МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский государственный
энергетический университет

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Методические указания к лабораторным работам по курсу «Физика»

Казань 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский государственный
энергетический университет

О.С. ЗУЕВА, Ю.Ф. ЗУЕВ, Т.А. СЕРЕБРЕННИКОВА

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Методические указания к лабораторным работам

по курсу «Физика»

Казань 2014

УДК 53
ББК 22.3
З 93

Зуева О.С., Зуев Ю.Ф., Серебренникова Т.А.

Учет погрешностей при проведении физических экспериментов: Методические указания к лабораторным работам по курсу «Физика». Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2014. 22с.

Содержаться сведения по классификации погрешностей при проведении физических экспериментов и рекомендации по обработке и представлению результатов прямых и косвенных физических измерений. Методические указания предназначены для студентов первого и второго курсов, выполняющих лабораторные работы по физике.

Рецензент

Д-р. хим. наук, профессор Гумеров Ф.М.

Рекомендовано секцией РИС института электроники и электроэнергетики.

Председатель секции В.Л. Матухин

Учет погрешностей при проведении физических экспериментов

Выполнение лабораторных работ является неотъемлемой частью изучения курса физики. В ходе лабораторных работ студенты не только углубляют свои теоретические познания, но также знакомятся с измерительной аппаратурой и методами физических измерений, приобретают навыки ведения самостоятельных экспериментальных исследований. Вопросы, касающиеся правильной обработки результатов измерений физических величин, неизбежно возникают в процессе выполнения каждой лабораторной работы и поэтому требуют отдельного рассмотрения. Ниже приводятся краткие сведения из теории учета погрешностей при проведении физических измерений.

Классификация погрешностей

При измерении физических величин различают два типа измерений: прямые и косвенные. При *прямом измерении* значение искомой величины определяется непосредственно с помощью измерительного прибора. При *косвенном измерении* значение искомой величины вычисляется по известной зависимости между ней и непосредственно измеряемыми величинами.

Каждый результат проведенного измерения некоторой физической величины находится с некоторой точностью. Точность измерений отражает близость результатов к истинному значению измеряемой величины, а погрешности измерений характеризуют расхождение между истинными и полученными результатами.

Погрешности различаются по характеру проявления. *Грубые погрешности (промахи)* обычно связаны либо с неисправностью измерительной аппаратуры, либо с ошибкой экспериментатора. Результаты измерений, соответствующие грубым погрешностям, нужно отбрасывать и проводить новые измерения.

Систематическими погрешностями называются погрешности, которые остаются постоянными или меняются по определенному закону при многократных измерениях величин. Они могут быть обусловлены методическими погрешностями, связанными с несовершенством метода измерения, или приборными погрешностями, связанными с несовершенством измерительных приборов или с их неправильной установкой. Использование более точных методов и более совершенных приборов позволяет уменьшить систематические погрешности, но полностью устранить их невозможно.

Случайными погрешностями измерений называются погрешности, абсолютная величина и знак которых изменяются при многократных измерениях физической величины. Они вызываются большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Случайные погрешности могут быть уменьшены путем многократного повторения измерений, в результате чего происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений.

Правильная оценка полученного результата включает в себя учет как случайных, так и систематических погрешностей.

Распределение случайных погрешностей прямых измерений

Случайные погрешности прямых измерений относятся к классу случайных величин и изучаются в теории вероятностей и математической статистике.

В основе теории случайных погрешностей (систематические погрешности предполагаются отсутствующими) лежит тот факт, что появление некоторого значения исследуемой физической величины в процессе измерения хотя и является случайным событием, но подчиняется определенным закономерностям:

- случайные погрешности одинаковой величины, но разных знаков (как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения истинной величины) встречаются одинаково часто;
- с ростом величины погрешности (по модулю) уменьшается вероятность ее появления, т.е. большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.

Такое распределение случайных погрешностей удобнее всего проиллюстрировать графически. Считаем, что при проведении серии n измерений одной и той же физической величины x может быть получено множество значений (n штук), случайным образом распределенных вблизи ее истинного значения. Чтобы построить кривую распределения ошибок физической величины x, область полученных значений этой величины (от максимального до минимального значения) делят на малые интервалы одинаковой ширины δx и рассчитывают относительную частоту n_i / n попадания результатов в указанный интервал (n_i – число измерений, результаты которых попали в рассматриваемый i-й интервал). Полученную таким образом диаграмму (рис. 1) называют гистограммой.

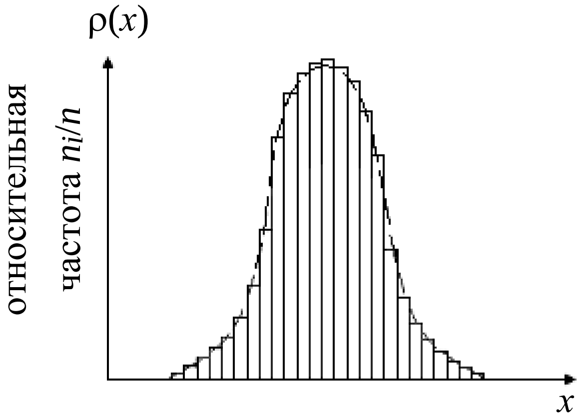

Рис. 1

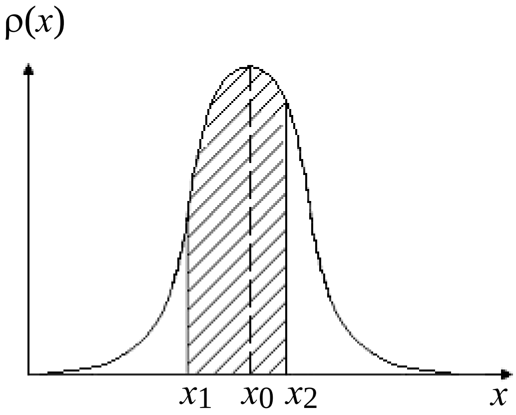

Рис. 2

При увеличении числа n измерений это распределение стремится к теоретическому распределению вероятностей, которое характеризует результаты бесконечного числа опытов и в котором площадь каждой полоски пропорциональна вероятности $P(x_i)$ попадания измеряемой величины в i-й интервал от $x_i - \delta x/2$ до $x_i + \delta x/2$. Естественно, что распределение вероятностей нормировано на единицу,

$$\sum_i P(x_i) = 1,$$

поскольку оно отражает вероятность всех возможных событий.

Теоретическое распределение вероятностей при стремлении интервала δx к нулю переходит в непрерывную кривую $\rho(x)$, изображенную на рис. 1 пунктиром, – кривую распределения ошибок. Функцию $\rho(x)$ называют плотностью распределения вероятностей. Она всегда неотрицательна и также подчинена условию нормировки в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1.$$

С ее помощью можно определить вероятность попадания результата измерения величины x в интервал от x_1 до x_2

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx,$$

равную площади фигуры, заштрихованной на рис. 2.

Плотность распределения вероятностей $\rho(x)$ наиболее полно характеризует совокупность случайных значений физической величины x. Обычно она имеет вид колоколообразной кривой, максимум которой соответствует истинному значению x_0 измеряемой величины.

В рамках теории ошибок можно показать, что при бесконечно большом числе измерений кривая распределения случайных ошибок $\rho(x)$ описывается нормальным распределением Гаусса. На практике в силу конечного числа измерений и других причин встречаются и другие законы распределения, многие из которых, однако, в предельном случае переходят в нормальное распределение. Важность распределения Гаусса определяется еще и тем, что в той области, где ошибки измерений не слишком велики, оно часто находится в очень хорошем согласии с экспериментом.

В случае распределения Гаусса плотность вероятностей $\rho(x)$ для случайной переменной x имеет вид

$$\rho(x) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-1} \exp\left[-(x - x_0)/2\sigma^2\right], \qquad (1)$$

где σ^2 – параметр, называемый дисперсией распределения.

Формула Гаусса описывает симметричную колоколообразную кривую (рис. 3) с центром в точке x_0, соответствующей истинному значению измеряемой физической величины. По обе стороны от максимума $\rho(x)$ монотонно спадает и асимптотически стремится к нулю, причем этот спад и сама форма кривых Гаусса характеризуется определяемым дисперсией распределения параметром $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$, отражающим разброс случайных значений измеряемой величины относительно центра распределения. Его называют среднеквадратичным отклонением (стандартной ошибкой). На рис. 3 приведены кривые плотности вероятностей для нормального распределения при значениях параметра $\sigma = 0{,}5; 1; 2$.

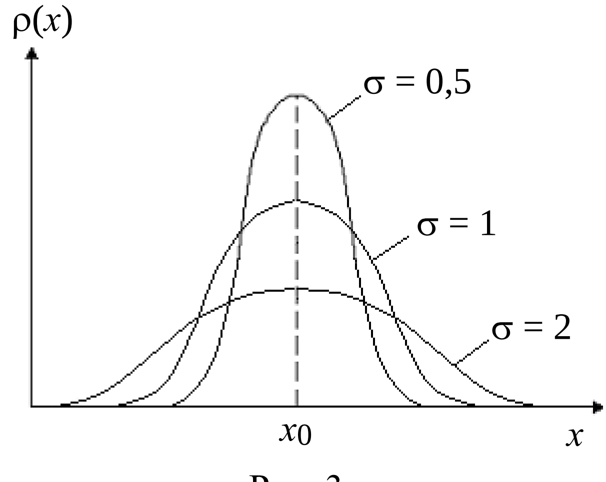

Рис. 3

При больших значениях σ кривые $\rho(x)$ идут менее круто и являются более широкими, при этом площади под кривыми с разными σ в силу условия нормировки вероятностей одинаковы и равны единице. Большие σ соответствуют большему разбросу случайных значений измеряемой величины, а значит, менее точным измерениям.

Доверительная вероятность и доверительный интервал

Итак, для определения случайной величины x недостаточно знания ее истинного значения x_0, поскольку разные эксперименты характеризуются разной степенью разброса получаемых значений. Этот факт проиллюстрирован на рис. 4 для двух кривых распределения ошибок.

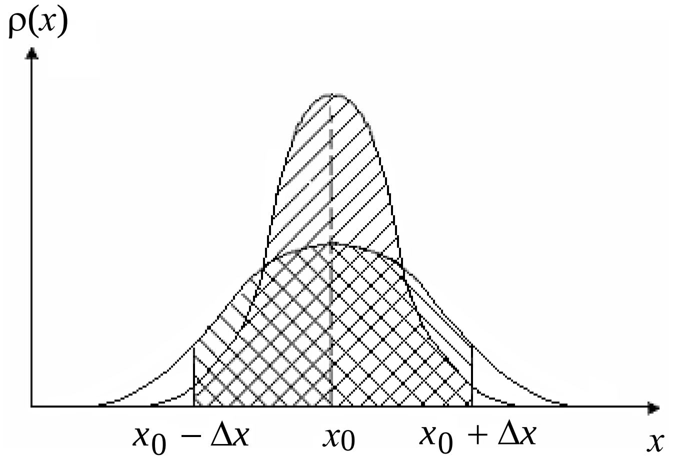

Рис. 4

Вероятности получения в процессе измерения ошибок, не превышающих Δx, т.е. вероятности попадания случайной величины x в интервал от $x_0 - \Delta x$ до $x_0 + \Delta x$, равны площадям, заштрихованным под рассматриваемыми кривыми. Видно, что эти вероятности различны. Поэтому для характеристики случайной ошибки необходимо задать два числа: величину самой ошибки Δx и величину вероятности P попадания ошибки в указанный интервал.

Доверительным интервалом называется интервал от $x_0 - \Delta x$ до $x_0 + \Delta x$, в который по определению попадают результаты измерения случайной величины x с заданной вероятностью $P_{\text{д}}$, носящей название *доверительной вероятности*, или *коэффициента надежности*. Доверительная вероятность выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Следует помнить, что $(1 - P_{\text{д}})$ процентов от общего числа измерений выходят за пределы доверительного интервала. Увеличение границ доверительного интервала, т.е.

увеличение задаваемой погрешности результатов измерений, приводит к увеличению надежности попадания в этот интервал.

Указание одной только величины ошибки Δx без указания соответствующей ей доверительной вероятности в значительной мере лишено смысла, так как только знание доверительной вероятности позволяет оценить степень надежности полученного результата.

Необходимая степень надежности задается характером производимых измерений. В разных областях используют различные значения доверительной вероятности: 0,5; 0,683; 0,8; 0,9; 0,95; 0,99; 0,997; 0,999.

Распределение Гаусса позволяет рассчитать доверительную вероятность для соответствующего доверительного интервала любой величины. Границы интервала $\pm\Delta x$, за пределы которого с заданной доверительной вероятностью не выходят случайные погрешности, обычно выражают в виде значения, кратного стандартной ошибке: $\Delta x = t_\alpha \cdot \sigma$, где t_α – безразмерный коэффициент, определяемый задаваемой вероятностью $\alpha = P_Д$.

В случае нормального распределения для $\Delta x = \sigma$ (когда $t_\alpha = 1$) величина доверительной вероятности $P_Д = 0{,}683$ (рис. 5). Это означает, что 68,3 % всех измерений попадает в доверительный интервал от $x_0 - \sigma$ до $x_0 + \sigma$, а за его пределы выпадает 31,7 % всех измерений. Аналогично для $\Delta x = 2\sigma$ (когда $t_\alpha = 2$) значение $P_Д = 0{,}955$, т.е. 95,5 % всех измерений попадает в указанный доверительный интервал, а за его пределы выпадает 4,5 % всех измерений. Наконец, для $\Delta x = 3\sigma$ (когда $t_\alpha = 3$) значение $P_Д = 0{,}997$, а значит, за пределы доверительного интервала выпадает 0,3 % всех результатов измерений. Эта вероятность настолько мала, что результат с отклонениями более 3σ считается грубой погрешностью (промахом). Это правило выявления промахов называется критерием трех сигм.

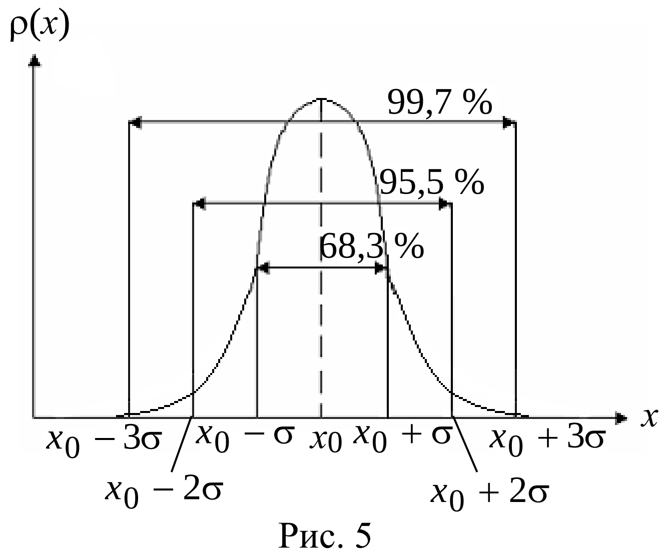

Рис. 5

Чтобы определить доверительную вероятность для любого доверительного интервала с границами $\pm\Delta x$ при известной среднеквадратичной погрешности σ необходимо рассчитать коэффициент $t_\alpha = \Delta x / \sigma$. Соответствующие ему значения $P_д$ приводятся в таблицах справочной литературы. Обратная задача – определение границ доверительного интервала по заданному значению $P_д$ – решается с помощью тех же таблиц.

При малом числе измерений ($n < 30$) кривая распределения ошибок отличается от нормального распределения. В этом случае более точные результаты дает так называемое t-распределение Стьюдента. Кривые распределения Стьюдента при разных n внешне похожи на колоколообразную кривую распределения Гаусса, но их максимум тем ниже, чем меньше n. С увеличением n распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению и при $n > 30$ уже совпадает с ним настолько хорошо, что может быть заменено распределением Гаусса.

Такой вид кривых t-распределения приводит к измененным (расширенным) границам доверительного интервала, соответствующего заданной доверительной вероятности. В этом случае величина доверительного интервала определяется не только значением $\alpha = P_д$, но и числом измерений n, а для расчета границ интервала Δx используют соотношение $\Delta x = t_{\alpha,n} \cdot \sigma$. Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ табулируются для разных значений α и n. При $n \to \infty$ они переходят в коэффициенты t_α, введенные для распределения Гаусса. В частности, значения коэффициентов Стьюдента для двух значений доверительной вероятности и некоторых значений n приведены ниже:

n	3	4	5	7	10	15	20	30	∞
$t_{0,9}$	2,92	2,35	2,13	1,94	1,83	1,76	1,73	1,70	1,64
$t_{0,95}$	4,30	3,18	2,78	2,45	2,26	2,14	2,09	2,04	1,96.

Видно, что численное значение этих коэффициентов, а значит, и величина доверительного интервала возрастают с уменьшением числа измерений. Наоборот, при $n \geq 8$ различие между рассматриваемыми коэффициентами составляет уже менее 20 %.

Тот факт, что истинное значение измеряемой величины x_0 с заданной доверительной вероятностью лежит в пределах доверительного интервала, можно записать в виде неравенства

$$x_0 - t_{\alpha,n} \cdot \sigma \leq x_0 \leq x_0 + t_{\alpha,n} \cdot \sigma ,$$

но обычно окончательный результат представляют в виде

$$x = x_0 \pm t_{\alpha,n} \cdot \sigma. \qquad (2)$$

Для расчетов значения $\alpha = P_Д$ выбирают в соответствии с требованиями надежности (обычно 0,90-0,95). При проведении учебных измерений, как правило, используется доверительная вероятность 0,683, при которой границы интервала приближенно равны $\pm\sigma$ даже при небольшом (например, $n = 5$) числе измерений. Поскольку здесь $t_{\alpha,n} \approx 1$, то окончательный результат может быть представлен в более простом виде:

$$x = x_0 \pm \sigma. \qquad (3)$$

Расчет погрешностей прямых измерений

При проведении учебных лабораторных экспериментов основной задачей является правильное нахождение величин, входящих в формулу (3), по результатам ограниченного числа измерений. В математической статистике показано, что за истинное значение x_0 измеряемой n раз величины x можно принять среднее арифметическое значение x_0 всех полученных результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а именно

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,. \qquad (4)$$

Значение $\bar{x}$ является наилучшим приближением к истинному значению x_0, но все же не дает точного значения его величины.

Степень разброса этих результатов относительно среднего значения $\bar{x}$ на практике характеризуется среднеквадратичной погрешностью (среднеквадратичным отклонением) среднего арифметического серии измерений $\Delta\bar{x} \approx \sigma$, которая рассчитывается по формуле

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,. \qquad (5)$$

Среднеквадратичная погрешность среднего арифметического серии измерений дает приближенное значение стандартной ошибки σ. Из соотношения для $\Delta\bar{x}$ видно, что среднеквадратичная погрешность серии измерений может быть уменьшена за счет увеличения числа измерений n. Обычно при проведении лабораторных работ ограничиваются серией из пяти

($n = 5$) измерений. При $n \to \infty$ приближенные соотношения становятся точными, т.е. $\bar{x} = x_0$, $\Delta\bar{x} = \sigma$.

Для точной оценки результатов измерений учета одних только случайных погрешностей недостаточно. Приборная систематическая погрешность $\Delta x_{пр}$, обусловленная несовершенством измерительной аппаратуры, связана с точностью измерений прибора Δ соотношением

$$\Delta x_{пр} = \Delta/2.$$

Как правило, точность измерений прибора Δ указывается в паспорте или на самом приборе. При отсутствии паспорта или указаний на приборе обычно считают, что приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ равна половине цены наименьшего деления шкалы прибора, а если стрелка прибора перемещается не равномерно, а скачками (как у секундомера), то приборную погрешность считают равной цене наименьшего деления шкалы.

Полная абсолютная погрешность прямого измерения вычисляется по формуле

$$\Delta x_{полн} = \sqrt{(\Delta\bar{x})^2 + (\Delta x_{пр})^2}\,. \qquad (6)$$

Относительная погрешность прямого измерения, характеризующая качество измерения и обычно выражающаяся в процентах, рассчитывается следующим образом:

$$\varepsilon_x = (\Delta x_{полн} / \bar{x})100\,\%\,. \qquad (7)$$

Окончательный результат прямого измерения представляется в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{полн}\,. \qquad (8)$$

Расчет погрешностей при косвенных измерениях

При косвенном измерении значение искомой величины вычисляется по известной зависимости $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ между ней и непосредственно измеряемыми величинами $x_1, x_2,\ldots, x_n$. В этом случае сначала по вышеприведенным формулам обрабатываются результаты прямых измерений каждой величины x_i и представляются в виде

$$x_i = \bar{x}_i + \Delta x_{i\,полн}\,.$$

Далее рассчитывается истинное значение величины f:

$$\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n),$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ – средние значения измеренных величин $x_1, x_2, ..., x_n$. Абсолютная погрешность Δf величины f связана с полными абсолютными погрешностями ($\Delta x_{i\text{полн}}$) прямых измерений и с видом самой функции f. В общем случае она вычисляется по формуле

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_{1\text{полн}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_{2\text{полн}}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \Delta x_{n\text{полн}}^2},$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – частные производные функции f по независимым переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, взятые при значениях аргументов, равных их средним значениям.

Относительная погрешность косвенного измерения величины f равна

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{\bar{f}} 100\,\%.$$

В некоторых случаях, используя готовые формулы, проще сначала найти относительную погрешность ε_f, а уже потом рассчитать абсолютную погрешность:

$$\Delta f = \varepsilon_f \bar{f}.$$

В любом случае окончательный результат должен быть представлен в виде

$$f = \bar{f} \pm \Delta f.$$

Формулы, позволяющие рассчитать абсолютные и относительные погрешности в случае некоторых простых функциональных зависимостей, приведены в табл. 1. Заметим, что в этих случаях формулы для расчета относительной погрешности имеют более простой вид.

Таблица 1

Вид функции f	Абсолютная погрешность Δf	Относительная погрешность ε_f
$f = C(x \pm y)$	$\Delta f = C\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x \pm y}$
$f = Cxy$	$\Delta f = C\sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = \dfrac{Cx}{y}$	$\Delta f = C\dfrac{x}{y}\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = Cx^{\alpha}y^{\beta}$	$\Delta f = C\,x^{\alpha}y^{\beta}\sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$

В табл. 1 x и y – непосредственно измеряемые физические величины; C, α, β – численные коэффициенты; f – косвенно измеряемая величина; Δx, Δy – полные абсолютные погрешности прямых измерений.

Округление результатов прямых измерений

Для округления результатов прямых измерений приняты следующие правила:

1) при записи погрешности Δx ее необходимо округлить до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры в остальных случаях (значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей, расположенных левее первой его цифры, отличной от нуля);

2) округление чисел производится в соответствии со следующими правилами:

- если первая отбрасываемая справа цифра меньше 5, то стоящая перед ней цифра остается неизменной;
- если первая отбрасываемая справа цифра больше 5, то стоящая перед ней цифра возрастает на единицу;

- в случае, когда отбрасываемая цифра равна 5 и после нее следуют цифры больше нуля, стоящая перед ней цифра увеличивается на единицу;

3) при записи среднего значения $\overline{x}$ последней указывается цифра того десятичного разряда, который используется при указании погрешности. При этом общий множитель, указывающий порядок величины, выносится за скобки.

В соответствии с этими правилами одно и то же число 13,6074 для разных целей может быть представлено в виде 13,607; 13,61; 13,6; 14. Ниже приведены примеры правильной записи результатов измерений:

$$(73 \pm 6)\ \text{с};$$

$$(15{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{г};$$

$$(1{,}63 \pm 0{,}06) \times 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Необходимая точность промежуточных расчетов определяется тем, что расчет не должен вносить в окончательный результат дополнительной погрешности, поэтому в промежуточных вычислениях следует сохранить один лишний знак, который при записи окончательного результата отбрасывается.

Пример применения алгоритма обработки результатов измерений для определения объема тонкой прямоугольной пластинки

а) Измерение геометрических размеров пластинки с помощью штангенциркуля

Результаты прямых измерений длины (a_i), ширины (b_i) и толщины (c_i) пластинки в пяти различных ее местах представлены в табл. 2.

Таблица 2

Номер i измерения	a_i, мм	b_i, мм	c_i, мм
1	150,05	10,25	3,05
2	150,10	10,15	3,10
3	149,95	10,10	3,10
4	149,90	10,05	3,15
5	150,00	10,00	3,10

По формуле (4) вычисляем средние арифметические значения $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ измеренных величин:

$$\overline{a} = \frac{150{,}05 + 150{,}10 + 149{,}95 + 149{,}90 + 150{,}00}{5} = 150{,}00\ \text{мм},$$

$$\bar{b} = \frac{10{,}25 + 10{,}15 + 10{,}10 + 10{,}05 + 10{,}00}{5} = 10{,}11 \text{ мм},$$

$$\bar{c} = \frac{3{,}05 + 3{,}10 + 3{,}10 + 3{,}15 + 3{,}10}{5} = 3{,}10 \text{ мм}.$$

Затем вычисляем квадраты отклонений $(a_i - \bar{a})^2$, $(b_i - \bar{b})^2$ и $(c_i - \bar{c})^2$ измеренных величин a_i, b_i и c_i от их средних арифметических значений $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ соответственно и заносим их в табл. 3.

Таблица 3

Номер i измерения	$(a_i - \bar{a})^2$, мм^2	$(b_i - \bar{b})^2$, мм^2	$(c_i - \bar{c})^2$, мм^2
1	$0{,}05^2 = 25 \cdot 10^{-4}$	$0{,}14^2 = 196 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}05)^2 = 25 \cdot 10^{-4}$
2	$0{,}1^2 = 100 \cdot 10^{-4}$	$0{,}04^2 = 16 \cdot 10^{-4}$	0
3	$(-0{,}05)^2 = 25 \cdot 10^{-4}$	$0{,}01^2 = 1 \cdot 10^{-4}$	0
4	$(-0{,}1)^2 = 100 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}06)^2 = 36 \cdot 10^{-4}$	$0{,}05^2 = 25 \cdot 10^{-4}$
5	0	$(-0{,}11)^2 = 121 \cdot 10^{-4}$	0

По формуле (5) вычисляем среднеквадратичные погрешности $\Delta\bar{a}$, $\Delta\bar{b}$ и $\Delta\bar{c}$ пяти измерений длины (a_i), ширины (b_i) и толщины (c_i) пластинки:

$$\Delta\bar{a} = \sqrt{\frac{25 + 100 + 25 + 100 + 0}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}035 \text{ мм},$$

$$\Delta\bar{b} = \sqrt{\frac{196 + 16 + 1 + 36 + 121}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}043 \text{ мм},$$

$$\Delta\bar{c} = \sqrt{\frac{25 + 0 + 0 + 25 + 0}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}016 \text{ мм}.$$

Определяем приборную систематическую погрешность штангенциркуля. Поскольку точность измерений штангенциркулем Δ определяется точностью его нониуса, который указан на приборе и в нашем случае равен $\Delta = 0{,}05$ мм, то

$$\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}05/2 = 0{,}025 \text{ мм}.$$

По формуле (6) находим полные абсолютные погрешности измерений длины, ширины и толщины пластинки:

$$\Delta a_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}035^2 + 0{,}025^2} = 0{,}043 \text{ мм},$$

$$\Delta b_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}043^2 + 0{,}025^2} = 0{,}050 \text{ мм},$$

$$\Delta c_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}016^2 + 0{,}025^2} = 0{,}030 \text{ мм}.$$

Окончательные результаты прямых измерений длины, ширины и толщины пластинки с учетом правил округления результатов записываем в виде, определяемом формулой (8):

$$a = (150{,}00 \pm 0{,}04) \text{ мм}; \; b = (10{,}11 \pm 0{,}05) \text{ мм}; \; c = (3{,}10 \pm 0{,}03) \text{ мм}.$$

По формуле (7) вычисляем относительные погрешности измерений длины, ширины и толщины пластинки:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a_{\text{полн}}}{\bar{a}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}04}{150} \cdot 100\,\% = 0{,}03\,\%,$$

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta b_{\text{полн}}}{\bar{b}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}05}{10{,}11} \cdot 100\,\% = 0{,}50\,\%,$$

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta c_{\text{полн}}}{\bar{c}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}03}{3{,}10} \cdot 100\,\% = 0{,}97\,\% = 1{,}0\,\%.$$

Для вычисления объема пластинки по формуле

$$V = a \cdot b \cdot c\,.$$

используем средние арифметические значения $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\bar{V} = 150{,}00 \cdot 10{,}11 \cdot 3{,}10 = 4701{,}15 \text{ мм}^3.$$

Абсолютную погрешность измерения объема ΔV удобнее вычислять через относительную погрешность ε_V, для расчета которой используем формулу табл. 1 для функции $f = C \cdot x \cdot y$:

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\Delta a_{\text{полн}}}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_{\text{полн}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c_{\text{полн}}}{\bar{c}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0{,}04}{150{,}00}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{10{,}11}\right)^2 + \left(\frac{0{,}03}{3{,}10}\right)^2} = 0{,}01.$$

Для вычисления абсолютной погрешности ΔV используем соотношение $\varepsilon_V = \Delta V / \overline{V}$, из которого следует, что

$$\Delta V = \overline{V} \cdot \varepsilon_V = 4701{,}15 \cdot 0{,}01 = 47{,}01 \text{ мм}^3.$$

Окончательный результат записываем с учетом правил округления и требований к точности записи результатов измерений:

$$V = (4701{,}15 \pm 47{,}01) = (4701{,}2 \pm 47{,}0) \text{ мм}^3.$$

б) Измерение геометрических размеров пластинки
с помощью микрометра

Результаты прямых измерений длины (a_i), ширины (b_i) и толщины (c_i) пластинки в пяти различных ее местах представлены в табл. 4.

Таблица 4

Номер i измерения	a_i, мм	b_i, мм	c_i, мм
1	150,03	10,23	3,04
2	150,08	10,12	3,09
3	149,98	10,10	3,08
4	149,99	10,07	3,13
5	150,00	10,01	3,11

По формуле (4) вычисляем средние арифметические значения $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ измеренных величин:

$$\overline{a} = \frac{150{,}03 + 150{,}08 + 149{,}98 + 149{,}99 + 150{,}00}{5} = 150{,}016 \text{ мм},$$

$$\overline{b} = \frac{10{,}23 + 10{,}12 + 10{,}10 + 10{,}07 + 10{,}01}{5} = 10{,}106 \text{ мм},$$

$$\overline{c} = \frac{3{,}04 + 3{,}09 + 3{,}08 + 3{,}13 + 3{,}11}{5} = 3{,}090 \text{ мм}.$$

Затем вычисляем квадраты отклонений $(a_i - \overline{a})^2$, $(b_i - \overline{b})^2$ и $(c_i - \overline{c})^2$ измеренных величин a_i, b_i и c_i от их средних арифметических значений $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ соответственно и заносим в табл. 5.

Таблица 5

Номер i измерения	$(a_i - \bar{a})^2$, мм^2	$(b_i - \bar{b})^2$, мм^2	$(c_i - \bar{c})^2$, мм^2
1	$0{,}1^2 = 100 \cdot 10^{-4}$	$0{,}12^2 = 144 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}05)^2 = 25 \cdot 10^{-4}$
2	$0{,}06^2 = 36 \cdot 10^{-4}$	$0{,}01^2 = 1 \cdot 10^{-4}$	0
3	$(-0{,}04)^2 = 16 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}01)^2 = 1 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}01)^2 = 1 \cdot 10^{-4}$
4	$(-0{,}03)^2 = 9 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}04)^2 = 16 \cdot 10^{-4}$	$0{,}04^2 = 16 \cdot 10^{-4}$
5	$0{,}02 = 4 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}1)^2 = 100 \cdot 10^{-4}$	$0{,}02^2 = 4 \cdot 10^{-4}$

По формуле (5) вычисляем среднеквадратичные погрешности $\Delta\bar{a}$, $\Delta\bar{b}$ и $\Delta\bar{c}$ пяти измерений длины (a_i), ширины (b_i) и толщины (c_i) пластинки:

$$\Delta\bar{a} = \sqrt{\frac{100+36+16+9+4}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}029 \text{ мм},$$

$$\Delta\bar{b} = \sqrt{\frac{144+1+1+16+100}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}036 \text{ мм},$$

$$\Delta\bar{c} = \sqrt{\frac{25+0+1+16+4}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}015 \text{ мм}.$$

Определяем приборную систематическую погрешность микрометра. Поскольку точность измерений микрометром Δ определяется точностью его нониуса, который указан на приборе и в нашем случае равен Δ = 0,01 мм, то

$$\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}01/2 = 0{,}005 \text{ мм}.$$

По формуле (6) находим полные абсолютные погрешности измерений длины, ширины и толщины пластинки:

$$\Delta a_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}029^2 + 0{,}005^2} = 0{,}029 \text{ мм},$$

$$\Delta b_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}036^2 + 0{,}005^2} = 0{,}036 \text{ мм},$$

$$\Delta c_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}015^2 + 0{,}005^2} = 0{,}016 \text{ мм}.$$

Окончательные результаты прямых измерений длины, ширины и толщины пластинки с учетом правил округления результатов записываем в виде, определяемом формулой (8):

$a = (150{,}02 \pm 0{,}03)$ мм; $b = (10{,}11 \pm 0{,}04)$ мм; $c = (3{,}09 \pm 0{,}02)$ мм.

По формуле (7) вычисляем относительные погрешности измерений длины, ширины и толщины пластинки:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a_{\text{полн}}}{\bar{a}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}03}{150{,}02} \cdot 100\,\% = 0{,}02\,\%,$$

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta b_{\text{полн}}}{\bar{b}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}04}{10{,}11} \cdot 100\,\% = 0{,}40\,\%,$$

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta c_{\text{полн}}}{\bar{c}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}02}{3{,}09} \cdot 100\,\% = 0{,}65\,\%.$$

Для вычисления объема пластинки по формуле

$$V = a \cdot b \cdot c$$

используем средние арифметические значения $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\bar{V} = 150{,}02 \cdot 10{,}11 \cdot 3{,}09 = 4686{,}61 \text{ мм}^3.$$

Абсолютную погрешность измерения объема ΔV удобнее вычислять через относительную погрешность ε_V, для расчета которой используем формулу табл. 1 для функции $f = C \cdot x \cdot y$:

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\Delta a_{\text{полн}}}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_{\text{полн}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c_{\text{полн}}}{\bar{c}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0{,}03}{150{,}02}\right)^2 + \left(\frac{0{,}04}{10{,}11}\right)^2 + \left(\frac{0{,}02}{3{,}09}\right)^2} = 76 \cdot 10^{-4}.$$

Для вычисления абсолютной погрешности ΔV используем соотношение $\varepsilon_V = \Delta V / \bar{V}$, из которого следует, что

$$\Delta V = \bar{V} \cdot \varepsilon_V = 4686{,}61 \cdot 76 \cdot 10^{-4} = 35{,}62 \text{ мм}^3.$$

Окончательный результат записываем с учетом правил округления и требований к точности записи результатов измерений:

$$V = (4686{,}61 \pm 35{,}62) = (4686{,}6 \pm 35{,}6) \text{ мм}^3.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. – М.: Наука, 1985. – 112 с.
2. Зайнашева Г.Н. Обработка результатов измерений физических величин: Учебное пособие по курсу «Физика». – К.: КГЭУ, 2005. – 58 с.
3. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. – М.: Наука, 1970. – 104 с.
4. Кунце Х.И. Методы физических измерений. – М.: Мир, 1989. – 216 с.
5. Кушнир Ф.В., Савенко В.Г. Электрорадиоизмерения. – Л.: Энергия, 1975. – 368 с.
6. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 248 с.
7. Тойберг П. Оценка точности результатов измерений. – М.: Энергоамтоиздат, 1988. – 88 с.
8. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970. – 296 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Ольга Стефановна Зуева, Юрий Федорович Зуев,
Тамара Александровна Серебренникова
УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
Методические указания к лабораторным работам
по курсу «Физика»
(Кафедра «Физика» КГЭУ)

Редактор издательского отдела Н.Г. Приклонская
Изд. лиц. ИД № 03480 от 08.12.00. Подписано в печать . . .
Формат 60x84/16. Гарнитура “Times”. Вид печати РОМ.
Физ. печ. л. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. .
Тираж экз. Заказ №

Издательский отдел КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51
Типография КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51