \frac{17}{10\sqrt{5}}$. Кроме того, заранее известны величина v_K , направления \vec{v}_C , $\vec{v}_{K/C}$. Из треугольника, образованного векторами трех скоростей в формуле $\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{v}_{K/C}$, с использованием теоремы косинусов можно найти выражение для v_K через v_C , $v_{K/C}$. Отсюда определяется $v_{K/C}$ и затем ω .

Замечание 2. Выражения для сил, содержащие $e^{\sin t}$, нет необходимости интегрировать, тем более, что для соответствующих интегралов, по всей видимости, нет аналитических выражений.

Замечание 3. Интересно, что хотя числовые данные в условии просты (отношения радиусов и отношения сил 2:1), однако коэффициент $\sqrt{2.258}$ в ответе получается «сложным».

Замечание 4. Как дополнение, отметим следующее. Если проинтегрировать (4) и исключить t , то можно получить уравнение траектории точки C : $y = 2x, x \geq 0$.

Для упрощения ось x можно было ввести параллельно вектору $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Относительно такой системы координат траектория точки C – луч, уравнение которого: $y = 0, x \geq 0$. В такой системе координат геометрическое место мгновенных центров скоростей тела при $t > 0$ представляет собой луч, уравнение которого: $y = -\frac{17}{10\sqrt{5}} r, x > 0$.

Ответ. $\omega = \frac{v}{\sqrt{2.258} r}$.

Решение задачи Д3.

1). На клин действуют силы: \vec{N}_A – нормальная реакция со стороны валика, \vec{G} – сила тяжести, \vec{N}_1 – нормальная реакция со стороны горизонтальной плоскости, \vec{F}_{mp} – сила трения, направленная против вектора скорости (рис. 15). Сила трения между валиком и поверхностью скоса клина равна нулю, что следует из записи уравнения моментов для невесомого валика относительно шарнира A .

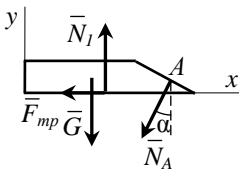


Рис. 15

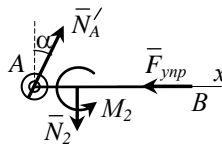


Рис. 16

Дифференциальные уравнения (ДУ) движения клина вдоль x и y :

$$ma_x = -N_A \sin \alpha - F_{mp}. \quad (1)$$

$$0 = N_1 - G - N_A \cos \alpha. \quad (2)$$

Рассмотрим систему, состоящую из стержня и валика (рис. 16). По 3-му закону Ньютона на нее действуют сила \bar{N}'_A , $\bar{N}'_A = -\bar{N}_A$, сила упругости \bar{F}_{yup} , а также со стороны гладких направляющих (скользящей заделки) сила реакции \bar{N}_2 и момент сил реакции M_2 . Так как весом AB пренебрегаем, теорема о движении центра масс для этой системы в проекции на ось x имеет вид уравнения равновесия:

$$0 = N_A \sin \alpha - F_{yup}. \quad (3)$$

Из (3):

$$N_A = \frac{F_{yup}}{\sin \alpha}. \quad (4)$$

Из (2) с учетом (4):

$$N_1 = G + N_A \cos \alpha = G + F_{yup} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (5)$$

Тогда из (1), (4):

$$ma_x = -F_{yup} - F_{mp}. \quad (6)$$

С учетом (5), $F_{mp} = fN_1$, $F_{yup} = c\lambda = mg$ получаем из (6):

$$ma_x = -F_{yup} - f(G + F_{yup} \operatorname{ctg} \alpha).$$

$$ma_x = -mg - f(mg + mg \operatorname{ctg} \alpha).$$

$$a_x = -g(1 + f(1 + \operatorname{ctg} \alpha)).$$

По модулю:

$$a = g(1 + f(1 + \operatorname{ctg} \alpha)).$$

2). Перемещение x клина отсчитываем от положения клина, при котором пружина недеформирована (рис. 17). ДУ движения клина вдоль горизонтали x :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -N_A \sin \alpha. \quad (7)$$

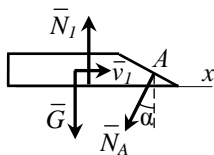


Рис. 17

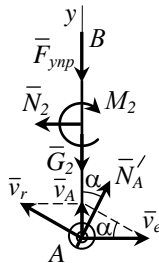


Рис. 18

Теорема о движении центра масс стержня с валиком вдоль вертикали y (рис. 18):

$$m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = N_A \cos \alpha - F_{yup} - G_2.$$

С учетом $F_{yup} = cy$, где y – изменение длины пружины стержня:

$$N_A = \frac{1}{\cos \alpha} \left(m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + cy + G_2 \right). \quad (8)$$

Движение точки A рассмотрим как сложное. При этом относительная скорость точки A направлена вдоль поверхности скоса клина, а переносная скорость совпадает со скоростью самого клина. Абсолютная скорость точки A :

$$\bar{v}_A = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Из прямоугольного треугольника, образованного \bar{v}_A и \bar{v}_e как катетами, видно, что

$$v_A = v_e \operatorname{tg} \alpha.$$

Учтем здесь $v_A = \frac{dy}{dt}$, $v_e = v_1 = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Интегрируя ДУ (9) при граничном условии, соответствующем положению системы при недеформированной пружине, получим:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha. \quad (10)$$

Учтем (10) в (8):

$$N_A = \frac{1}{\cos \alpha} \left(m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} \operatorname{tg} \alpha + cx \operatorname{tg} \alpha + G_2 \right). \quad (11)$$

Подставим (11) в (7):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} \operatorname{tg} \alpha + cx \operatorname{tg} \alpha + G_2 \right) \operatorname{tg} \alpha .$$

$$(m + m_2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{d^2 x}{dt^2} + cx \operatorname{tg}^2 \alpha = -G_2 \operatorname{tg} \alpha . \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет вид ДУ свободных колебаний при действии обобщенной постоянной силы, записанной в правой части (12). Известно, что действие постоянной силы смещает центр колебаний (на величину статического отклонения, в нашем случае под действием силы тяжести стержня), но не влияет на их круговую частоту k и период T , которые будут такими же, как для соответствующего однородного ДУ:

$$(m + m_2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{d^2 x}{dt^2} + cx \operatorname{tg}^2 \alpha = 0 .$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m \operatorname{ctg}^2 \alpha + m_2} x = 0 .$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m \operatorname{ctg}^2 \alpha + m_2}{c}} .$$

Перемещение клина от начального равновесного положения до крайнего правого положения соответствует четверти полного колебания. Искомое время движения равно четверти периода колебаний:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m \operatorname{ctg}^2 \alpha + m_2}{c}} .$$

Замечание 1. Соотношение (10) можно было получить также аналитическим способом, рассматривая лишь перемещения, для чего потребовался бы дополнительный рисунок.

Замечание 2. Хотя в решении используется ДУ свободных колебаний, было бы несколько некорректно говорить, что клин «совершает свободные колебания», что подразумевало бы неограниченные во времени колебания. Дело в том, что после половины полного колебания стержень продолжит двигаться вниз уже замедленно, и клин перестанет контактировать с валиком A , далее двигаясь влево равномерно.

На участке движения, рассматриваемом в задаче, движение клина вправо замедленное. Поэтому контакт клина с валиком сохраняется.

Замечание 3. Как известно, период свободных колебаний не зависит от величины начальной скорости (она не задана в условии).

Ответ. 1). $a = g(1 + f(1 + \operatorname{ctg} \alpha))$. 2). $t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m \operatorname{ctg}^2 \alpha + m_2}{c}}$.

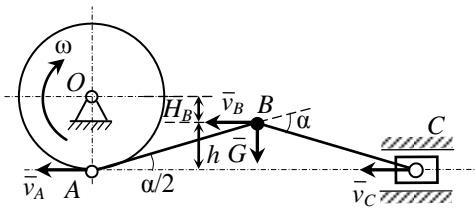


Рис. 19

Решение задачи Д4.

1). В силу $R = BC \cdot \sin \alpha$ замечаем из рисунка в условии задачи, что нижняя точка маховика находится на одной горизонтали с точкой C .

В момент, когда точка B окажется в нижнем положении, точка A также будет в своем нижнем положении

(рис. 19). При этом $\vec{v}_A \uparrow \vec{v}_C$, а перпендикуляры к этим векторам различны. Значит, твердое тело ABC в данный момент совершает мгновенное поступательное движение. При этом

$$v_B = v_A = R\omega. \tag{1}$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий маховика и материальной точки B . С учетом (1) получим:

$$T = \frac{J_{z, \max} \omega^2}{2} + \frac{mv_B^2}{2} = \frac{MR^2 \omega^2}{2} + \frac{mv_B^2}{2} = \frac{(M + m)v_B^2}{2}. \quad (2)$$

Вначале точка B находилась на одной горизонтали с точкой O , то есть выше точки C на величину R . В конечном положении точка B находится выше точки C на величину h , где h – высота в треугольнике ABC , опущенная из вершины B .

Сумма работ внешних сил системы:

$$\sum_k A_k^e = A_G = mgH_B = mg(R - h), \quad (3)$$

Найдем h из равнобедренного треугольника ABC :

$$h = AB \cdot \sin(\alpha/2) = 2R \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \quad (4)$$

Сумма работ внутренних сил $\sum_k A_k^i = 0$.

С учетом (2), (3), (4) теорема об изменении кинетической энергии для всей системы имеет вид:

$$\frac{(M + m)v_B^2}{2} = mg\left(R - R\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right).$$

Отсюда получаем:

$$v_B = \sqrt{\frac{2\left(1 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) mgR}{(M + m)}}.$$

2). При $l > 0$ условие задачи о том, что спортсмен обеспечивает поступательность своего движения своими усилиями и с помощью

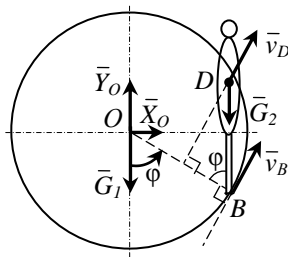


Рис. 20

встроенного механизма, является необходимым для преодоления возникающих инерционных сил. В данном случае сумма работ внутренних сил системы: $\sum_k A_k^i \neq 0$.

Поэтому эффективно применить теорему об изменении кинетической энергии для определения v_B не удастся.

Применим теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси Oz , в записи которой внутренние силы не участвуют.

Будем отсчитывать угол φ от вертикали против часовой стрелки (на рис. 20 для удобства записи изменены реальные пропорции объектов). Для произвольного положения системы формально направим \bar{v}_B в соответствии с этим направлением отсчета. Тогда $v_B = R\dot{\varphi}$. Так как спортсмен движется поступательно, то $\bar{v}_D = \bar{v}_B$ и

$$v_D = R\dot{\varphi}. \quad (5)$$

Кинетический момент для маховика при его вращательном движении:

$$K_{Oz,1} = J_z \dot{\varphi} = MR^2 \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Кинетический момент для спортсмена при его поступательном движении с учетом (5):

$$K_{Oz,2} = M_{Oz}(m\bar{v}_D) = mR\dot{\varphi} \cdot (R - l \cos \varphi). \quad (7)$$

Кинетический момент системы с учетом (6), (7):

$$K_{Oz} = K_{Oz,1} + K_{Oz,2} = (M + m)R^2 \dot{\varphi} - mRl \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (8)$$

Теорема об изменении кинетического момента получает вид:

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}(\bar{G}_2). \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left((M + m)R^2 \dot{\varphi} - mRl \dot{\varphi} \cos \varphi \right) = -mgR \sin \varphi.$$

$$\frac{d}{dt} \left((M + m)R\dot{\varphi} - ml \dot{\varphi} \cos \varphi \right) = -mg \sin \varphi.$$

$$(M + m)R\ddot{\varphi} - ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -mg \sin \varphi.$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m(l\dot{\varphi}^2 + g) \sin \varphi}{(M + m)R - ml \cos \varphi}. \quad (10)$$

Отметим, что в силу условия задачи $l < (M + m)R/m$, а также $\cos \varphi \leq 1$, знаменатель правой части в (10) строго больше нуля.

Используем представление:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} .$$

Учтем это в (10) и затем разделим переменные φ и $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\dot{\varphi} d\dot{\varphi}}{l\dot{\varphi}^2 + g} = - \frac{m \sin \varphi d\varphi}{(M + m)R - ml \cos \varphi} . \quad (11)$$

Произведем замены переменных:

$$u = \dot{\varphi}^2, \quad w = \cos \varphi . \quad (12)$$

$$du = 2\dot{\varphi} d\dot{\varphi}, \quad dw = -\sin \varphi d\varphi .$$

Тогда получим из (11):

$$\frac{du}{2(lu + g)} = \frac{m dw}{(M + m)R - ml w} . \quad (13)$$

С учетом (12) в начальный момент времени при $\varphi = \pi/2$: $u = 0$, $w = \cos(\pi/2) = 0$. В конечный момент при $\varphi = 0$: $u = \omega_1^2$, $w = \cos 0 = 1$, где ω_1 – угловая скорость маховика в момент, когда точка B оказывается в нижнем положении. Приводим (13) к удобному для интегрирования виду:

$$\frac{du}{u + (g/l)} = - \frac{2dw}{w - \frac{(M + m)R}{ml}} .$$

Перед интегрированием для удобства записи введем коэффициент:

$$k = \frac{(M + m)R}{ml} . \quad (14)$$

Отметим, что $k > 1$. Тогда получим:

$$\int_0^{\omega_1^2} \frac{du}{u + (g/l)} = -2 \int_0^1 \frac{dw}{w - k} . \quad (15)$$

Знаменатель в левой части (15) строго положителен. Из $k > 1$ и $w \leq 1$ следует, что знаменатель в правой части (15) строго отрицателен и при интегрировании учет модуля меняет знак этого выражения. Тогда из (15):

$$\begin{aligned}
\ln(u + (g/l)) \Big|_0^{\omega_1^2} &= -2 \ln(k-w) \Big|_0^1. \\
\ln\left(\frac{\omega_1^2 + (g/l)}{(g/l)}\right) &= -2 \ln\left(\frac{k-1}{k}\right). \\
\ln\left(\frac{\omega_1^2 + (g/l)}{(g/l)}\right) &= \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)^2. \\
\frac{\omega_1^2 + (g/l)}{(g/l)} &= \frac{k^2}{(k-1)^2}. \\
\omega_1^2 &= \frac{g}{l} \left(\frac{k^2}{(k-1)^2} - 1 \right). \\
\omega_1^2 &= \frac{g}{l} \cdot \frac{2k-1}{(k-1)^2}. \\
\omega_1 &= \frac{1}{k-1} \sqrt{\frac{(2k-1)g}{l}}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Тогда искомая скорость точки B в нижнем положении:

$$v_B = R\omega_1 = \frac{R}{k-1} \sqrt{\frac{(2k-1)g}{l}},$$

где k определен в (14).

Замечание 1. Покажем, что если в (16) перейти к пределу при $l \rightarrow 0$, получим соотношение для случая $l = 0$, следующее из теоремы об изменении кинетической энергии с учетом (2) и $A_G = mgR$:

$$\omega_1^2 = \frac{2mg}{R(M+m)}. \tag{17}$$

Действительно, обозначим $k = \frac{b}{l}$, где $b = \frac{(M+m)R}{m}$. Тогда из (16):

$$\lim_{l \rightarrow 0} \omega_1^2 = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{g}{l} \cdot \frac{2k-1}{(k-1)^2} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{2g}{l} \cdot \frac{(b/l) - 0.5}{((b/l) - 1)^2} \right) =$$

$$= \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{2g}{l} \cdot \frac{(b/l)}{(b/l)^2} \right) = \frac{2g}{b} = \frac{2mg}{R(M+m)}.$$

Это выражение совпадает с (17).

Замечание 2. Условие $l < (M+m)R/m$, которое позволяет успешно проинтегрировать ДУ в рамках модели 3, на практике создает заметные ограничения. Если считать, что $R = 0.3$ м, масса маховика (инерционная масса для электромагнитного тренажера) $M = 30$ кг, масса спортсмена $m = 60$ кг, то получим ограничение $l < (30+60) \cdot 0.3/60$ (м), т.е. $l < 0.45$ м. Такое возможно, если спортсмен сидит на педали на согнутой ноге.

Замечание 3. Задачу можно было бы сформулировать и без условия наличия специального механизма, обеспечивающего горизонтальность педали. Можно представить, что спортсмен опирается ногой на педаль, жестко прикрепленную к маховику, которая вначале наклонена к горизонту под углом 60° , а в конце движения после поворота на прямой угол окажется под углом 30° . При этом носок спортсмена вначале вытянут вниз, а в конце приподнят. При такой постановке задачи нужно оговорить условие пренебрежения массой стопы и ее длиной.

Ответ. 1). $v_B = \sqrt{\frac{2(1 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}) mgR}{(M+m)}}.$

2). $v_B = \frac{R}{k-1} \sqrt{\frac{(2k-1)g}{l}}$, где $k = \frac{(M+m)R}{ml}$.

Замечание к задачам Д1-Д4. Интересно, что все четыре задачи по динамике связаны с периодическим характером изменения тех или иных величин.

В задаче Д1 сама сила постоянна, но периодическим образом изменяется проекция действующей силы, что приводит к гармоническим

колебаниям. В задаче Д2 периодически меняются силы, однако само движение не имеет характер колебаний. В задаче Д3, постановка которой наиболее близка к классическим постановкам задач о колебаниях, реализуется лишь четверть полного колебания. В задаче Д4 движение с течением времени также получит колебательный характер: после прохождения нижнего положения точка B через какое-то время окажется на первоначальной высоте, затем начнется обратное движение и так далее.

При этом неявном сходстве все четыре задачи в силу различных особенностей условий решаются совершенно по-разному.