

**Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КГЭУ, 5-9 декабря 2016 г.**

Решения задач компьютерного конкурса

Автор задач:

доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович.

Рецензент:

доцент кафедры АГД К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович.

Решение задачи 1.

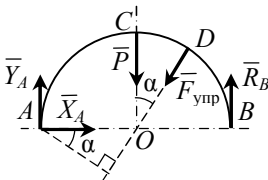


Рис. 1

1.1. Уравнение равновесия арки (рис. 1):

$$\sum_k M_A(\vec{F}_k) = R_B \cdot 2r - Pr - F_{\text{упр}} r \cos \alpha = 0.$$

$$R_B = 0.5(P + F_{\text{упр}} \cos \alpha). \quad (1)$$

Если обозначить через l длину дуги CD , то $F_{\text{упр}} = c(l + r - r) = cl = c\alpha r$. Тогда из (1):

$$R_B = 0.5(P + cr \alpha \cos \alpha). \quad (2)$$

Так как $\alpha \cos \alpha \geq 0$, причем при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ будет $\alpha \cos \alpha = 0$, то $R_{B,\text{max}}$ достигается во внутренней точке отрезка $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Ищем $R_{B,\text{max}}$ численно.

1 способ.

Проще всего вычислить $R_{B,\text{max}}$ перебором значений $R_B(\alpha)$, последовательно увеличивая α от 0 до $\pi/2$ с малым шагом $\Delta\alpha$. Для требуемой точности достаточно выбрать $\Delta\alpha = 10^{-4}$ (рад).

2 способ.

$$f(\alpha) = dR_B / d\alpha = 0.5cr(\cos \alpha - \alpha \sin \alpha).$$

Решаем нелинейное уравнение $f(\alpha) = 0$, например, методом последовательного деления отрезка пополам.

При $P = 10 \text{ Н}$, $c = 20 \text{ Н/м}$ получим $R_{B,max} = 7.805 \text{ Н}$. Это значение достигается при $\alpha = 0.8603 \text{ рад}$.

Заметим, что значение R_B не зависит от того, отсчитывается ли α от OC против часовой или по часовой стрелке.

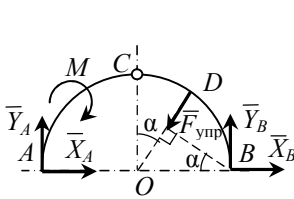


Рис. 2

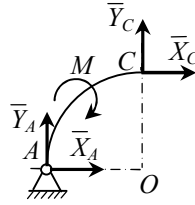


Рис. 3

1.2. Уравнение равновесия всей арки ACB (рис. 2):

$$\sum_k M_B(\bar{F}_k) = -Y_A \cdot 2r - M + F_{\text{упр}} \cdot r \cos \alpha = 0.$$

$$Y_A = \frac{1}{2r} (cr^2 \alpha \cos \alpha - M). \tag{3}$$

Рассмотрим равновесие части AC (рис. 3). Заметим, что сила упругости нити, приложенная к шарниру C, является составной частью реакции \bar{X}_C , приложенной к AC в точке C. Достаточно записать следующее уравнение равновесия AC:

$$\sum_k M_C(\bar{F}_k) = X_A \cdot r - Y_A \cdot r - M = 0.$$

$$X_A = Y_A + \frac{M}{r}. \tag{4}$$

Учтем (3) в (4):

$$X_A = \frac{1}{2r} (cr^2 \alpha \cos \alpha + M). \tag{5}$$

Тогда с учетом (3), (5):

$$R_A(\alpha) = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2},$$

причем выражения для X_A , Y_A согласно (3), (5) можно подставить уже в самой программе. При желании легко получить и окончательное

выражение для $R_A(\alpha)$:

$$R_A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \sqrt{(cr^2 \alpha \cos \alpha)^2 + M^2} .$$

Численное решение для определения $R_{A,\max}$ возможно теми же двумя способами, что и в решении задания 1.1. Фактически задача вновь сводится к нахождению максимального значения функции $\alpha \cos \alpha$. В решении задания 1.1 было получено, что оно достигается при $\alpha = 0.8603$ рад.

При $M = 10$ Н·м, $c = 100$ Н/м получим $R_{A,\max} = 24.363$ Н.

Решение задачи 2.

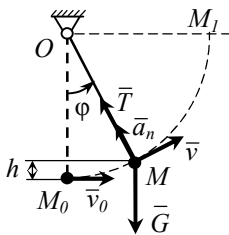


Рис. 4

2.1. Так как точкам A, B, C придали одинаково направленные начальные скорости, то диск начинает двигаться поступательно. Очевидно, что движение останется поступательным и в дальнейшем. (Это можно строго обосновать, записав теорему об изменении кинетического момента относительно центра тяжести диска и показав, что угловые ускорения относительно любой из координатных осей остаются равными нулю.) Равнодействующая трех

одинаковых сил реакций стержней приложена к центру тяжести диска. Поэтому исходная задача сводится к задаче о движении материальной точки M массы m , прикрепленной к концу невесомого стержня длины l , вращающегося вокруг неподвижной оси O (рис. 4).

Работа силы тяжести на перемещении M_0M :

$$A_G = -mgh = -mg(l - l \cos \varphi) .$$

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgl(1 - \cos \varphi) . \quad (1)$$

На перемещении M_0M_1 :

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mgl. \quad (2)$$

С учетом (2), а также $v = l\dot{\varphi}$ получим из (1):

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= mgl \cos \varphi. \\ \dot{\varphi} &= \sqrt{\frac{2g \cos \varphi}{l}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальное условие: $\varphi(0) = 0$. Искомый момент $t = \tau$ реализуется при условии $h = l/2$, т.е. $\varphi(\tau) = \pi/3$.

Для численного решения ДУ 1-го порядка (3) можно использовать, например, метод Рунге-Кутты с шагом по времени $h = 10^{-6}$ с. Вычисления прекращаются, как только в программе реализуется $\varphi \geq \pi/3$.

Из записи 2-го закона Ньютона в проекции на нормальную ось MO получим соотношение для силы реакции стержня T , с учетом (3):

$$\begin{aligned} ma_n &= T - G \cos \varphi. \\ T &= m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) = 3mg \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляем в (4) значение φ , соответствующее моменту $t = \tau/2$, которое определяется численно. Из исходной постановки задачи о диске, прикрепленном к трем шарнирным стержням, следует окончательно:

$$R_{O_i} = T/3 = mg \cos \varphi.$$

Интересно, что значение φ , а значит и R_{O_i} , не зависит от значения l . Поэтому во всех вариантах теста, предлагаемых участникам, этот ответ получается одним и тем же, совпадающим с ответом из примера для отладки. То есть, если догадаться до этого, второй ответ в задании 2.1 может быть записан участниками без численных вычислений.

2.2. Как следует из условия, при $t = 0$ распределение скоростей диска соответствует вращению тела вокруг неподвижной оси z . Однако при $t > 0$ вследствие наложенных на тело связей – нерастяжимых стержней – движение тела будет иметь кроме вращательной составляющей также и поступательную составляющую. Обозначим через s и

ϕ вертикальное перемещение диска и его угол поворота вокруг z , соответственно. (При этом s возрастает от 0 до l , а в силу условия $0 < l < 2r$ максимальное значение ϕ меньше π). Движение каждой точки тела M_k рассмотрим как сложное движение, при котором переносным является движение точки вверх вдоль z со скоростью $v_{k,e} = v_D = \dot{s}$, а относительным – вращение вокруг оси z со скоростью $v_{k,r}$ и угловой скоростью $\dot{\phi}$. Переносная и относительная скорости $\bar{v}_{k,e}$ и $\bar{v}_{k,r}$ взаимно перпендикулярны. Тогда кинетическая энергия тела равна:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_k \frac{m_k \bar{v}_{k,abc}^2}{2} = \sum_k \frac{m_k (\bar{v}_{k,e} + \bar{v}_{k,r})^2}{2} = \\
 &= \sum_k \left(\frac{m_k v_{k,e}^2}{2} + \frac{m_k 2v_{k,e} v_{k,r} \cos 90^\circ}{2} + \frac{m_k v_{k,r}^2}{2} \right) = \sum_k \left(\frac{m_k v_{k,e}^2}{2} + \frac{m_k v_{k,r}^2}{2} \right) = \\
 &= \frac{m \dot{s}^2}{2} + \frac{J_{Dz} \dot{\phi}^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

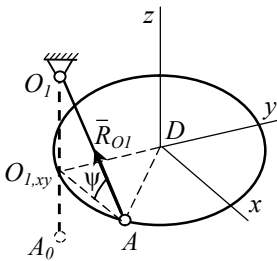


Рис. 5

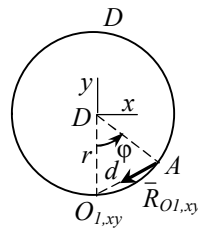


Рис. 6

Точка A стержня O_1A перемещается из начального положения A_0 вдоль оси z на величину $A_0O_{1,xy} = s$ (рис. 5), а в перпендикулярной ей плоскости Dxy , поступательно поднимающейся вместе с центром диска D , перемещается на величину $O_{1,xy}A = d$ (рис. 6):

$$d = 2r \sin(\phi / 2) = \sqrt{2r^2(1 - \cos\phi)}. \tag{6}$$

В прямоугольном треугольнике $O_1O_{1,xy}A$, находящемся в вертикальной плоскости, по теореме Пифагора с учетом (6) запишем:

$$l^2 = (l - s)^2 + d^2.$$

$$s = l - \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)}. \quad (7)$$

$$\dot{s} = -\frac{-2r^2 \sin \phi}{2\sqrt{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)}} \dot{\phi} = \frac{r^2 \sin \phi}{\sqrt{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)}} \dot{\phi}. \quad (8)$$

Учтем $J_{Dz} = mr^2 / 2$, а также (8) в (5):

$$T = \frac{m}{2} \frac{r^4 \sin^2 \phi}{(l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi))} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{4} = \frac{mr^2}{4} \left(\frac{2r^2 \sin^2 \phi}{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)} + 1 \right) \dot{\phi}^2. \quad (9)$$

Работа силы тяжести с учетом (7):

$$A_G = -mgs = -mg \left(l - \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)} \right). \quad (10)$$

Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела с учетом (9) и (10):

$$T - T_0 = A_G.$$

$$\frac{mr^2}{4} \left(\frac{2r^2 \sin^2 \phi}{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)} + 1 \right) \dot{\phi}^2 - T_0 = -mg \left(l - \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)} \right). \quad (11)$$

Так как при перемещении тела из начального в наивысшее положение будет выполняться:

$$-T_0 = -mgl,$$

то в (11) произойдет сокращение этих слагаемых и получим после сокращения m :

$$\frac{r^2}{4} \left(\frac{2r^2 \sin^2 \phi}{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)} + 1 \right) \dot{\phi}^2 = g \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)}. \quad (12)$$

Для удобства обозначим в (12):

$$f(\phi) = \frac{r^2}{4} \left(\frac{2r^2 \sin^2 \phi}{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)} + 1 \right), \quad q(\phi) = g \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - \cos \phi)},$$

Получим окончательно ДУ 1-го порядка:

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{q(\phi)}{f(\phi)}}. \quad (13)$$

Начальное условие: $\phi(0) = 0$. Искомый момент $t = \tau$ реализуется при условии $s = l/2$. (Вычисления в программе прекращаются, как только реализуется $s \geq l/2$).

Для определения R_{O_1} запишем теорему об изменении кинетического момента относительно оси z (рис. 5, 6). При этом учтем, что реакция шарнира равна реакции шарнирного стержня, приложенной к точке A . Так как векторы количеств движений $m_k \bar{v}_{k,e}$ дают нулевые моменты относительно оси z , теорема будет иметь вид ДУ вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$J_{Dz} \ddot{\phi} = 3M_z(\bar{R}_{O_1}).$$

С учетом $\cos \alpha = d/l$, соотношения (6) и того, что плечо составляющей $\bar{R}_{O_1,xy}$ равно $h = r \cos(\phi/2)$, найдем:

$$M_z(\bar{R}_{O_1}) = -R_{O_1,xy} h = -R_{O_1} \cos \alpha \cdot r \cos(\phi/2) = -R_{O_1} \frac{r^2}{l} \sin \phi.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{mr^2}{2} \ddot{\phi} = -3R_{O_1} \frac{r^2}{l} \sin \phi.$$

$$R_{O_1} = -\frac{Ml \ddot{\phi}}{6 \sin \phi}.$$

Определить $\ddot{\phi}$ проще всего численно с помощью соотношения:

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{\phi}(t + \Delta t) - \dot{\phi}(t)}{\Delta t},$$

использовав (13). Здесь Δt – малый шаг по времени при численном решении ДУ (13).

Другой способ получения разрешающего ДУ состоит в выражении кинетической энергии на базе (5) через \dot{s} . Из (7) можно получить:

$$\cos \phi = \frac{2r^2 - 2ls + s^2}{2r^2}. \quad (14)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(l-s)\dot{s}}{r^2 \sin \phi}.$$

Далее из (5):

$$T = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{(l-s)^2}{2r^2(1-\cos^2 \phi(s))} \right) \dot{s}^2 = mp(s) \dot{s}^2, \quad (15)$$

где выражение $\cos \phi(s)$ берется из (14), а обозначение $p(s)$ ввели для удобства записи. С учетом (10) теорему запишем в кратком виде:

$$mp(s) \dot{s}^2 - T_0 = -mgs.$$

С учетом $T_0 = mgl$ получим окончательно ДУ вида

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{g(l-s)}{p(s)}}. \quad (16)$$

При его программировании возникает затруднение, связанное с тем, что на первом шаге численного метода при $t = 0$ в (15) в знаменателе будет $1 - \cos^2 \phi = 0$, при этом и в числителе будет $\dot{s}^2 = 0$, т.е. возникает неопределенность вида $0/0$. Проблему с делением на ноль можно решить, изменив на пренебрежимо малую величину начальное условие, полагая, например, $s(0) = 10^{-8}$. В корректности этого можно убедиться, сопоставив ответ с ответом, полученным первым способом.

Можно также обойти это затруднение, перейдя от ДУ (16) к вычислению определенного интеграла. После разделения переменных s и t получаем:

$$t = \int_0^s \sqrt{\frac{p(s)}{g(l-s)}} ds$$

и применяем квадратурную формулу правых прямоугольников.

Для определения R_{O_1} запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось z :

$$m\ddot{s} = -mg + 3R_{O_1} \sin \alpha.$$

Здесь $\sin \alpha = \frac{l-s}{l}$, а ускорение \ddot{s} удобно определить численно из:

$$\ddot{s} = \frac{\dot{s}(t + \Delta t) - \dot{s}(t)}{\Delta t}.$$

Тогда окончательно:

$$R_{O_1} = \frac{m(\ddot{s} + g)}{3(l-s)}.$$

Ответы, полученные двумя способами, совпадают.

Заметим также, что для получения ДУ можно также использовать уравнения Лагранжа 2 рода для механической системы с одной степенью свободы. Получится ДУ второго порядка.

Примеры вычислений для заданий 2.1 и 2.2 приведены в условиях задач в примерах для отладки.

Критерии оценивания ответов участников

При записи ответов в бланки указывается ровно столько цифр после десятичной запятой, сколько их приведено в соответствующих примерах для отладки. Последняя значащая цифра пишется с учетом округления.

При проверке ответов участников во всех конкурсных заданиях полный балл присуждается, если либо предложенный ответ совпадает с правильным либо абсолютная погрешность равна «1» по последней значащей цифре. При большей погрешности предложенного ответа, если он близок к правильному, баллы присуждаются на основании дополнительной разбалловки, выработанной жюри.