Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады студентов по теоретической механике

Казань, Казанский государственный энергетический университет 20-24 ноября 2017 г.

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович

Рецензент:
доцент кафедры АГД К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович

Согласовано:
председатель жюри олимпиады, профессор кафедры ТМ НГАСУ (Сибстрин) Юдин Владимир Алексеевич

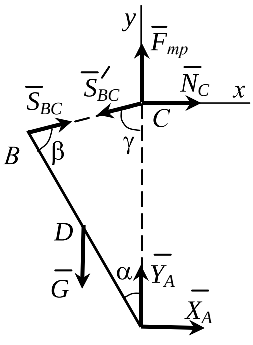

Рис. 1

Решение задачи С1.

Обозначим силу реакции невесомого стержня BC через $\overline{S}_{BC}$ (рис.1). Сила тяжести $\overline{G}$ однородного стержня AB приложена к его середине D. Для AB достаточно записать лишь одно из трех уравнений равновесия:

$$\sum_k M_A(\overline{F}_k) = -S_{BC} \cdot AB \sin\beta + G \cdot (AB/2) \sin\alpha = 0 .$$

Учтя здесь $\beta = \pi - \alpha - \gamma$, $\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma)$, получим:

$$S_{BC} = \frac{mg \sin\alpha}{2\sin(\alpha+\gamma)} . \qquad (1)$$

Условия равновесия ползуна C:

$$\sum_k F_{kx} = N_C - S'_{BC} \sin\gamma = 0 .$$

$$\sum_k F_{ky} = F_{тр} - S_{BC}^{/} \cos\gamma = 0 .$$

Отсюда с учетом закона Кулона $F_{тр} \le fN_C$ получим: $S_{BC}\cos\gamma \le f\, S_{BC}\sin\gamma$, откуда

$$\operatorname{ctg}\gamma \le f \ . \qquad (2)$$

В выражении (1) значение S_{BC} минимально, если $\sin(\alpha+\gamma)=1$. При этом $\alpha+\gamma=\pi/2$, откуда

$$\gamma=(\pi/2)-\alpha \ . \qquad (3)$$

Если при значении γ из (3) выполняется условие равновесия (2), то есть, если $\operatorname{ctg}((\pi/2)-\alpha)\le f$, $\operatorname{tg}\alpha \le f$, то (3) является искомым значением γ. При этом из (1) получим значение минимальной силы реакции:

$$S_{BC}=\frac{mg\sin\alpha}{2} .$$

При значении γ из (3) условие (2) не выполняется, если $\operatorname{tg}\alpha > f$. Тогда, так как функция $\operatorname{ctg}\gamma$ убывает в интервале $(0;\pi)$, значение γ нужно увеличивать до тех пор, пока (2) не начнет выполняться. (Это будет соответствовать максимально возможному значению $\sin(\alpha+\gamma)$, то есть минимально возможному значению S_{BC} при условии равновесия конструкции.) При этом будет $\operatorname{ctg}\gamma = f$, т.е. $\gamma=\operatorname{arcctg} f$. Тогда, используя основное тригонометрическое тождество, несложно получить: $\cos\gamma=\dfrac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, $\sin\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f^2}}$. Учтем это в (1):

$$S_{BC}=\frac{mg\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)}=$$

$$=\frac{mg\sin\alpha\sqrt{1+f^2}}{2(f\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{mg\sqrt{1+f^2}}{2(f+\operatorname{ctg}\alpha)}$$

Замечание 1. Можно было рассуждать так. Плечо силы $\bar{S}_{BC}$ относительно точки *A* максимально, когда $BC \perp AB$. В этом случае

$\gamma = (\pi/2) - \alpha$. Тогда выражение для S_{BC} минимально, так как слагаемое $G \cdot (AB/2)\sin\alpha$ в (1) имеет фиксированную величину.

Замечание 2. Система сил, приложенных к AB, не является системой сходящихся сил. Запись уравнений равновесия $\sum\limits_i F_{ix} = 0$, $\sum\limits_i F_{iy} = 0$ не приводит к решению и лишена смысла. Ведь, помимо неизвестной S_{BC}, в каждом из них присутствует по одной неизвестной реакции шарнира *A*. Записывание уравнений, содержащих «лишние» неизвестные реакции, ничего не дает для решения задачи и приводит лишь к дополнительному расходу времени.

Ответ. При $\operatorname{tg}\alpha \le f$ $\gamma = (\pi/2) - \alpha$, $S_{BC} = \dfrac{mg\sin\alpha}{2}$. При $\operatorname{tg}\alpha > f$ $\gamma = \operatorname{arcctg} f$, $S_{BC} = \dfrac{mg\sqrt{1+f^2}}{2(f + \operatorname{ctg}\alpha)}$.

Решение задачи С2.

1). *1 способ.* Уравнение равновесия пластины $\sum\limits_k M_D(\overline{F}_k) = 0$ имеет вид (рис. 2):

$$M_D(\overline{R}_A) = 0.$$

Значит, линия действия реакции шарнира $\overline{R}_A$ проходит через *D*. Спроецируем силы, приложенные к точке *D*, на наклонную ось x_1:

$$\sum_k F_{kx_1} = -P\cos 60^\circ + R_A \cos 75^\circ = 0.$$

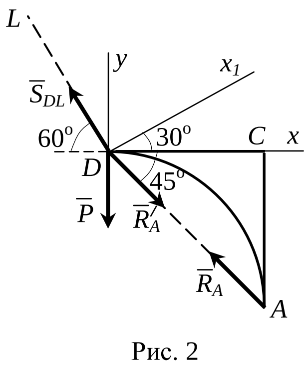

Рис. 2

$$\cos 75^{\circ} = \sqrt{\frac{1+\cos 150^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$R_A = \frac{P}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Если учесть, что

$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1},$$

получим ответ в другом виде:

$$R_A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} P.$$

2 способ. При проецировании на оси x, y:

$$\sum_k F_{kx} = -S_{DL} \cos 60^{\circ} + R_A \cos 45^{\circ} = 0.$$

$$\sum_k F_{ky} = S_{DL} \sin 60^{\circ} - R_A \sin 45^{\circ} - P = 0.$$

$$S_{DL} = \sqrt{2}\, R_A.$$

$$R_A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} P.$$

3 способ. Если рассматривать составляющие $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ реакции шарнира *A*, вводя их вдоль положительных направлений осей *x*, *y*, получим уравнения равновесия всей пластины:

$$\sum_k F_{kx} = X_A - S_{DL} \cos 60^{\circ} = 0.$$

$$\sum_k F_{ky} = Y_A + S_{DL} \sin 60^{\circ} - P = 0.$$

$$\sum_k M_A(\overline{F}_k) = S_{DL} \cos 60^{\circ} \cdot R - S_{DL} \sin 60^{\circ} \cdot R + P \cdot R = 0.$$

$$S_{DL} = \frac{2P}{\sqrt{3}-1}.$$

$$X_A = \frac{P}{\sqrt{3}-1}.$$

$$Y_A = -\frac{P}{\sqrt{3}-1}.$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} P.$$

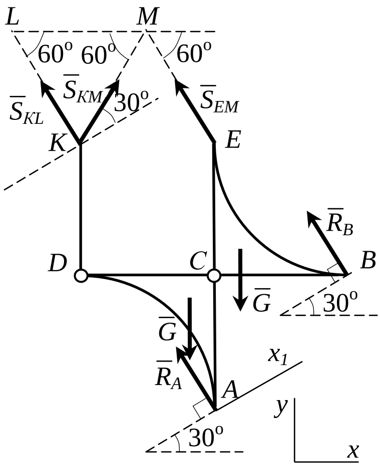

Рис. 3

2). *1 способ.* Площадь поверхности и сила тяжести для каждой из пластин (рис. 3):

$$S = R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2.$$

$$G = mg = \rho S g = \rho\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2 g. \quad (1)$$

Уравнение равновесия системы двух пластин вместе со стержнем *KD* при проецировании на наклонную ось x_1:

$$\sum_k F_{kx_1} = -2G\cos 60^\circ + S_{KM}\cos 30^\circ = 0.$$

$$S_{KM} = \frac{2}{\sqrt{3}} G. \qquad (2)$$

При равновесии системы сходящихся сил, приложенных к точке *К*, а именно $\overline{S}_{KL}$, $\overline{S}_{KM}$, $\overline{S}_{KD}$ (последняя направлена вдоль *KD*, на рисунке не указана) с учетом (2) и (1):

$$\sum_k F_{kx} = -S_{KL}\cos 60^\circ + S_{KM}\cos 60^\circ = 0.$$

$$S_{KL} = S_{KM}.$$

$$S_{KL} = \frac{2}{\sqrt{3}}\rho\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2 g = \frac{4-\pi}{2\sqrt{3}}\rho R^2 g.$$

2 способ. В рамках принципа освобождаемости от связей освободим систему от связи *KL*, введя силу реакции этой связи $\bar{S}_{KL}$, и применим принцип возможных перемещений (рис. 4).

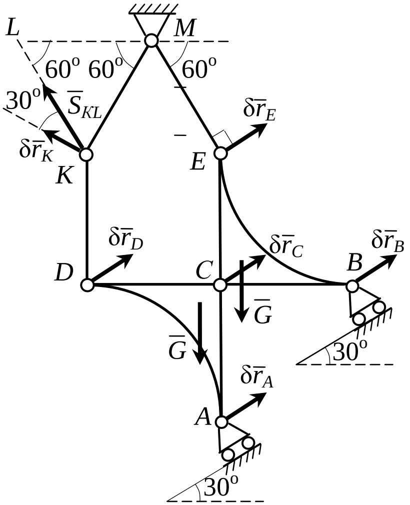

Рис. 4

Выберем направление возможного перемещения $\delta\bar{r}_E$, перпендикулярного *EM*. Так как направление $\delta\bar{r}_B$ вдоль опорной плоскости подвижного шарнира *B* параллельно $\delta\bar{r}_E$, а перпендикуляры к этим векторам не совпадают, то пластина *BCE* совершает возможное мгновенное поступательное движение и $\delta\bar{r}_B = \delta\bar{r}_E$. Тогда и $\delta\bar{r}_C = \delta\bar{r}_E$. Аналогично получим для пластины *ACD*: $\delta\bar{r}_A = \delta\bar{r}_C$, тогда $\delta\bar{r}_D = \delta\bar{r}_C$, то есть $\delta\bar{r}_D = \delta\bar{r}_E$. Обозначим величину возможного перемещения центра тяжести каждой из двух пластин через $\delta s_{ц.т.п.}$. Тогда $\delta s_{ц.т.п.} = \delta s_E$.

Возможное перемещение $\delta\bar{r}_K$ перпендикулярно *KM*. При возможном плоскопараллельном движении *KD* по аналогу теоремы о проекциях скоростей:

$$\delta s_K \cos 60^\circ = \delta s_D \cos 60^\circ .$$

$$\delta s_K = \delta s_D .$$

Таким образом, $\delta s_K = \delta s_E$.

Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$\sum_k \delta A_{F_k} = 0 .$$

$$S_{KL} \delta s_K \cos 30^\circ - 2G \delta s_{ц.т.п.} \cos 60^\circ = 0 .$$

$$S_{KL}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2G\cdot\frac{1}{2}=0\,.$$

$$S_{KL}=\frac{2G}{\sqrt{3}}\,,$$

где G получено в (1).

3 способ. Кратко приведем нерациональный способ решения. Обозначим через a одну из координат центра тяжести одной пластины относительно центра дуги окружности пластины.

$$a=\frac{1}{M}\iint_S \rho x\,dxdy=\frac{1}{S}\int_0^R\int_{\sqrt{R^2-x^2}}^R x\,dxdy=\frac{1}{2S}\int_0^R y^2dy=\frac{2}{3(4-\pi)}R\,.$$

(Отметим, что в расчетах использовать это выражение нет необходимости, так как a в итоге сокращается.)

Уравнения равновесия пластины ACD:

$$\sum_k F_{kx}=-R_A\cos 60^\circ+X_C=0\,.$$

$$\sum_k F_{ky}=S_{DK}+Y_C+R_A\sin 60^\circ-G=0\,.$$

$$\sum_k M_C(\overline{F}_k)=-S_{DK}\cdot R+G\cdot(R-a)-R_A\cos 60^\circ\cdot R=0$$

Уравнение равновесия пластины BCE в проекции на ось x_1:

$$\sum_k F_{kx_1}=-X_C\cos 30^\circ-Y_C\cos 60^\circ-G\cos 60^\circ=0\,.$$

Из этой системы можно получить следующие величины:

$$S_{DK}=2G\,.$$

$$R_A=-\frac{2(R+a)}{R}G\,.$$

$$Y_C=\left(\frac{\sqrt{3}(R+a)}{R}-1\right)G\,.$$

$$X_C=-\frac{R+a}{R}G\,.$$

Уравнение равновесии системы сил, приложенных к точке K, в проекции на ось, перпендикулярную *KM*:

$$\sum_k F_{kx_2} = -S_{KL}\cos 30^\circ + S_{DK}\cos 60^\circ = 0\,.$$

$$S_{KL} = \frac{S_{DK}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}G\,.$$

Ответ. 1). $R_A = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}P$. 2). $S_{KL} = \dfrac{4-\pi}{2\sqrt{3}}\rho R^2 g$.

Решение задачи К1.

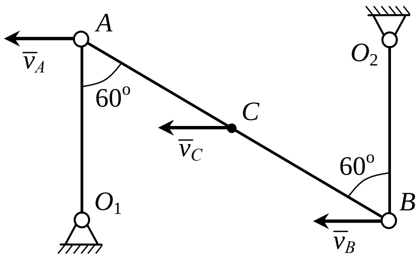

Рис. 5

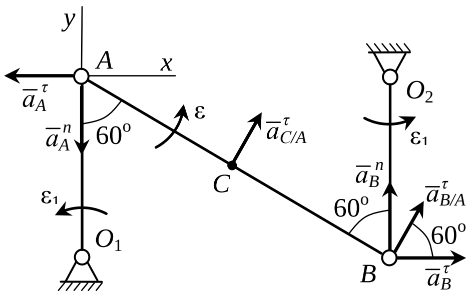

Рис. 6

Скорости точек A и B перпендикулярны O_1A и O_2B, соответственно, и оказываются сонаправленными, например, направлены влево (рис. 5). Звено AB совершает мгновенное поступательное движение. При этом $\omega_{AB} = 0$ и $v_A = v_B = v_C$, а значит, с учетом $O_1A = O_2B$:

$$\omega_{O_1A} = \omega_{O_2B} = \omega\,. \tag{1}$$

При плоскопараллельном движении *AB* (рис. 6):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A}\,.$$

Так как $a_{B/A}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0$, то получим:

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{B/A}^\tau . \tag{2}$$

На рисунке направления $\bar{a}_A^\tau$, $\bar{a}_B^\tau$, $\bar{a}_{B/A}^\tau$ пока выбраны предположительно (каждое в одном из двух возможных направлений).

Проецируем (2) на ось *y*:

$$a_B^n = -a_A^n + a_{B/A}^\tau \sin 60^\circ .$$

С учетом $a_A^n = a_B^n = l\omega^2 = v_A^2 / l$, $a_{B/A}^\tau = AB \cdot \varepsilon = 2l\varepsilon$ получим:

$$2a_A^n = 2l\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$\frac{v_A^2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} l\varepsilon . \tag{3}$$

Так как отсюда $\varepsilon > 0$, то его направление на рисунке было выбрано верно. Из (3) с учетом $v_C = v_A$:

$$v_C = l\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon} .$$

Далее, проецируем (2) на ось *x*:

$$a_{B,x}^\tau = a_{A,x}^\tau + a_{B/A}^\tau \cdot \frac{1}{2} . \tag{4}$$

Так как $a_{B/A}^\tau > 0$, то должно выполняться

$$a_{B,x}^\tau - a_{A,x}^\tau > 0 . \tag{5}$$

Так как угловые ускорения O_1A и O_2B равны по величине (на рисунке обозначены через ε_1) и $O_1A = O_2B$, то $a_B^\tau = a_A^\tau$. Поэтому (4) возможно лишь, если $a_{B,x}^\tau > 0$, $a_{A,x}^\tau < 0$. Значит, на рисунке направления $\bar{a}_A^\tau$, $\bar{a}_B^\tau$ были выбраны верно. Тогда из (4):

$$a_A^\tau = \frac{1}{4} a_{B/A}^\tau = \frac{2l\varepsilon}{4} = \frac{l\varepsilon}{2} . \tag{6}$$

Для точки *C*:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{C/A}^\tau . \tag{7}$$

$$a_{C/A}^\tau = AC \cdot \varepsilon = l\varepsilon .$$

$$a_{Cx} = -a_A^\tau + a_{C/A}^\tau \cos 60^\circ = -\frac{l\varepsilon}{2} + \frac{l\varepsilon}{2} = 0\,.$$

$$a_{Cy} = -a_A^n + a_{C/A}^\tau \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} l\varepsilon + l\varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\,.$$

$$a_C = 0\,.$$

Замечание 1. То, что точка *C* является мгновенным центром ускорений звена *AC*, следует также из соображений центральной симметрии: если рисунок, содержащий звено *AB* и векторы ускорений его концов повернуть на 180° вокруг *C*, то этот рисунок совпадет с исходным.

Замечание 2. Можно было также спроецировать (7) на наклонную ось x_1, сонаправленную $\bar{a}_{C/A}^\tau$, предварительно установив для $\bar{a}_A$, что $a_A = l\varepsilon$ и $\bar{a}_A \uparrow\downarrow x_1$. Тогда

$$a_C = a_{Cx_1} = -l\varepsilon + l\varepsilon = 0\,.$$

Ответ. $v_C = l\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon}$. $a_C = 0$.

Решение задачи К2.

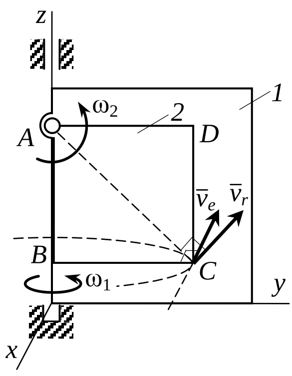

Рис. 7

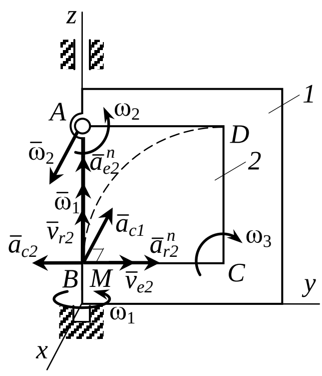

Рис. 8

1). Положение пластин в момент $t = 0$ показано на рис. 7. Покажем, что искомой точкой является точка *C*. Движение любой точки *M* пластины *2* (в том числе и *C*) рассмотрим как сложное. Относительное движение свяжем с вращением точки *M* вместе с пластиной *2* вокруг шарнира *A*, при этом относительная скорость $\bar{v}_r \perp AM$, $\bar{v}_r$ лежит в плоскости пластины *1*. Переносное движение свяжем с вращением точки *M* вместе с пластиной *1* вокруг оси *z*, при этом переносная скорость $\bar{v}_e \perp ABCD$. (На рисунке направления этих векторов указаны для точки *C*.) Абсолютная скорость точки *M* равна $\bar{v}_M = \bar{v}_e + \bar{v}_r$. Так как $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$, то

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}\ . \tag{1}$$

Для точки *C*:

$$v_e = BC \cdot \omega_1 = R\omega_1 .$$

$$v_r = AC \cdot \omega_2 = \sqrt{2}R\omega_2 .$$

Это максимально возможные значения, которые могут принимать для различных точек *M* величины v_e и v_r, соответственно. Поэтому из (1) следует, что v_M максимальна в случае точки *C*. При этом

$$v_C = R\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}\ . \tag{2}$$

2). *1 способ.* Движение точки *M* рассмотрим как сложное движение (будем называть его 1-м), «внутри» которого происходит другое сложное движение (2-е) (рис. 8).

При 1-м сложном движении 1-е переносное движение *M* связано с поворотом пластины *1*, а 1-е относительное движение – движение *M* относительно пластины *1*. При этом 1-е относительное движение в свою очередь является 2-м сложным движением: 2-е переносное движение *M* связано с поворотом *M* вместе с пластиной *2* в плоскости пластины *1*, а 2-е относительное движение – движение *M* по каналу *BD* относительно пластины *2*.

По теореме о сложении ускорений при 1-м сложном движении:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{a,1} = \bar{a}_{e,1} + \bar{a}_{r,1} + \bar{a}_{c,1}\ . \tag{3}$$

В (3) 1-е переносное ускорение, так как расстояние от *M* до оси *z* равно нулю:

$$\bar{a}_{e,1} = 0\,. \qquad (4)$$

В (3) 1-е относительное ускорение равно 2-му абсолютному ускорению:

$$\bar{a}_{r,1} = \bar{a}_{a,2} = \bar{a}_{e,2} + \bar{a}_{r,2} + \bar{a}_{c,2}\,. \qquad (5)$$

В (5) 2-е переносное ускорение:

$$\bar{a}_{e,2} = \bar{a}^{\tau}_{e,2} + \bar{a}^{n}_{e,2}\,. \qquad (6)$$

В (6) тангенциальная компонента:

$$a^{\tau}_{e,2} = MA \cdot \ddot{\varphi}_2 = 0\,. \qquad (7)$$

В (6) нормальная компонента: $\bar{a}^{n}_{e,2} \uparrow\uparrow \overline{MA}$ и

$$a^{n}_{e,2} = MA \cdot \omega_2^2 = R\omega_2^2\,. \qquad (8)$$

В (5) 2-е относительное ускорение:

$$\bar{a}_{r,2} = \bar{a}^{\tau}_{r,2} + \bar{a}^{n}_{r,2}\,. \qquad (9)$$

В (9) тангенциальная компонента:

$$a^{\tau}_{r,2} = R\ddot{\varphi}_3 = 0\,. \qquad (10)$$

1-я относительная скорость:

$$\bar{v}_{r,1} = \bar{v}_{a,2} = \bar{v}_{e,2} + \bar{v}_{r,2}\,. \qquad (11)$$

$$v_{e,2} = MA \cdot \omega_2 = R\omega_2\,. \qquad (12)$$

$$v_{r,2} = R\omega_3\,. \qquad (13)$$

Тогда в (9) нормальной компонента: $a^{n}_{r,2} \uparrow\uparrow \overline{MC}$ и, с учетом (13):

$$a^{n}_{r,2} = \frac{v^2_{r,2}}{MC} = R\omega_3^2\,. \qquad (14)$$

В (5) 2-е ускорение Кориолиса: $\bar{a}_{c,2} = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{r,2}$. Направление $\bar{a}_{c,2}$ получаем поворотом $\bar{v}_{r,2}$ на 90^o в плоскости пластины 2 в направлении ω_2. Его величина с учетом (12):

$$a_{c,2} = 2\omega_2 v_{r,2} = 2\omega_2 \cdot R\omega_3 = 2R\omega_2\omega_3\,. \qquad (15)$$

Наконец, в (3) 1-е ускорение Кориолиса с учетом (11):

$$\bar{a}_{c,1} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{r,1}\,.$$

$$\overline{a}_{c,1} = 2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{e,2} + 2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{r,2} = 2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{e,2}.$$

Здесь было учтено $2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{r,2} = 0$ вследствие $\overline{\omega}_1 \uparrow\uparrow \overline{v}_{r,2}$. $\overline{a}_{c,1}$ получается поворотом $\overline{v}_{r,2}$ на 90^o в плоскости *xy* в направлении ω_1.

С учетом (12) получим:

$$a_{c,1} = 2\omega_1 v_{e,2} = 2R\omega_1\omega_2. \qquad (16)$$

Итак, из (3) и с учетом (4)-(16) получим:

$$\overline{a}_M = \overline{a}^n_{e,2} + \overline{a}^n_{r,2} + \overline{a}_{c,2} + \overline{a}_{c,1}. \qquad (17)$$

Проецируем на оси координат:

$$a_{M,x} = -a_{c,1} = -2R\omega_1\omega_2. \qquad (18)$$

$$a_{M,y} = a_{r,2} - a_{c,2} = R\omega_3^2 - 2R\omega_2\omega_3. \qquad (19)$$

$$a_{M,z} = a^n_{e,2} = R\omega_2^2. \qquad (20)$$

$$a_M = R\sqrt{4\omega_1^2\omega_2^2 + (\omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3)^2 + \omega_2^4}. \qquad (21)$$

Отметим, что строгое рассуждение позволяет учесть вклад «наименее заметной» компоненты, а именно $a_{c,2} = 2R\omega_2\omega_3$.

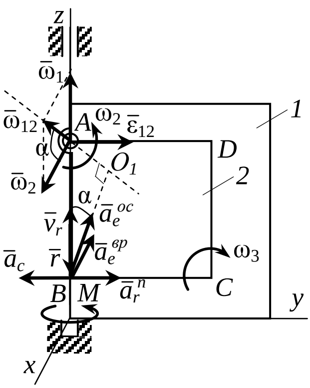

Рис. 9

2-й способ.

Движение пластины *2* рассмотрим как результат сложения двух вращений вокруг точки *A* с угловыми скоростями $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ (рис. 9). При этом угловая скорость пластины *2*:

$$\overline{\omega}_{12} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2.$$

Движение точки *M* при таком вращении – переносное движение, т.е. $\overline{\omega}_e = \overline{\omega}_{12}$. Движение точки *M* относительно пластины 2 – относительное движение. По теореме о сложении ускорений при сложном движении:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c. \qquad (22)$$

Здесь переносное ускорение $\overline{a}_e$ определяем по известной формуле для вращения вокруг неподвижной точки, в данном случае вокруг A:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^{вр} + \overline{a}_e^{oc} = \overline{\varepsilon}_e \times \overline{r} + \overline{\omega}_e \times (\overline{\omega}_e \times \overline{r}) . \qquad (23)$$

Здесь $\overline{r} = \overline{AM}$. Мгновенной осью вращения пластины *2* является прямая, проходящая через A вдоль вектора $\overline{\omega}_{12}$. Это вектор располагается в плоскости xz под углом α к оси x. При этом $\cos\alpha = \dfrac{\omega_2}{\omega_{12}}$.

Осестремительная компонента переносного ускорения $\overline{a}_e^{oc}$ перпендикулярна этой оси и направлена к точке O_1 на этой оси. При этом

$$a_e^{oc} = O_1M \cdot \omega_{12}^2 . \qquad (24)$$

Здесь

$$O_1M = MA \cdot \cos\alpha = R\cos\alpha . \qquad (25)$$

$$\omega_{12}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 . \qquad (26)$$

В дальнейшем при проецировании $\overline{a}_e^{oc}$ на оси координат с учетом (24)-(25):

$$\omega_1 = \omega_{12}\sin\alpha , \quad \sin\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_{12}} .$$

$$\omega_2 = \omega_{12}\cos\alpha , \quad \cos\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_{12}} .$$

$$O_1M = R\frac{\omega_2}{\omega_{12}} = \frac{R\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} .$$

$$a_e^{oc} = O_1M \cdot \omega_{12}^2 = R\omega_2\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} .$$

$$\left(\overline{a}_e^{oc}\right)_x = -a_e^{oc}\sin\alpha = -R\omega_2\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} = -R\omega_1\omega_2 . \qquad (27)$$

$$\left(\overline{a}_e^{oc}\right)_z = a_e^{oc}\cos\alpha = R\omega_2\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} = R\omega_2^2 . \qquad (28)$$

Далее, известно, что при сложении двух вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей возникает добавочное угловое ускорение (см., например, Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Изд-е 14-е, 2004 г., стр. 176):

$$\bar{\varepsilon}_e = \bar{\varepsilon}_{12} = \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 . \qquad (27)$$

Так как угловые скорости постоянны, то

$$\frac{d\bar{\omega}_1}{dt} = 0 \ , \ \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} = 0 .$$

Таким образом, из (27):

$$\bar{\varepsilon}_e = \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 . \qquad (28)$$

Вращательная компонента переносного ускорения:

$$\bar{a}_e^{вр} = \bar{\varepsilon}_{12} \times \bar{r} . \qquad (29)$$

$$a_e^{вр} = R\varepsilon_{12} = R\omega_1\omega_2 . \qquad (30)$$

Относительное ускорение получаем так же как и для 2-го относительного движения в 1-м способе:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n . \qquad (31)$$

$$a_r = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(R\omega_3)^2}{R} = R\omega_3^2 . \qquad (32)$$

Ускорение Кориолиса:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_r + 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_r . \qquad (33)$$

$$a_c = 2\omega_2 v_r = 2R\omega_2\omega_3 . \qquad (34)$$

Итак, (22) имеет вид:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^{вр} + \bar{a}_e^{oc} + \bar{a}_r^n + \bar{a}_c . \qquad (35)$$

Проецируем (35) на оси координат, учитывая (29), (30), (27), (31), (32), (33), (34), (28):

$$a_{M,x} = -a_e^{вр} + \left(\bar{a}_e^{oc}\right)_x = -R\omega_1\omega_2 - R\omega_1\omega_2 = -2R\omega_1\omega_2 .$$

$$a_{M,y} = a_r^n - a_c = R\omega_3^2 - 2R\omega_2\omega_3 .$$

$$a_{M,z} = \left(\bar{a}_e^{oc}\right)_z = R\omega_2^2 .$$

Эти проекции совпадают с (18)-(20). Далее получаем ответ (21).

3 способ. Аналитический метод в данной задачи нерационален. Получаются весьма громоздкие выражения, аналитически дифференцировать которые весьма затруднительно. Тем не менее, его можно использовать в качестве проверки первых двух способов, проводя в конце численное дифференцирование на компьютере. Для различных значений угловых скоростей при этом получаются ответы, совпадающие с ответами из аналитических решений.

Вкратце приведем основные соотношения. Обозначим для произвольного момента времени: $d = BM$, $r = AM$, $\alpha = \angle BAM$, $\beta = \angle ABM$; y_1 – подвижная ось, связанная с пластиной *1*, в начальный момент совпадающая с y. Тогда

$$\beta = \frac{\varphi_3}{2}.$$

$$\frac{d}{2} = R\sin\beta.$$

$$r = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta}.$$

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}.$$

$$\sin\alpha = \frac{d}{r}\sin\beta.$$

$$y_1 = r\sin(\varphi_2 + \alpha) = r(\sin\varphi_2\cos\alpha + \cos\varphi_2\sin\alpha).$$

$$z = OA - r\cos(\varphi_2 + \alpha).$$

С учетом этого координаты точки *M*:

$$x = -y_1\sin\varphi_1.$$

$$y = y_1\cos\varphi_1.$$

$$z = z_A - r(\cos\varphi_2\cos\alpha - \sin\varphi_2\sin\alpha).$$

Ответ. 1). В точке *C*, $v_C = R\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}$.

2). $a_M = R\sqrt{4\omega_1^2\omega_2^2 + \left(\omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3\right)^2 + \omega_2^4}$.

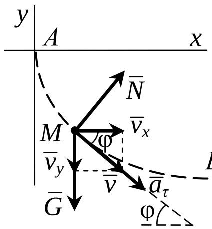

Рис. 10

Решение задачи Д1.

1). Скорость точки M (рис. 10):

$$v = \dot{s} = \frac{g}{k}\sin kt\,. \qquad (1)$$

Так как $\dot{s}(0) = 0$, точка M вначале была в покое.

По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_G\,.$$

$$\frac{mv^2}{2} = mg|y|\,.$$

$$|y| = \frac{v^2}{2g}\,. \qquad (2)$$

Из (1), (2) при $t = \dfrac{\pi}{6k}$:

$$v = \frac{g}{k}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{g}{2k}\,.$$

$$|y| = \left(\frac{g}{2k}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = \frac{g}{8k^2}\,.$$

Так как при этом $y < 0$, то:

$$y = -\frac{g}{8k^2}\,.$$

2). Дифференциальное уравнение движения точки M в проекции на касательную ось τ:

$$ma_\tau = mg\sin\varphi\,. \qquad (3)$$

Здесь тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{g}{k^2}\left(k^2\cos kt\right) = g\cos kt\,. \qquad (4)$$

Учитываем (4) в (3):

$$\cos kt = \sin\varphi\,. \qquad (5)$$

В течение всего движения от положения A до B угол φ монотонно убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0. При этом, как следует из (3), a_τ монотонно убывает от значения g до 0. Тогда из (4): $\cos kt$ убывает от 1 до 0. Поэтому в (5) оба аргумента тригонометрических функций находятся в 1-й четверти и выполняется:

$$\cos\varphi = \sin kt\,. \tag{6}$$

Для скорости точки M:

$$\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y\,.$$

$$v_x = v\cos\varphi\,.$$

С учетом $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{ds}{dt}$:

$$dx = ds\cos\varphi\,.$$

Учитывая (6):

$$dx = \sin kt\,ds\,. \tag{7}$$

Используя закон движения точки M вдоль траектории $s(t)$:

$$ds = \dot{s}\,dt = \frac{g}{k^2}k\sin kt\,dt = \frac{g}{k}\sin kt\,dt\,. \tag{8}$$

Подставляем (8) в (7) и затем интегрируем:

$$dx = \frac{g}{k}\sin^2 kt\,dt = \frac{g}{k}\left(\frac{1-\cos 2kt}{2}\right)dt\,.$$

$$\int_0^x dx = \frac{g}{2k}\int_0^t (1-\cos 2kt)dt\,.$$

$$x = \frac{g}{2k}\left(t - \frac{\sin 2kt}{2k}\right)\Bigg|_0^t\,.$$

$$x = \frac{g}{2k}\left(t - \frac{\sin 2kt}{2k}\right). \tag{9}$$

Для положения B: $\varphi = 0$. Тогда из (5): $\cos kt = 0$, $kt = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, M оказывается в нижнем положении в момент времени:

$$t_1 = \frac{\pi}{2k}. \qquad (10)$$

Тогда из (9):

$$x(t_1) = \frac{g}{2k}\left(\frac{\pi}{2k} - \frac{1}{2k}\sin\left(2k\cdot\pi/2k\right)\right) = \frac{\pi g}{4k^2}.$$

Замечание 1. Для определения момента t_1 возможно другое рассуждение. С учетом $dy < 0$, (5), (8):

$$dy = -ds\sin\varphi.$$

$$dy = -\frac{g}{k}\sin kt\,dt\cdot\cos kt = -\frac{g}{2k}\sin 2kt\,dt. \qquad (11)$$

Для точки B: $v_y = 0$, то есть $\frac{dy}{dt} = 0$. Тогда

$$-\frac{g}{2k}\sin 2kt = 0.$$

Отсюда $t = 0$ или $2kt = \pi$. Из второго равенства получаем (10).

Замечание 2. Интегрируя (11), можно дополнительно установить:

$$y = \frac{g}{4k^2}\left(\cos 2kt - 1\right).$$

$$y_1 = -\frac{g}{2k^2}.$$

При этом $s(t_1) = \frac{g}{k^2}$. Можно проверить, что $s(t_1) > \sqrt{\left(x(t_1)\right)^2 + \left(y(t_1)\right)^2}$, как и должно быть.

Ответ. 1). $y = -\frac{g}{8k^2}$. 2). $x_B = \frac{\pi g}{4k^2}$.

Решение задачи Д2.

Момент сил сопротивления: $M_{сопр} = \mu\omega^2$. Дифференциальное уравнение вращения ротора:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = -\mu\omega^2 . \qquad (1)$$

Разделяем переменные ω и t и интегрируем:

$$-\frac{J_z}{\mu}\int \frac{d\omega}{\omega^2} = \int dt .$$

$$\frac{J_z}{\mu} \cdot \frac{1}{\omega} = t + C .$$

При $t = 0$: $\frac{J_z}{\mu} \cdot \frac{1}{\omega_0} = C$. После подстановки значения C получаем:

$$t = \frac{J_z}{\mu} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{\omega\omega_0} . \qquad (2)$$

В некоторый момент времени t_1: $\omega_1 = \omega_0 / k$. Из (2):

$$t_1 = (k-1)\frac{J_z}{\mu\omega_0} . \qquad (3)$$

В момент $t_2 = 2t_1$: $\omega_2 = \omega_0 / k_2$. Из (2):

$$2t_1 = (k_2 - 1)\frac{J_z}{\mu\omega_0} . \qquad (4)$$

Делим (4) на (3): $2 = \frac{k_2 - 1}{k - 1}$, откуда $k_2 = 2k - 1$,

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2k-1} .$$

Замечание. Теорема об изменении кинетической энергии системы напрямую не дает решения задачи, так как в её записи, во-первых, не фигурирует время, а, во-вторых, заранее невозможно вычислить работу момента сил сопротивления (интеграл $\int \omega^2 d\varphi$ нельзя вычислить, не зная зависимости $\omega = \omega(\varphi)$).

Однако, если эту теорему продифференцировать по времени и сократить $\dot{\varphi}$, то придем к ДУ вращательного движения (1).

Ответ. $\omega_2 = \frac{\omega_0}{2k-1}$.

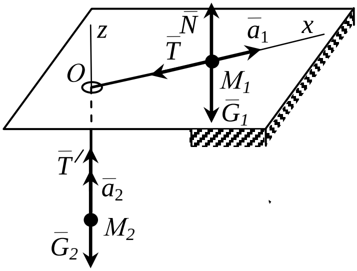

Рис. 11

Решение задачи Д3.

1). Обозначим через T силу натяжения нити (рис. 11). Дифференциальные уравнения движения точек M_1 и M_2 в проекциях на координатные оси, вдоль которых они движутся:

$$m_1 a_{1x} = -T \,. \tag{1}$$

$$m_2 a_{2z} = T' - m_2 g \,. \tag{2}$$

Так как нить нерастяжима, то $a_{1x} = a_{2z}$. Так как трением пренебрегаем, то $T = T'$. Тогда, исключив T из (1), (2), получим:

$$a_{1x} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} g \,. \tag{3}$$

Так как $a_{1x} < 0$, то v_{1x} будет убывать со временем. Поэтому искомый момент времени t_1 реализуется при $v_{1x} = -v_0$. Учитываем $a_{1x} = \dfrac{dv_{1x}}{dt}$ в (3) и интегрируем на всем промежутке движения:

$$\int_{v_0}^{-v_0} dv_{1x} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} g \int_0^{t_1} dt \,.$$

$$-2v_0 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} g t_1 \,.$$

$$t_1 = \frac{2(m_1 + m_2)v_0}{m_2 g} \,.$$

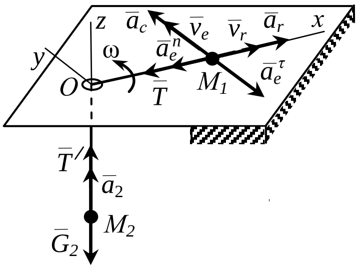

Рис. 12

2). Так как для сил, действующих на точку M_1, очевидно, все время выполняется $\sum_k M_{Oz}(\bar{F}_k^e)=0$, то момент количества её движения $k_z = const$ (рис. 12). Отсюда

$$m_1 v_0 \cdot h_0 = m_1 v \cdot h .$$

$$v = \frac{v_0 h_0}{h},$$

где $h = OM_1$ в произвольный момент. С учетом $v = h\omega$ получим:

$$\omega = \frac{v_0 h_0}{h^2} . \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение движения точки M_2 имеет вид (2), откуда:

$$T = m_2 a_{2z} + m_2 g . \tag{5}$$

Движение точки M_1 рассмотрим как сложное: относительное движение свяжем с движением M_1 вдоль оси *Ox*, а переносное движение – с вращением M_1 вместе с подвижной осью *Ox* вокруг *Oz*.

При абсолютном движении M_1:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_e + \bar{v}_r .$$

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_r + \bar{a}_c .$$

Дифференциальное уравнение движения точки M_1 вдоль *Ox*:

$$m_1\left(a_{rx} - a_e^n\right) = -T . \tag{6}$$

Здесь нормальная компонента переносного ускорения:

$$a_e^n = h\omega^2 = h \cdot \frac{v_0^2 h_0^2}{h^4} = \frac{v_0^2 h_0^2}{h^3} . \tag{7}$$

Учтем (5), (7) в (6):

$$m_1\left(a_{rx} - \frac{v_0^2 h_0^2}{h^3}\right) = -m_2 a_2 - m_2 g .$$

Так как $a_{rx} = a_{2z}$, то

$$\left(m_1 + m_2\right) a_r = \frac{m_1 v_0^2 h_0^2}{h^3} - m_2 g \ .$$

Далее интегрируем это ДУ:

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dh} \ .$$

$$\left(m_1 + m_2\right) \int_0^{v_r} v_r dv_r = \int_{h_0}^{h} \left(\frac{m_1 v_0^2 h_0^2}{h^3} - m_2 g \right) dh \ .$$

$$\left(m_1 + m_2\right) \frac{v_r^2}{2} = m_1 v_0^2 h_0^2 \left(-\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2h_0^2} \right) - m_2 g \left(h - h_0\right). \qquad (8)$$

Условие перпендикулярности $\bar{v}_1$ участку OM_1 означает, что в этот момент: $v_r = 0$. При этом из (8):

$$-\frac{m_1 v_0^2 \left(h_0^2 - h^2\right)}{2h^2} = m_2 g \left(h - h_0\right).$$

Тривиальный случай, когда это выполняется, соответствует $h = h_0$, что реализуется, в частности, в начальный момент времени. При $h \neq h_0$, с учетом $h^2 - h_0^2 = \left(h - h_0\right)\left(h + h_0\right)$, получим:

$$\frac{m_1 v_0^2 \left(h + h_0\right)}{2h^2} = m_2 g \ .$$

$$\frac{m_1 v_0^2}{2 m_2 g} \left(h + h_0\right) = h^2 \ .$$

Получаем квадратное уравнение относительно *h*:

$$\frac{k}{2} h^2 - h - h_0 = 0 \ , \qquad (9)$$

где для удобства ввели обозначение для коэффициента:

$$\frac{2 m_2 g}{m_1 v_0^2} = \frac{k}{2} \ .$$

Решаем квадратное уравнение (9):

$$D=\sqrt{1+4(k/2)h_0}\ .$$

С учетом $h\ge 0$ получим один ответ:

$$h=\frac{1+\sqrt{1+2kh_0}}{k}\ .$$

где

$$k=\frac{4m_2 g}{m_1 v_0^2}\ .$$

Замечание 1.

Получить (4) можно было, интегрируя ДУ движения M_1 в проекции на подвижную ось *Oy*:

$$m\left(a_c+a_{e,y}^{\tau}\right)=0\ .$$

$$2\omega\frac{dh}{dt}=-\frac{d\omega}{dt}h\,.$$

$$-2\int_{h_0}^{h}\frac{dh}{h}=\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega}\ .$$

$$-2\ln\frac{h}{h_0}=\ln\frac{\omega}{\omega_0}\ .$$

$$\frac{h_0^2}{h^2}=\frac{\omega}{\omega_0}\ .$$

$$\omega=\frac{v_0 h_0}{h^2}\ .$$

Замечание 2. Можно было не интегрировать ДУ движения, а сразу записать теорему об изменении кинетической энергии для системы из двух материальных точек. Получим соотношение (8). Требование задачи выполняется при учете $v_2=v_{1r}=0$.

Замечание 3. Интересно отметить, что задача имеет решение при любом ненулевом значении отношения m_2/m_1. В том числе и в случаях, когда отношение этих масс очень велико («пушинка» M_1 не позволяет «гире» M_2 безвозвратно упасть вниз) или очень мало («пушинка» M_2 не позволяет «гире» M_1 безвозвратно уйти по плоскости от точки *O*). Такой результат объясняется тем, что в данной постановке задачи не учитывалось трение. Это позволяет, в частности, «пушинке» M_1 при малых *h* вращаться вокруг оси *Oz* с очень высокой угловой скоростью, создавая значение центробежной силы инерции, необходимое для удержания «гири» M_2.

Ответ. 1). $t_1 = \dfrac{2(m_1+m_2)v_0}{m_2 g}$. 2). $h = \dfrac{1+\sqrt{1+2kh_0}}{k}$, где $k = \dfrac{4m_2 g}{m_1 v_0^2}$.

Решение задачи Д4.

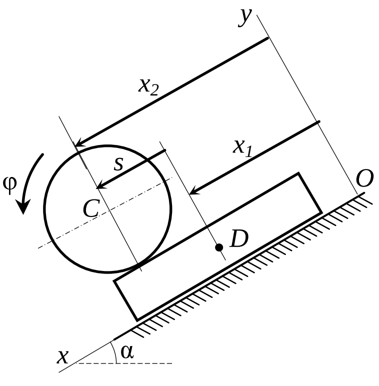

Рис. 13

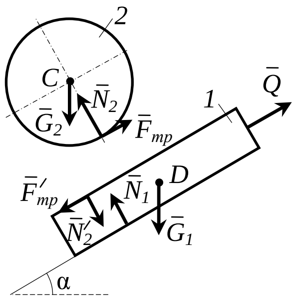

Рис. 14

Введем неподвижную систему координат *Oxy* (рис. 13). Введем обозначения: x_1 – координата центра тяжести *D* платформы *1*, x_2 – координата центра тяжести *C* диска *2*, *s* – перемещение *C* относительно *D* вдоль *x*, φ – угол поворота диска *2*. Тогда

$$x_2 = x_1 + s. \tag{1}$$

Укажем силы, действующие на каждое из тел *1* и *2* (рис. 14).

В предположении, что платформа совершает поступательное движение вдоль плоскости (условие её опрокидывания рассматривается отдельно во второй части решения), запишем ДУ её движения:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_{mp} + G_1 \sin\alpha - Q\,. \tag{2}$$

При этом ДУ плоскопараллельного движения диска:

$$m_2\ddot{x}_2 = -F_{mp} + G_2 \sin\alpha\,. \tag{3}$$

$$0 = N_2 - G_2 \cos\alpha\,. \tag{4}$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = F_{mp}\cdot R\,. \tag{5}$$

Выражаем из (3):

$$F_{mp} = G_2 \sin\alpha - m_2\ddot{x}_2\,. \tag{6}$$

Из (2):

$$F_{mp} = m_1\ddot{x}_1 - G_1 \sin\alpha + Q\,. \tag{7}$$

Приравнивая (6) и (7), с учетом (1) получаем:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{s} = (m_1 + m_2)g \sin\alpha - Q\,. \tag{8}$$

Далее рассматриваем два случая в зависимости от того, не проскальзывает или проскальзывает диск относительно платформы.

а). Условия непроскальзывания: $F_{mp} \le fN_2$, $\ddot{s} = R\ddot{\varphi}$.

Тогда выразим из (5):

$$F_{mp} = \frac{1}{2}m_2R\cdot\frac{\ddot{s}}{R} = \frac{1}{2}m_2\ddot{s}\,. \tag{9}$$

Учтем это в (7):

$$\frac{1}{2}m_2\ddot{s} = m_1\ddot{x}_1 - G_1 \sin\alpha + Q\,.$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2}{2m_1}\ddot{s} + g\sin\alpha - \frac{Q}{m_1}\,. \tag{10}$$

Подставим (10) в (8):

$$(m_1 + m_2)\left(\frac{m_2}{2m_1}\ddot{s} + g\sin\alpha - \frac{Q}{m_1}\right) + m_2\ddot{s} = (m_1 + m_2)g\sin\alpha - Q\,.$$

$$\left((m_1 + m_2)m_2 + 2m_1m_2\right)\ddot{s} = 2m_2Q\,.$$

$$\ddot{s} = \frac{2Q}{3m_1 + m_2}. \quad (11)$$

Выясним условие, которому должно удовлетворять значение Q для непроскальзывания. Для этого учтем (11) в (9):

$$F_{mp} = \frac{m_2}{3m_1 + m_2} Q \leq fN_2. \quad (12)$$

Из (4):

$$N_2 = m_2 g \cos\alpha.$$

Тогда из (12):

$$Q \leq f\left(3m_1 + m_2\right) g \cos\alpha. \quad (13)$$

ДУ (11) имеет вид $\ddot{s} = a$, где a – константа. Поэтому при нулевых начальных условиях: $s = at^2/2$. Так как $a > 0$, то в процессе движения $s > 0$. В искомый момент времени, когда диск переместится до левого края платформы: $s = l$. Тогда из (11):

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{\left(3m_1 + m_2\right) l}{Q}}. \quad (14)$$

б). Условия проскальзывания: $F_{mp} = fN_2$, $\ddot{s} > R\ddot{\varphi}$.

Тогда из (7) с учетом (4):

$$fm_2 g \cos\alpha = m_1 \ddot{x}_1 - G_1 \sin\alpha + Q.$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{fm_2 \cos\alpha}{m_1} g + g \sin\alpha - \frac{Q}{m_1}. \quad (15)$$

Учтем (15) в (8):

$$\left(m_1 + m_2\right)\left(\frac{fm_2 \cos\alpha}{m_1} g + g \sin\alpha - \frac{Q}{m_1}\right) + m_2 \ddot{s} = \left(m_1 + m_2\right) g \sin\alpha - Q.$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{m_1}\left(Q - f\,(m_1 + m_2)\, g \cos\alpha\right). \quad (16)$$

Случай проскальзывания реализуется при невыполнении (13), если:

$$Q > f\left(3m_1 + m_2\right) g \cos\alpha. \quad (17)$$

Поэтому видно, что в (16) $\ddot{s} > 0$. Аналогично тому, как было получено (14), найдем из (16):

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m_1 l}{Q - f(m_1+m_2)g\cos\alpha}}\,. \tag{18}$$

Итак, ответом на первый вопрос задачи будет (14) при условии (13) и (18) при условии (17).

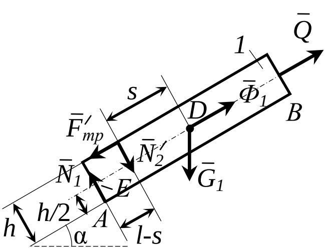

Рис. 15

Рассматриваемое перемещение не сможет реализоваться, если платформа в какой-то момент движения начнет опрокидываться, то есть поворачиваться относительно одной из своих нижних угловых точек.

При опрокидывании относительно угловой точки A сила реакции $\overline{N}_1$ приложена к этой точке (рис. 15).

Введем силу инерции $\overline{\Phi}_1 = -m_1\overline{a}_1$. Запишем следствие из принципа Даламбера для платформы. При этом в качестве моментной точки удобнее всего выбрать неподвижную точку E, положение которой в данный момент времени совпадает с точкой пересечения линии действия силы $\overline{\Phi}_1$ с левой боковой стороной платформы. (В качестве моментной точки удобно также выбрать подвижный центр масс D.) Опрокидывание при некотором s, $0 \le s \le l$, будет, если

$$\sum_k M_E\left(\overline{F_k}\right) + M_E\left(\overline{\Phi}_1\right) > 0\,.$$

С учетом упрощений $M_E\left(\overline{N}_1\right) = M_E\left(\overline{\Phi}_1\right) = M_E\left(\overline{Q}\right) = 0$, получим:

$$F_{тр}\frac{h}{2} - N_2(l-s) - G_1\cos\alpha\cdot l > 0\,. \tag{19}$$

Выражение в левой части (19) максимально при $-N_2(l-s) = 0$, то есть при $s = l$. Достаточно рассмотреть этот крайний случай (если при этом (19) не будет выполняться, то при меньших значениях s тем более не будет):

$$F_{mp}\frac{h}{2}-G_1\cos\alpha\cdot l>0\,. \tag{20}$$

Вновь рассмотрим два случая.

а). Если нет проскальзывания, то учитывая выражения (9) и (11) в (20), получим:

$$\frac{m_2}{2}\cdot\frac{2Q}{3m_1+m_2}\cdot\frac{h}{2}>m_1 gl\cos\alpha\cdot l\,.$$

$$h>\frac{2m_1(3m_1+m_2)gl\cos\alpha}{m_2 Q}\,.$$

Напротив, опрокидывания не будет при

$$h\le\frac{2m_1(3m_1+m_2)gl\cos\alpha}{m_2 Q}\,. \tag{21}$$

б). При проскальзывании учтем $F_{mp}=fm_2 g\cos\alpha$ в (20):

$$fm_2 g\cos\alpha\cdot\frac{h}{2}-G_1\cos\alpha\cdot l>0$$

$$h>\frac{2m_1 l}{fm_2}\,.$$

Напротив, опрокидывания не будет при

$$h\le\frac{2m_1 l}{fm_2}\,. \tag{22}$$

Очевидно из физических соображений, что опрокидывание не произойдет вокруг другой нижней угловой точки *B* платформы. Условие такого опрокидывания было бы:

$$\sum_k M_D\left(\overline{F_k}\right)+M_D\left(\overline{\Phi_1}\right)<0\,, \tag{23}$$

где сила реакции $\overline{N}_1$ приложена к *B*. Однако моменты всех сил в левой части (23) положительны. Значит, опрокидывания вокруг *B* быть не может.

Замечание. Можно проверить, что при подстановке крайнего для обоих случаев *а* и *б* значения $Q=f(3m_1+m_2)g\cos\alpha$ в оба выражения для t_1 и для h соответствующие ответы совпадают.

Ответ. При $0 < Q \le f\left(3m_1 + m_2\right)g\cos\alpha$ $\quad t_1 = \sqrt{\dfrac{\left(3m_1 + m_2\right)l}{Q}}$,

при условии $h \le \dfrac{2m_1\left(3m_1 + m_2\right)gl\cos\alpha}{m_2 Q}$.

При $Q > f\left(3m_1 + m_2\right)g\cos\alpha$ $\quad t_1 = \sqrt{\dfrac{2m_1 l}{Q - f\left(m_1 + m_2\right)g\cos\alpha}}$,

при условии $h \le \dfrac{2m_1 l}{f\, m_2}$.