Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«Казанский государственный энергетический университет»

Лившиц С.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для подготовки к курсовому проекту по дисциплине

«Методы принятия оптимальных решений»

Казань 2024

УДК
ББК
М34

М34 Математические методы в экономике: Методические указания для подготовки к курсовой работе/проекту по дисциплине «Методы принятия оптимальных решений», авторы: С.А. Лившиц, / Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2023, -38.

Представлены методические указания для выполнения практических занятий по дисциплине «Методы принятия оптимальных решений».

УДК
ББК

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам при решении задач в курсовой работе/проекте по дисциплине «Методы принятия оптимальных решений».

Дисциплина «Методы принятия оптимальных решений» является одной из основных при подготовке дипломированных специалистов – экономистов. Студенты, изучившие данную дисциплину, должны ориентироваться в основных, применяемых в настоящее время, моделях, используемых для анализа, и активно использовать полученные знания для решения научных и практических задач.

В данном пособии мы рассмотрим наиболее простые и хорошо алгоритмизируемые разделы экономико-математического моделирования, такие как линейное программирование и модели оптимизации производственных планов.

Раздел 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Во многих ситуациях, встречающихся в промышленности, сельском хозяйстве, экономической деятельности и т.д., задача оптимизации плана некоторых экономико-производственных действий может быть записана в виде линейных уравнений и неравенств с линейным же, относительно искомых, определяющих этот план, переменных целевой функцией. К задачам этого же вида сводятся очень многие задачи оптимизации и принятия решений из некоторых других самостоятельных направлений прикладной математики.

Соответственно возникает потребность в математической теории, позволяющей решать такие задачи. Такая теория существует и называется *линейным программированием*. Данное название возникло в 30-е годы, когда представления о программировании на компьютере ещё не существовало. Под программированием фактически подразумевается планирование. Однако, этот термин уже укоренился, и не только в линейном случае. Имеются так же и такие названия математических теорий решения задач оптимизации, как *нелинейное программирование* и *динамическое программирование.*

В общем виде задача линейного программирования (ЛП) заключается в отыскании таких неотрицательных чисел x_1, x_2..., x_n которые максимизируют (минимизируют) линейную функцию:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при условии выполнения системы неравенств**:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge, =) b_1 \,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge, =) b_2 \,, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge, =) b_m \,, \\ x_1, x_2, \ldots x_k \ge 0 \qquad (\mathrm{k} \le \mathrm{n}). \end{cases}$$

При описании реальной ситуации с помощью линейной модели следует проверять наличие у модели таких свойств, как пропорциональность и аддитивность. **Пропорциональность** означает, что вклад каждой переменной в целевую функцию (ЦФ) и общий объем потребления соответствующих ресурсов должен быть ***прямо пропорционален*** величине этой переменной. Например, если продавая какой либо товар в общем случае по одной цене рублей, фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки, то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной. Т.е. в разных ситуациях *одна* единица товара будет приносить *разный* доход. **Аддитивность** означает, что ЦФ и ограничения должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных. Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых одной фирмой, влияет на объем реализации другого.

При решении задачи линейного программирования целесообразно бывает введение следующих определений.

Допустимое решение – это совокупность чисел (план) $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям исходной задачи.

Оптимальное решение – это план, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических соотношений, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения ***экономики***, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1) Что является ***искомыми величинами*** задачи?

2) Какой ***параметр*** задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения? (это может быть: прибыль, время, количество отходов и т.д.)

3) В каком ***направлении*** должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?

4) Какие ***условия*** в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в ***математическом*** виде, т.е. к записи математической модели.

а) Искомые величины являются ***переменными*** задачи, которые как правило обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $X=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$.

б) Цель решения записывается в виде ***целевой функции***, обозначаемой, например, $L\left(X\right)$. Математическая формула ЦФ $L\left(X\right)$ отражает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.

в) Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ***ограничений***. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе записи математической модели целесообразно указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений.

Задача

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Известны расходы ингредиентов А и В на 1 т соответствующих красок и максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов на складе. Данные по расходам ингредиентов на краски первого и второго вида представлены в таблице.

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1	2	6
В	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. руб. для краски 1-го вида; 2 тыс. руб. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение

В задаче требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные объемы производства* каждого вида красок:

x_1 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т краски/сутки];

x_2 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т краски/сутки].

В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр *суточного дохода*, который должен стремиться к *максимуму*. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи красок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, т.е. x_1 и x_2 т краски в сутки, а также оптовые цены на краски 1-го и 2-го видов – согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс. руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски 1-го вида равен $3x_1$ тыс. руб. в сутки, а от продажи краски 2-го вида – $2x_2$ тыс. руб. в сутки. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи красок 1-го и 2-го видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок)

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \text{ [тыс. руб./сутки]},$$

$$\left[\frac{\text{тыс.руб.}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}} = \frac{\text{тыс.руб.}}{\text{сутки}}\right].$$

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество ингредиентов А и В, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;
- согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более, чем на 1 т краски;
- объем производства краски 2-го вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;
- объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на 3 группы, обусловленные:

1) расходом ингредиентов;
2) рыночным спросом на краску;
3) неотрицательностью объемов производства.

Ограничения **по расходу** любого из ингредиентов имеют следующую ***содержательную*** форму записи:

$$\begin{pmatrix}\text{Расход конкретного ингредиента}\\ \text{на производство обоих видов краски}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Максимально возможный}\\ \text{запас данного ингредиента}\end{pmatrix}.$$

Запишем эти ограничения в ***математической*** форме.

Левая часть ограничения – это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента А на производство 1 т краски 1-го вида (1 т ингр. А) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. А). Тогда на производство x_1 т краски 1-го вида и x_2 т краски 2-го вида потребуется $1x_1 + 2x_2$ т ингр. А.

Правая часть ограничения – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т ингредиента А в сутки. Таким образом, ограничение по расходу А имеет вид

$$1x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \left[\frac{\text{т ингр.А}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.А}}{\text{сутки}}\right].$$

Аналогична математическая запись ограничения по расходу В

$$2x_1 + 1x_2 \le 8 \quad \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{т краски}} \cdot \frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т ингр.В}}{\text{сутки}}\right].$$

Примечание. Следует всегда проверять размерность левой и правой частей каждого из ограничений, поскольку их несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет

содержательную форму

$$\begin{pmatrix}\text{Превышение объема производства краски 2 - го вида}\\ \text{над объемом производства краски 1 - го вида}\end{pmatrix} \le \left(1\,\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_2 - x_1 \le 1 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Ограничение по суточному **объему производства** краски 1-го вида имеет

содержательную форму

$$\left(\text{Спрос на краску 1 - го вида}\right) \le \left(2\,\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right)$$

и ***математическую*** форму

$$x_1 \le 2 \quad \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right] \le \left[\frac{\text{т краски}}{\text{сутки}}\right].$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$\begin{matrix} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0 \end{matrix}.$$

Таким образом, ***математическая модель*** этой задачи имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \ \left[\text{руб./сутки}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \ \left[\text{т ингр. А/сутки}\right], \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \ \left[\text{т ингр. В/сутки}\right], \\ -x_1 + x_2 \le 1 \ \left[\text{т краски/сутки}\right], \\ \qquad x_2 \le 2 \ \left[\text{т краски/сутки}\right], \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \left[\text{т краски/сутки}\right]. \end{cases}$$

Для задач линейного программирования, содержащих только две переменные x_1 и x_2 применим графический способ решения. Этот способ основан на том факте, что в случае двух переменных множество допустимых решений можно построить на двухмерной плоскости.

1.1. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач ЛП с двумя переменными. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи. Каждое из неравенств задачи ЛП определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость, а система неравенств в целом – пересечение соответствующих полуплоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется **областью допустимых решений** (ОДР). ОДР всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок АВ принадлежит ей. ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучем, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи ОДР является пустым множеством.

Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР т.е. ЦФ $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает свое max(min) значение на границе области, точнее в ее угловых точках.

При поиске оптимального решения задач ЛП возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи; существует бесконечное множество решений (**альтернативный оптиум**); ЦФ не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

Методика решения задач ЛП графическим методом

I. В ограничениях задачи замените знаки неравенств на знаки точных равенств и постройте соответствующие прямые.

II. Найдите и заштрихуйте полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи. Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0;0)], и проверьте истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное, ***то*** надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку; ***иначе*** (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси Ox_1 и правее оси Ox_2 , т.е. в I-м квадранте. Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому выделите на графике такие прямые.

III. Определите ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделите ее. При отсутствии ОДР задача ***не имеет решений***, о чем сделайте соответствующий вывод.

IV. Если ОДР – не пустое множество, то определите координаты угловых точек. Определение координат сводится к решению системы соответствующих линейных уравнений.

V. Подставьте координаты угловых точек в уравнение для ЦФ и найдите max (min) значение целевой функции.

Можно вместо перебора всех угловых точек (**пункт IV, V*)*** произвести следующие действия:

IV.a Провести вектор, координатами которого служат коэффициенты в уравнении с целевой функцией. Сдвигать прямую перпендикулярную построенному вектору от начала по направлению вектора до момента, когда пересечение сдвигаемой прямой с ОДР будет составлять одну точку.

V.a Координаты найденной точки будут являться оптимальным планом, а если их подставить в уравнение целевой функции, то получим ее max (min) значение.

Задача

Найдем оптимальное решение задачи о красках, математическая модель которой имеет вид:

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ \quad x_2 \le 2 & (4) \end{cases}$$

Построим прямые ограничений (рис. 1).

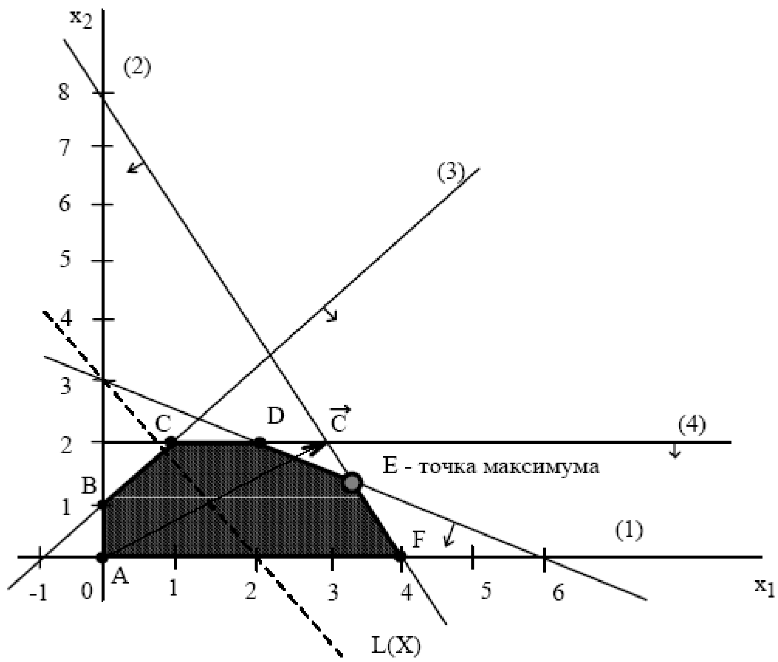


Рис. 1. Графическое решение задачи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 & (5) \\ 2x_1 + x_2 = 8 & (6) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (7) \\ \quad x_2 = 2 & (8) \end{cases}$$

Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 1). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDEF.

Найдем координаты точек пересечения прямых ограничений, т.е. координаты угловых точек. В некоторых случаях хороший рисунок позволяет сразу определять координаты угловых точек.

$\mathrm{A}(0,0)$;

$\mathrm{B}(0,1)$;

$\mathrm{C}(1,2)$;

$\mathrm{D}(2,2)$;

Для определения координаты точки E решим систему уравнений с ограничениями (5) и (6).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Решая данную систему получаем: $x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

$E(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$

$F(4,0)$.

Найдем значение целевой функции в угловых точках, т.е. подставим их координаты в уравнение $L(X) = 3x_1 + 2x_2$.

$L(A) = L(0,0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

$L(B) = L(0,1) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

$L(C) = L(1,2) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

$L(D) = L(2,2) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$

$L(E) = L\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$

$L(F) = L(4{,}0) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$

E – это точка максимума ЦФ.

Таким образом, наилучшим режимом работы фирмы является ежесуточное производство краски 1-го вида в объеме 3 1/3 т и краски 2-го вида в объеме 1 1/3 т. Доход от продажи красок составит 12 2/3 тыс. руб. в сутки.

Решая графическим методом, предполагающим построение целевого вектора, проводим вектор, координатами которого служат коэффициенты в уравнении с целевой функцией $\{3{,}2\}$; сдвигая прямую, перпендикулярную построенному вектору (от начала к концу), найдем точку, являющуюся последней в пересечении сдвигаемой прямой с ОДР (это точка Е), ее координаты, найденные из решения системы соответствующих уравнений, будут являться оптимальным планом, а значение целевой функции в ней будет max.

В более общем случае разработан и широко применяется универсальный метод решения любой задачи ЛП, называемый симплекс-методом.

Симплекс – метод, как метод решения задач ЛП был предложен американским математиком-экономистом Данцигом в 1951 году.

Графически симплекс метод представляет из себя передвижение по выпуклому многограннику от вершины к вершине, при этом значение целевой функции на каждом шаге улучшается до тех пор, пока не достигается оптимум.

Идея симплекс – метода состоит в том, чтобы преобразовать уравнение содержащее целевую функцию к виду: $-Ax_i - Bx_j - Cx_k - \ldots = L - D$, т.к. в этом случае становиться возможным выразить $L = D - Ax_i - Bx_j - Cx_k - \ldots$, а в силу того что перед нами ставится задача максимизировать L, то эта задача достигается в случае, когда все переменные, присутствующие в данном уравнении, принимают нулевые значения (т.к. переменные не отрицательны по условию).

1.2. СИМПЛЕКС МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

Алгоритм решения задачи при помощи симплекс метода:

1. Вводятся переменные, позволяющие систему неравенств превратить в систему уравнений. (Ограничение-неравенство исходной задачи ЛП, имеющее вид «$\leq$», можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части некоторой новой неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида «$\geq$» в ограничение равенство вычитанием из его левой части неотрицательной переменной. Переменные, вводимые для преобразования ограничений-неравенств в ограничения – равенства называют *дополнительными.* Их число равно числу преобразуемых неравенств.)

2. Выбирается переменная (рабочая переменная) входящая в целевую функцию с max коэффициентом (Уничтожать переменные целесообразно, начиная с самой «неподходящей для итогового вида», таким образом, выбирается переменная, входящая в уравнение с целевой функцией, которую уничтожим в первую очередь).

3. Сравниваются частные от деления свободных членов на коэффициенты при этой переменной и выбирается строка с min > 0 частным от деления (рабочее уравнение). (Выбирается уравнение, в котором рабочая переменная имеет «наибольший вес» относительно других переменных).

4. Рабочее уравнение нормируется (т.е. делится на коэффициент перед рабочей переменной), из остальных строк исключаем рабочую переменную методом Гаусса. (Проведение данной операции обусловлено необходимостью исключить возможность проявления уже исключенной из уравнения с целевой функцией переменной в дальнейшем при последующих преобразованиях.)

5. Проверяется, существуют ли положительные коэффициенты перед переменными в уравнении с целевой функцией: если да, то возвращаются к пункту 2, если нет, то решение закончено.

В качестве примера рассмотрим задачу решенную графическим методом, задачу про краски.

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ \qquad x_2 \le 2 \end{cases}$$

Решение

Введем свободные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, для того, чтобы систему неравенств превратить в систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_6 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = L \end{cases}$$

Выбираем переменную, входящую в целевую функцию с максимальным коэффициентом, это x_1. Сравниваем частные от деления свободных членов на коэффициенты при x_1 6; 4; -1; +∞. Выбираем строку с min > 0 частным от деления и нормируем ее, из остальных строк исключаем x_1 методом Гаусса.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 4 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_6 = 2 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = L - 12 \end{cases}$$

Выбираем переменную, входящую в целевую функцию с max коэффициентом, это x_2. Сравниваем частные от деления свободных членов на коэффициенты при x_2 4/3; 8; 10/3; 2. Выбираем строку с min > 0 частным от деления и нормируем ее, из остальных строк исключаем x_2 методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{4}{3} \\ x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{10}{3} \\ -x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + x_6 = \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 = L - \frac{38}{3} \end{cases}$$

Так как все коэффициенты перед переменными в уравнении с целевой функцией < 0, то решение законченно.

В силу не отрицательности переменных из уравнения, содержащего целевую функцию следует, что она достигает максимального значения, в случае, когда $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$, в этом случае $L = \frac{38}{3}$

Раздел 2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Задача о размещении (транспортная задача) – это распределительная задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи (ТЗ) является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям. Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходными параметрами при построении модели для решения транспортной задачи являются:

1) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

2) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i (i = 1, n) [ед. прод.].

3) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j (j =1, m) [ед. прод.].

4) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб. / ед. прод.].

Искомыми параметрами при построении модели для решения транспортной задачи являются:

1) x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. прод.].

2) $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Основными этапами построения модели для решения транспортной задачи являются:

I. Определение переменных. (Этот этап весьма формален, т.к. переменными как правило служат x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j).

II. Проверка сбалансированности задачи. (Задача называется сбалансированной, если сумма запасов продукции во всех пунктах отправления равна суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$. В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.: $b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления: $a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы $c^ф$, величина которых обычно приравнивается к нулю $c^ф = 0$. Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина $c^ф$ может быть любым положительным числом.

Иногда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов $c^з$. Запрещающие тарифы должны сделать невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна быть больше реальных тарифов в транспортной матрице

$$c^{з} > \max\left(c_{ij}\right)$$

III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				Запасы продукции, в пунктах отправления
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребности в продукции, в пунктах назначения	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Существующий алгоритм решения транспортных задач (**метод потенциалов**) предполагает, что ЦФ стремится к минимуму. Однако существуют ситуации, когда в рамках транспортной модели требуется максимизировать ЦФ, например, общий доход, объем продаж, прибыль, качество выполняемых работ и т.д. В этом случае в модель вместо искомой целевой функции $L(X)$ вводится ЦФ $L_1(X)$ = -$L(X)$, в которой тарифы умножаются на (-1). Таким образом, максимизация $L(X)$ будет соответствовать минимизации $L_1(X)$.

Решение транспортной задачи осуществляется при помощи метода потенциалов, который является итерационным методом. В качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов необходимо построение так называемого опорного плана, который является допустимым решением транспортной задачи.

Рассмотрим три основных метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. «Качество» опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее приближение.

Все рассматриваемые методы нахождения опорных планов отличаются только *способом выбора клетки* для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода.

Метод северо-западного угла

На каждом шаге метода северо-западного угла из всех не вычеркнутых клеток выбирается самая левая и верхняя (северо-западная) клетка. Другими словами, на каждом шаге выбирается первая из оставшихся не вычеркнутых строк и первый из оставшихся не вычеркнутых столбцов. Для того, чтобы заполнить клетку (i,j), необходимо сравнить текущий запас товара в рассматриваемой i-й строке $a_i^{\text{тек}}$ с текущей потребностью в рассматриваемом j-м столбце $b_j^{\text{тек}}$.

Если существующий запас позволяет перевезти всю потребность, то:

• в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение потребности $b_j^{\text{тек}}$;

• j-й столбец вычеркивается, поскольку его потребность уже исчерпана;

• от существующего запаса в i-й строке отнимается величина сделанной перевозки, прежний запас зачеркивается, а вместо него записывается остаток, т.е. ($a_i^{\text{тек}}$ - $b_j^{\text{тек}}$).

Если существующий запас не позволяет перевезти всю потребность, то:

• в клетку (i,j) в качестве перевозки вписывается значение запаса $a_i^{\text{тек}}$;

• i-я строка вычеркивается, поскольку ее запас уже исчерпан;

• от существующей потребности в j-ом столбце отнимается величина сделанной перевозки, прежняя потребность зачеркивается, а вместо нее записывается остаток, т.е. ($b_j^{\text{тек}}$ - $a_i^{\text{тек}}$)

Нахождение опорного плана продолжается до тех пор, пока не будут вычеркнуты все строки и столбцы.

Метод минимального элемента

На каждом шаге метода минимального элемента из всех не вычеркнутых клеток транспортной матрицы выбирается клетка с минимальной стоимостью перевозки min c_{ij}. Заполнение выбранной клетки производится по правилам, описанным выше.

Метод Фогеля

На каждом шаге метода Фогеля для каждой i-й строки вычисляются штрафы d_i как разность между двумя наименьшими тарифами строки. Таким же образом вычисляются штрафы d_j для каждого j-го столбца. После чего выбирается максимальный штраф из всех штрафов строк и столбцов. В строке или столбце, соответствующем выбранному штрафу, для заполнения выбирается не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом min c_{ij}.

Если существует несколько одинаковых по величине максимальных штрафов в матрице, то в соответствующих строках или столбцах выбирается одна не вычеркнутая клетка с минимальным тарифом min c_{ij}.

Если клеток с минимальным тарифом также несколько, то из них выбирается клетка (i,j) с максимальным суммарным штрафом, т.е. суммой штрафов по i-й строке и j-му столбцу.

Задача

Найти тремя методами опорный план транспортной задачи, в которой запасы на трех складах равны 210, 170, 65 ед. продукции, потребности четырех магазинов равны 110, 90, 130, 100 ед. продукции, тарифы перевозки в рублях за единицу продукции следующие:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

Проверка сбалансированности задачи показывает, что суммарный объем запасов $\sum_{i=1}^{n} a_i = 210 + 170 + 65 = 445$ больше суммарного объема потребностей $\sum_{j=1}^{m} b_j = 110 + 90 + 130 + 100 = 430$, т.е. введение необходимо введение фиктивного столбца $b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j = 445 - 430 = 15$, после чего задача становится сбалансированной $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

Результаты нахождения опорного плана различными методами представлены в следующих таблицах.

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом северо-западного угла.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Запасы продукции в пунктах отправления
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	110 / 5	90 / 8	10 / 1	2	0	210/100/10/0
A_2	2	5	120 / 4	50 / 9	0	170/50
A_3	9	2	3	50 / 2	15 / 0	65/15/0
Потребности в продукции, в пунктах назначения	110/0	90/0	130/120/0	100/50/0	15/0	445 = 445

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

$$L_{СЗУ} = 110 \cdot 5 + 90 \cdot 8 + 10 \cdot 1 + 120 \cdot 4 + 50 \cdot 9 + 50 \cdot 2 + 15 \cdot 0 = 2130.$$

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом минимального элемента.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Запасы продукции в пунктах отправления
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	8	130 / 1	80 / 2	0	210/80/0
A_2	110 / 2	25 / 5	4	20 / 9	15 / 0	170/60/35/15/0
A_3	9	65 / 2	3	2	0	65/0
Потребности в продукции, в пунктах назначения	110/0	90/25/0	130/0	100/20/0	15/0	445 = 445

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

$$L_{МЭ} = 130 \cdot 1 + 80 \cdot 2 + 110 \cdot 2 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 9 + 15 \cdot 0 + 65 \cdot 2 = 945.$$

Транспортная таблица с опорным планом, найденным методом Фогеля.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Запасы продукции в пунктах отправления	Штрафы строк						
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$								
A_1	5	8	110 1	100 2	0	210/110/0	1	1	1	**7**			
A_2	110 2	25 5	20 4	9	15 0	170/60/35/15/0	2	1	1	1	1	4	0
A_3	9	65 2	3	2	0	65/0	0	0					
Потребности в продукции, в пунктах назначения	110/0	90/25/0	130/20/0	100/0	15/0	445 = 445							
Штрафы столбцов	**3**	3	2	0	0								
		3	2	0	0								
		3	3	**7**	0								
		3	3		0								
		5	4		0								
			4		0								
					0								

Затраты на транспортировку при перемещении товара согласно полученному опорному плану равны:

$$L_Ф = 110 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 110 \cdot 2 + 25 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 0 + 65 \cdot 2 = 865.$$

Отметим, что хотя введенные фиктивные строки или столбцы и считаются равноправными, но в случае задания в них нулевых тарифов эти тарифы не считаются как минимальные при построении опорных планов.

Отметим, что опорный план, найденный методом северо-западного угла дает в общем случае наихудшее приближение, т.к. является «слепым», т.е. совершенно не зависит от тарифов.

Метод минимального элемента предполагает перевозки в первую очередь в те пункты назначения, доставка в которые обойдется дешевле. В силу этого в общем случае суммарные затраты на транспортировку при применении этого метода несколько меньше.

Метод Фогеля путем введения понятия штрафов выбирает для перевозок те маршруты, не выбрав которые мы могли бы увеличить расходы на транспорт в дальнейшем, из-за отсутствия выбора места назначения или места отправления.

Начав решать транспортную задачу и получив опорный план, необходимо приступить непосредственно к оптимизации этого плана. Данная оптимизация может быть проведена методом потенциалов.

Потенциал удобно воспринимать как себестоимость продукции.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом северо – западного элемента, минимального элемента или методом Фогеля).

3. Опорный план проверяется на условие «вырождения». Согласно теореме Данцига количество занятых клеток в плане не должно превышать суммарного числа строк и столбцов минус единицу $K_З \le m+n-1$ (Для дальнейшего решения необходимо добиться того, чтобы количество занятых клеток в плане в точности равнялось суммарному числу строк и столбцов минус единица $K_З = m+n-1$, этого можно добиться вводя при необходимости нулевые перевозки, т.е. заполняя некоторые клетки нулями), где $К_З$ – число занятых

клеток; n – число строк (пунктов отправления); m – число столбцов (пунктов назначения).

4. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному плану. Для этого одной из строк, или одному из столбцов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) присваивают произвольное значение «потенциал» (значение потенциала удобно брать больше, чем значение максимального тарифа) и через заполненные клетки, используя соотношение $u_i + c_{ij} = v_j$ (где u_i– потенциал строки, а v_j– потенциал столбца), строят систему потенциалов, т.е. получают потенциалы всех строк и столбцов. (Поясним, что предложенная для построения системы потенциалов формула $u_i + c_{ij} = v_j$ позволяет по известной себестоимости товара в пункте отправления путем прибавления к ней тарифа за транспортировку определить себестоимость товара в пункте назначения, и обратно, преобразовав формулу $v_j - c_{ij} = u_i$ по известной себестоимости товара в пункте назначения, становится возможным, вычтя тариф за транспортировку, определить себестоимость товара в пункте отправления. Еще раз отметим, что система потенциалов строится только через заполненные клетки.)

5. Проверяют условие оптимальности $u_i + c_{ij} \geq v_j$, это условие можно проверять только для свободных клеток таблицы, т.к. в заполненных оно всегда выполнено (Отметим, что невыполнение данного условия фактически означает возможность уменьшения себестоимости товара в пункте назначения, которое может быть достигнуто за счет перераспределения транспортных потоков).

6. Если условие оптимальности выполнено для всех клеток матрицы, то нами получен оптимальный план перевозок (т.к. уменьшения себестоимости товара в пунктах назначения за счет перераспределения транспортных потоков невозможно) и необходимо только найти значение целевой функции $L(X)$. Если

же для какой-либо клетки условие оптимальности нарушается, то необходимо применить «формальное правило улучшения плана» и вернуться к пункту 3.

Формальное правило улучшения плана:

а) начиная с клетки, имеющей нарушение, двигаясь только по горизонталям и вертикалям, строится замкнутый контур с вершинами в занятых клетках;

б) начиная с клетки, имеющей нарушение, нумеруются вершины контура (направление обхода контура значения не имеет);

в) в четных вершинах контура находится значение минимальной перевозки;

г) для балансировки матрицы в нечетные вершины контура найденное значение прибавляется, из четных вершин – вычитается. Получается новый, улучшенный план.

Задача

Найдем оптимальное решение транспортной задачи опорный план которой представлен следующей транспортной матрицей:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0
A_2	2	5	120 4	50 9	0
A_3	9	2	3	50 2	15 0

Решение

Проверяем условие Данцига: 7 = 5 + 3 – 1.

Строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0	100
A_2	2	5	120 4	50 9	0	97
A_3	9	2	3	50 2	15 0	104
Потенциалы	105	108	101	106	104	

Через заполненные клетки определяем потенциалы первого, второго, и третьего столбцов. Далее через клетку (A_2,B_3) *определяем потенциал второй строки, через клетку* (A_2,B_4) *определяем потенциал четвертого столбца. После чего через клетку* (A_3,B_4) *определяем потенциал третей строки и через клетку* (A_3,$B_ф$) *потенциал последнего столбца.*

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4, (A_1,$B_ф$), *где нарушение составляет* 4, (A_2,B_1), *где нарушение составляет* 6, (A_2,B_2), *где нарушение составляет* 6, (A_2,$B_ф$), *где нарушение составляет* 7 *и* (A_3,B_2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A_2,$B_ф$), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0	100
A_2	2	5	120 4	~~50~~ **35** 9	**15** 0	97
A_3	9	2	3	~~50~~ **65** 2	~~15~~ 0	104
потенциалы	105	108	101	106	104	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0
A_2	2	5	120 4	35 9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем первой строке потенциал, равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	110 5	90 8	10 1	2	0	100
A_2	2	5	120 4	35 9	15 0	97
A_3	9	2	3	65 2	0	104
Потенциалы	105	108	101	106	97	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4, (A_2,B_1), *где нарушение составляет* 6, (A_2,B_2), *где нарушение составляет* 6 *и* (A_3,B_2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшения плана для клетки (A_2,B_1), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	~~110~~ 5	90 8	~~10~~ **120** 1	2	0	100
A_2	**110** 2	5	**10** ~~120~~ 4	35 9	15 0	97
A_3	9	2	3	65 2	0	104
потенциалы	105	108	101	106	97	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	90 8	120 1	2	0
A_2	110 2	5	10 4	35 9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	90 8	120 1	2	0	103
A_2	110 2	5	10 4	35 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
Потенциалы	102	111	104	109	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4, (A_2,B_2), *где нарушение составляет* 6 *и* (A_3,B_2), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A_2,B_2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	5	② ~~90~~ **80** 8	③ ~~120~~ **130** 1	2	0	103
A_2	110 2	① **10** 5	④ ~~10~~ 4	35 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
потенциалы	102	111	104	109	100	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	80 8	130 1	2	0
A_2	110 2	10 5	4	35 9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	80 8	130 1	2	0	97
A_2	110 2	10 5	4	35 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
Потенциалы	102	105	98	109	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетке* (A_1,B_4), *где нарушение составляет* 4.

Применим формальное правило улучшения плана для клетки (A_1,B_4).

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	5	④ ~~80~~ **45** 8	130 1	**35** 2	① 0	97
A_2	110 2	③ ~~10~~ **45** 5	4	~~35~~ ② 9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	107
потенциалы	102	105	98	109	100	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	45 8	130 1	35 2	0
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0
A_3	9	2	3	65 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	45 8	130 1	35 2	0	98
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0	100
A_3	9	2	3	65 2	0	98
Потенциалы	102	105	99	100	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно не выполнено в клетках* (A_1,$B_ф$), *где нарушение составляет* 2, (A_3,B_2), *где нарушение составляет* 5 *и* (A_3,$B_ф$), *в которой нарушение составляет* 2.

Применим формальное правило улучшение плана для клетки (A_3,B_2), *т.к. в ней выявлено наибольшее нарушение*.

магазины / склады	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	потенциалы
A_1	5	② ~~45~~ 8	130 1	**80** ~~35~~ 2 ③	0	98
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0	100
A_3	9	① **45** 2	3	**20** ~~65~~ 2 ④	0	98
потенциалы	102	105	99	100	100	

Получили следующий вид транспортной матрицы:

Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$
A_1	5	8	130 1	80 2	0
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0
A_3	9	45 2	3	20 2	0

Проверяем условие Данцига и строим систему потенциалов. *Задаем второй строке потенциал равный* 100.

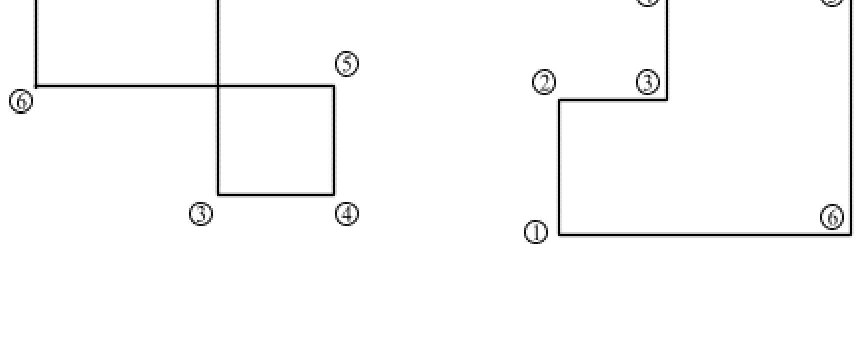
Пункты отправления, A_i	Пункты назначения B_j					Потенциалы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_ф$	
A_1	5	8	130 1	80 2	0	103
A_2	110 2	45 5	4	9	15 0	100
A_3	9	45 2	3	20 2	0	103
Потенциалы	102	105	104	105	100	

Проверяем условие оптимальности. *Оно выполнено во всех клетках, следовательно получен оптимальный план перевозок. Суммарные затраты за транспортировку составит:*

$$L = 130 \cdot 1 + 80 \cdot 2 + 110 \cdot 2 + 45 \cdot 5 + 15 \cdot 0 + 45 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 865.$$

Отметим, что мы за нулевое приближение; мы выбрали опорный план, полученный методом «северо-западного угла», в силу чего нам и пришлось производить большое количество итераций. Если бы в качестве начального приближения был выбран опорный план, полученный методом «минимального элемента», то необходимое количество итераций было бы существенно меньше, а при выборе в качестве исходного опорного плана построенного «методом Фогеля», в данном примере вообще не пришлось бы производить итерации.

Отметим также, что при решении данного примера контуры которые мы строили, получались прямоугольные; это не всегда так, контуры могут быть различных форм, но строятся они всегда по одному принципу и в каждом случае могут быть получены единственным образом.



Задание № 1

Предприятие выпускает два вида продукции, для производства каждого из которых используется сырьё двух типов. На изготовление тысячи единиц изделия первого вида требуется затратить сырья каждого типа a_1 и a_2 тонн соответственно, а для тысячи единиц изделия второго вида b_1 и b_2 тонн соответственно. Согласно заключенным договорам поставки сырья первого типа не должны превышать c_1 тонн, а поставки сырья второго типа не могут быть снижены, менее чем до c_2 тонн. Причем суммарный выпуск продукции должен находиться в следующем диапазоне: увеличенное в b_3 раз количество продукции второго вида не может превышать более чем на c_3 тысяч единиц количество продукции первого вида, увеличенное в a_3 раз; а в свою очередь увеличенное в a_4 раз количество продукции первого вида не может превышать более чем на c_4 тысяч единиц количество продукции второго вида, увеличенное в b_4 раз.

Стоимость тысячи единиц изделий первого вида составляет d_1 тыс. руб., а тысячи единиц изделия второго вида d_2 тыс. руб.

Требуется составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную прибыль предприятию:

а) решите задачу графическим методом;

б) решите задачу симплекс-методом.

Данные к задаче по вариантам приведены в таблице 1:

Задание № 2

На трех складах находятся запасы продукции в количестве a_1, a_2, a_3, единиц соответственно, а в четырех магазинах имеется необходимость в завозе данной продукции, причем потребности составляют b_1, b_2, b_3, b_4.едениц продукции соответственно, тарифы на транспортировку продукции с i-того склада к j-тому магазину равны $c_{i,j}$. Необходимо построить оптимальный план перевозок и определить минимальные затраты на транспортировку.

Данные к задаче по вариантам приведены в таблице 2:

Таблица 1

вариант	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2
1	3	2	1	2	2	1	2	2	12	2	1	4	5	2
2	2	1	1	1	3	2	2	2	12	2	1	3	2	5
3	3	2	1	2	4	3	2	2	12	6	1	4	1	2
4	2	1	2	2	3	2	1	2	12	2	1	4	2	4
5	3	2	1	2	4	3	2	4	12	6	1	4	1	3
6	2	1	1	1	3	2	2	2	12	2	1	3	1	3
7	3	2	1	2	2	1	2	2	12	2	1	4	3	1
8	2	1	1	1	3	2	2	2	12	2	1	3	2	7
9	3	2	1	2	2	1	2	2	12	2	1	4	4	2
10	2	1	1	1	3	2	2	2	12	2	1	3	2	4
11	3	2	1	2	2	1	2	2	12	2	1	4	4	1
12	3	1	1	1	2	2	2	2	14	2	1	3	2	6
13	3	2	1	2	4	3	2	2	12	6	1	4	2	5
14	2	1	1	1	3	2	2	2	13	2	1	3	8	1
15	3	2	1	2	2	1	2	2	12	2	1	4	3	4
16	2	1	1	1	3	2	2	2	12	2	1	3	3	5
17	3	2	1	2	2	1	2	2	12	2	1	4	4	3
18	2	1	1	1	3	2	2	2	12	2	1	3	3	7
19	3	2	1	2	2	2	2	2	12	2	1	4	5	3
20	3	2	1	2	4	3	2	1	12	6	2	4	1	2

Таблица 2

Вар.	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
1	120	130	100	70	80	120	90	5	2	6	3	8	4	1	8	7	9	2	11
2	120	120	150	70	60	120	90	5	2	6	3	4	8	1	8	7	9	2	11
3	120	130	110	70	80	110	90	5	2	6	3	8	4	4	1	7	9	2	11
4	120	100	110	70	80	120	90	5	2	6	3	8	9	1	8	6	4	2	11
5	120	120	140	70	60	100	90	5	2	6	3	4	6	1	8	7	9	2	11
6	130	100	110	70	80	100	90	4	2	6	3	8	4	5	1	7	9	2	11
7	110	130	120	70	80	80	90	5	2	7	3	8	4	1	8	6	9	2	11
8	120	110	100	70	60	80	90	5	2	6	3	4	3	1	8	7	9	2	11
9	120	100	130	70	80	100	90	5	2	6	3	8	4	4	3	7	9	2	11
10	110	80	120	70	80	60	90	5	2	6	3	8	4	1	8	6	9	2	11
11	120	130	100	70	60	90	90	5	1	6	3	4	3	1	8	7	4	2	11
12	120	100	130	70	90	100	90	5	2	1	3	3	4	4	6	7	5	2	11
13	120	130	110	70	80	120	90	5	2	6	3	2	4	1	8	7	9	2	6
14	120	120	150	70	60	160	90	5	2	6	3	4	8	1	2	7	4	2	11
15	120	130	110	70	80	110	90	5	2	6	3	5	4	1	1	7	9	2	11
16	120	110	110	70	90	120	90	5	2	6	3	8	9	1	8	6	4	2	11
17	120	120	130	170	60	100	90	5	2	6	3	4	6	1	8	7	9	2	11
18	130	120	110	70	80	100	120	4	2	6	3	2	4	5	1	7	9	2	11
19	60	130	120	70	80	80	90	5	2	7	3	8	4	1	1	6	9	2	8
20	120	110	100	70	50	100	90	5	2	6	3	4	3	1	8	7	9	2	11

ЛИТЕРАТУРА

1. Тернер Д. Вероятность, статистика и исследование операций./ Тернер Д. - М.: Статистика,1976.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели. /Под ред. В.В. Федосеева. - М.: ЮНИТИ, 1999.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах./ Акулич И.Л. - М.: Высшая школа,1993.
4. Расс С. Линейное программирование (методы и приложения). / Расс С. - М.: Физматгиз, 1961.
5. Архипенков С.М. Экономико-математические модели формирования оптимальных (напряженных) и надежных планов производства на предприятиях обрабатывающей промышленности. / Архипенков С.М. - Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. уп-т. 1999.
6. Коссов В.В. Межотраслевые модели. / Коссов В.В. - М.: Экономика, 1973.
7. Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов. /Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 1997.
8. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе: Учебник для вузов. / Шелобаев С.И. - М.: ЮНИТИ, 2000.
9. Грешилов А.Н. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах./ Грешилов А.Н. –СПб.:; БВХ. – 2000.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Раздел 1. Линейное программирование 4

1.1 Графический метод решения задач ЛП 11

1.2 Симплекс метод решения задач ЛП 16

Раздел 2. Транспортная задача 18

ЛИТЕРАТУРА 38

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для подготовки к курсовой работе по дисциплине Методы принятия оптимальных решений

Автор Лившиц Семен Александрович.

Кафедра экономика и организация производства КГЭУ

Подписано в печать
Формат 60×84/16. Бумага «Bisiness». Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл.печ. л. . Уч-изд. л. . Тираж экз. Заказ

Издательство КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51