

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ  
В ОДНОРОДНЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ  
СРЕДАХ**

**программа, методические указания  
и контрольное задание**

Для студентов заочной формы обучения направления  
подготовки «Электроника и наноэлектроника»  
профиля «Промышленная электроника»  
квалификации бакалавр

**Казань 2015**

УДК 621.3  
ББК 31.2  
Э45

**Э45 Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах:** программа, методические указания и контрольное задание. / Сост.: Ю.Г. Кубарев, Л.А. Сурай, Ю.Н. Ерашова – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2015 – 64 с.

Приведены общие рекомендации по работе над дисциплиной, программа и методические указания по изучению дисциплины «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах», контрольные задания.

Предназначено для студентов заочной формы обучения направления подготовки «Электроника и наноэлектроника» профиля «Промышленная электроника», квалификации бакалавр

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» относится к математическому и естественнонаучному циклу основной образовательной программы подготовки бакалавров по направлению подготовки «Электроника и наноэлектроника», профиля подготовки «Промышленная электроника». Содержание дисциплины и последовательность изложения материала в целом соответствуют программе данной дисциплины.

В соответствии с действующими учебными планами студенты изучают дисциплину «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» и должны выполнить контрольное задание в 6 семестре.

Предлагаемые задания охватывают весь основной материал дисциплины и соответствуют программе, утвержденной Министерством образования и науки Российской Федерации.

Последовательность изучения дисциплины изложена в программе, которая представлена ниже.

## ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» является изучение основ теории электрических и магнитных полей, электротехнических и электронных устройств, приобретение определенных навыков по расчету электромагнитных полей в однородных и распределенных средах.

В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие компетенции:

- способность стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
- способность использовать основные положения и методы социальных, гуманитарных и экономических наук при решении социальных и профессиональных задач, анализировать социально-значимые проблемы и процессы;
- способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики;
- способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат;

- способность владеть методами решения задач анализа и расчета характеристик электрических цепей;
- способность владеть основными приемами обработки и представления экспериментальных данных;
- способность осуществлять сбор и анализ исходных данных для расчета и проектирования электронных приборов, схем и устройств различного функционального назначения;
- способность строить простейшие физические и математические модели приборов, схем, устройств и установок электроники и наноэлектроники различного функционального назначения, а также использовать стандартные программные средства их компьютерного моделирования.

## **МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП БАКАЛАВРИАТА**

Дисциплина "Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах" относится к математическому и естественнонаучному циклу основной образовательной программы подготовки бакалавров по направлению подготовки «Электроника и наноэлектроника», профиля подготовки «Промышленная электроника».

Дисциплина «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» базируется на следующих дисциплинах: «Физика», «Математика», «Теоретические основы электротехники».

Знания, полученные по освоению дисциплины «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах», необходимы при выполнении выпускной квалификационной работы и изучении дисциплин «Физические основы электроники», «Схемотехника».

## **РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

В результате освоения дисциплины «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» обучающийся должен:

- 1) знать:
  - основные источники научно-технической информации;
  - основы естественных наук и математики;
  - основные математические приложения и физические законы, явления и процессы, на которых основаны принципы действия объектов профессиональной деятельности;

- методы анализа и расчета электрических цепей;
  - сущность научной проблемы и научной задачи; виды теоретического и экспериментального исследования; нормативные правовые документы в своей профессиональной деятельности; основы статистики и современные программные средства, применяемые для обработки и представления экспериментальных данных;
  - методы расчета схем и устройств различного функционального назначения;
  - простейшие физические и математические модели и стандартные программные средства компьютерного моделирования;
- 2) уметь:
- определять индивидуальную образовательную траекторию;
  - применять основные положения, законы и методы естественных наук и математики для понимания научной картины мира;
  - логически верно, аргументировано использовать изученные методы решения для анализа и расчета электрических цепей;
  - методы анализа и расчета электрических цепей;
  - осуществлять сбор и анализ исходных данных для расчета и проектирования электронных приборов, схем и устройств различного функционального назначения;
  - логически верно, аргументированно использовать физические и математические модели и стандартные программные средства компьютерного моделирования;
- 3) владеть:
- способами решения социальных и профессиональных задач в категориях знания социальных, гуманитарных и экономических наук;
  - представлением о современной научной картине мира;
  - методами физико-математического анализа для решения естественнонаучных задач, решения типовых задач в рамках профессиональной деятельности;
  - механизмом составления основных математических уравнений для решения поставленной задачи;
  - механизмом построения простейших физических и математических моделей и стандартными программными средствами компьютерного моделирования.

**ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ  
«ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНЫХ И  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ»**

**Структура дисциплины**

Семестр	Форма промежуточной аттестации	Форма самостоятельной работы	Часы учебных занятий				
			Всего	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
6	зачет	контрольная работа	108	6	10	0	92

**СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ**

**6 СЕМЕСТР**

**Раздел 1. Электромагнитное поле в распределенных средах.**

Основные понятия об электрических цепях с распределенными параметрами. Однородные линии. Первичные параметры. Уравнения линии с распределенными параметрами или телеграфные уравнения. Периодический режим в однородной линии. Коэффициент распространения волны. Решение телеграфных уравнений. Волновое сопротивление линии. Вторичные параметры. Коэффициент затухания и коэффициент фазы. Длина волны, волновое число и фазовая скорость. Прямая и обратная волна. Уравнения линии в гиперболических функциях. Зависимость вторичных параметров от частоты. Входное сопротивление линии. Вторичные параметры в режимах холостого хода и короткого замыкания. Режимы работы линии с потерями. Согласованная и несогласованная нагрузка. Коэффициент отражения. КПД передачи энергии по линии. Линии без искажений. Коэффициент затухания и фазовая скорость в линиях без искажений. Уравнения линии без потерь. Коэффициент распространения и коэффициент затухания в линиях без потерь. Режим согласованной нагрузки. Режим несогласованной нагрузки в линии без потерь. Коэффициенты стоячей и бегущей волны. Стоячие волны. Способы согласования линии без потерь с нагрузкой. Условия согласования. Понятие шлейфа. Четверть волновой трансформатор.

## Раздел 2. Электромагнитное поле в однородных средах.

Векторный анализ электромагнитного поля. Основные законы и уравнения электромагнитного поля. Закон сохранения заряда. Электростатическое поле. Ток смещения. Методы расчета электростатического поля: расчет поля с использованием теоремы Гаусса, расчет электрического поля с использованием уравнений Пуассона и Лапласа. Магнитное поле постоянного тока. Основные характеристики магнитного поля. Намагниченность. Непрерывность магнитного потока. Закон полного тока. Закон электромагнитной индукции. Уравнения Максвелла. Векторный и скалярный потенциалы. Переменное электромагнитное поле. Теорема Умова-Пойнтинга и пример ее применения для расчета величины и направления передачи энергии от источника к нагрузке по коаксиальному кабелю. Волновое уравнение. Электромагнитные волны. Электромагнитные волны в диэлектриках. Плоская волна в проводящей среде. Поверхностный эффект. Сопротивление проводника при сильно выраженном поверхностном эффекте.

## 6 СЕМЕСТР

### Содержание обзорных лекций

Ном. лек.	Темы лекций
1	Электромагнитное поле в распределенных средах
2	Режимы работы линии без потерь
2	Методы расчета электромагнитных полей

### Практические занятия

Ном. зан.	Темы занятий
1	Расчет параметров в распределенных средах
2	Расчет и графическое изображение действующих значений напряжения и тока вдоль длинных линий
3	Расчет согласующих устройств длинных линий
4	Расчет основных характеристик электромагнитных полей
5	Расчет характеристик электромагнитных полей в проводниках при учете поверхностного эффекта

## **ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ»**

Работа студента над дисциплиной «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» складывается из следующих элементов: самостоятельное изучение разделов и тем дисциплины по учебным пособиям с последующей самопроверкой и решением типовых задач; индивидуальные консультации (очные и письменные); посещение лекций и практических занятий; сдача дифференцированного зачета.

### **Самостоятельная работа с книгой**

Начинать изучение дисциплины необходимо с рассмотрения его содержания по программе, затем приступить к изучению отдельных тем. Сначала знакомятся с содержащимися в данной теме вопросами, их последовательностью, а затем уже приступают к изучению содержания темы. При изучении курса студентам необходимо составлять конспект, в который следует заносить все основные понятия и закономерности рассматриваемой темы, определения, формулы, выводы. Для более глубокого и прочного усвоения материала необходимо вникать в сущность того или иного вопроса.

Переходить, к изучению новой темы следует только после полного изучения теоретических вопросов, выполнения самопроверки и решения задач по предыдущей теме.

### **Самопроверка**

Закончив изучение темы, необходимо ответить на контрольные вопросы, которые акцентируют внимание на наиболее важных вопросах темы. При этом надо стараться не пользоваться конспектом или учебником. Частое обращение к конспекту показывает недостаточное усвоение основных вопросов темы. Необходимость частого обращения к учебнику показывает неумение правильно конспектировать основные понятия и закономерности темы. Необходимо внести коррективы в конспект, который поможет при повторении материала в период подготовки к зачету.

Достаточно полный перечень вопросов для самопроверки, кроме настоящего пособия, даны в учебниках [4], [5] и в учебных пособиях [6], [7]. В пособиях [6], [7] приведены задачи с решениями по всей дисциплине. Для лучшего усвоения дисциплины рекомендуется просмотреть решения этих задач.



### **Контрольные задания**

В процессе изучения дисциплины студенту необходимо выполнить контрольную работу. Задачи контрольной работы необходимо выполнять по мере изучения соответствующих тем дисциплины. Неудача при решении задач контрольной работы показывает, что тема не проработана или не решено достаточное количество задач по этой теме. Нужно вернуться к рассмотрению основных положений этой темы, еще раз внимательно разобрать решение типовых задач.

Контрольная работа должна выполняться самостоятельно, поскольку она является формой методической помощи студентам при изучении дисциплины. Преподаватель-рецензент указывает студенту на недостатки в усвоении им материала дисциплины, что позволяет устранить эти недостатки к зачету.

Варианты контрольных заданий и необходимая литература приведены в конце настоящего пособия.

### **Консультации**

В случае возникновения затруднения при изучении теоретической части дисциплины, ответе на контрольные вопросы или решении задач следует обращаться за письменной или устной консультацией к преподавателю на кафедру ТОЭ КГЭУ. При этом необходимо точно указать вопрос, вызывающий затруднение, и место в учебнике, где он разбирается.

### **Лекции**

В период установочной или экзаменационной сессии студентам читаются лекции обзорного характера, на которых дается обзор наиболее важных тем и разделов дисциплины, а также рассматриваются вопросы, недостаточно полно или точно освещенные в учебной литературе или вызывающие затруднения у большого числа студентов.

### **Дифференцированный зачет**

К сдаче дифференцированного зачета по дисциплине допускаются студенты, имеющие зачетные контрольные работы.

## **УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **а) основная литература:**

1. Башарин С.А. Теоретические основы электротехники. Теория электрических цепей и электромагнитного поля: учебное пособие / С.А. Башарин, В.В. Федоров – 3-е изд., испр. – М. : Академия, 2008. – 304с.

2. Атабеков Г.И. Основы теории цепей : учебник/ Г. И. Атабеков - Москва: Лань, 2009. -432 с.
3. Арсеньев Г.Н. Основы теории цепей. Практикум: учебное пособие / Г.Н. Арсеньев, И.И. Градов – М. : ИНФРА-М, 2007. – 336 с.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. 11-е изд. Гардарики, 2007. – 701 с.
5. Аполлонский С.М. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле [Электронный ресурс] / С. М. Аполлонский - Москва : Лань, 2012. - 592 с. : рис. – есть электронный ресурс Издательского дома «Лань». Режим доступа <http://e.lanbook.com>

**б) дополнительная литература:**

6. Сурай Л.А. Теория электрических цепей с распределенными параметрами в примерах и задачах. Учебное пособие по курсу «Теоретические основы электротехники. »/ Л.А Сурай. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2005.-100 с.
7. Сурай Л.А. Теория электростатического поля в примерах и задачах: Учебное пособие по дисц. «Теоретические основы электротехники»/ Л.А Сурай, А.А. Наумов, Е.К. Жигалко.- Казань: КГЭУ, 2011.-63 с.
8. Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учебное пособие / Коровкин Н.В., Селина Е.Е., Чечурин В.Л. – М.: Питер, 2006. – 512 с.
9. Сборник задач по теоретическим основам электротехники : Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки "Электроэнергетика и электротехника" и "Электроника и микроэлектроника" ; в 2 т." Т. 2 : Электрические цепи с распределенными параметрами. Электромагнитное поле/ [П. А. Бутырин, Л. В. Алексейчик, С. А. Важнов и др.]. -М.: Издательский дом МЭИ, 2012. -571 с. – есть электронный ресурс Издательского дома «Лань». Режим доступа <http://e.lanbook.com>

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ  
ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В  
ОДНОРОДНЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ» В 6 СЕМЕСТРЕ**

**РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНЫХ И  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ**

**Общие сведения**

К цепям с распределенными параметрами относятся длинные линии электропередачи, линии телеграфной и телефонной связи, линии

телеуправления и телеизмерения, антенны радиопередатчиков и радиоприемников, обмотки электрических машин и трансформаторов и др. Эти цепи называются цепями с распределенными параметрами, так как электрическое поле, магнитное поле и потери энергии распределены вдоль всех участков цепи. Для исследования процессов в длинных линиях необходимо, строго говоря, пользоваться не теорией электрических цепей, а теорией электромагнитного поля. Но исследование процессов в линиях методами электромагнитного поля – достаточно сложная задача, поэтому используется упрощенная теория, которая затрагивает исследование электромагнитного поля между проводами и в проводах, а основывается на уже известных понятиях о напряжениях, токах, сопротивлениях, индуктивностях и емкостях. Если рассматривать двухпроводную однородную линию, каждый элементарный участок однородной линии длиной  $dx$  будет иметь индуктивность  $L_0 dx$ , активное сопротивление  $R_0 dx$ , емкость  $C_0 dx$  и активную проводимость  $g_0 dx$ . Здесь  $L_0$ ,  $C_0$ ,  $R_0$  и  $g_0$  – параметры однородной линии на единицу ее длины, которые называют первичными параметрами.

Найти распределение тока  $i$  в проводах и напряжение  $u$  между проводами линии в любой момент времени  $t$  – это значит составить зависимости  $i(x, t)$  и  $u(x, t)$ , где  $x$  – координата поперечного сечения или, говоря короче, точка линии. Координату  $x$  отсчитывают от начала линии, конца линии или любой другой выбранной точки линии. При этом будем считать началом однородной линии точку подключения генератора (источника питания), а концом – точку подключения приемника (сопротивления нагрузки).

Характер распределения напряжения  $u$  и тока  $i$  вдоль однородной линии в любой момент времени описывается системой уравнений:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt},$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 u + C_0 \frac{du}{dt},$$

где координата  $x$  отсчитывается от начала линии.

Для величин, изменяющихся по синусоидальному закону, эти уравнения после некоторых преобразований в комплексной форме имеют вид:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \dot{U} = 0;$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \dot{I} = 0.$$

Общее решение этих уравнений таково:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} = \dot{U}_{\text{пр}} + \dot{U}_{\text{обр}},$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}x} = \dot{I}_{\text{пр}} - \dot{I}_{\text{обр}},$$

где  $\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$ ,  $\dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий в начале линии ( $x=0$ ) и в конце линии длиной  $l$  ( $x=l$ );  $\dot{U}_{\text{пр}}$ ,  $\dot{I}_{\text{пр}}$  – напряжение и ток прямой волны;  $\dot{U}_{\text{обр}}$ ,  $\dot{I}_{\text{обр}}$  – напряжение и ток обратной волны;  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta$  – коэффициент распространения, где  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициент затухания и коэффициент фазы;  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  – продольное сопротивление линии на единицу длины;  $\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0$  – поперечная проводимость линии на единицу длины;  $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = Z_c e^{j\theta}$  – волновое (характеристическое) сопротивление.

Мгновенные значения напряжения и тока равны:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \text{Im} \left[ \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_1 - \beta x)} + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_2 + \beta x)} \right] = \\ &= \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x) = u_{\text{пр}} + u_{\text{обр}}; \\ i(x,t) &= \text{Im} \left[ \frac{\sqrt{2} A_1}{\underline{Z}_c} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_1 - \beta x)} - \frac{\sqrt{2} A_2}{\underline{Z}_c} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_2 + \beta x)} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2} A_1}{Z_c} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x - \theta) - \frac{\sqrt{2} A_2}{Z_c} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x - \theta) = \\ &= i_{\text{пр}} - i_{\text{обр}}. \end{aligned}$$

Фазовая скорость  $\vartheta_{\phi} = \omega/\beta$ . Длина волны  $\lambda = \vartheta_{\phi} / f = 2\pi / \beta$ , где  $f = 1/T$  – частота тока;  $T$  – период. Определив из граничных условий в начале линии постоянные интегрирования (при  $x=0$ ,  $\dot{U} = \dot{U}_1$ ,  $\dot{I} = \dot{I}_1$ ), получим:

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 + \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2} e^{\gamma x};$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1 + \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2\underline{Z}_c} e^{\gamma x}.$$

Сгруппировав члены правой части этих уравнений и введя гиперболические функции, получим:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \underline{Z}_c \dot{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I} = -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x. \end{cases}$$

При отсчете расстояния текущей точки от конца линии (то есть, когда известны  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  в конце линии) уравнения линии принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I} = -\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x. \end{cases}$$

Мощности генератора и приемника равны, соответственно

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \dot{U}_1^* \dot{I}_1; \quad \underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \dot{U}_2^* \dot{I}_2.$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_H \operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$$

Для режима холостого хода (ХХ):

$$\begin{cases} \dot{U}_x = \dot{U}_{2x} \operatorname{ch} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I}_x = \frac{\dot{U}_{2x}}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \end{cases}$$

$$\underline{Z}_x = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{I}_{1x}} = \underline{Z}_c \operatorname{cth} \underline{\gamma} l = \underline{Z}_c \operatorname{cth}(\alpha l + j\beta l),$$

где  $\underline{Z}_x$  – входное сопротивление линии для режима холостого хода.

Для режима короткого замыкания (КЗ):

$$\begin{cases} \dot{U}_k = \underline{Z}_c \dot{I}_{2k} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I}_k = \dot{I}_{2k} \operatorname{ch} \underline{\gamma} x; \end{cases}$$

$$\underline{Z}_k = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\gamma} l = \underline{Z}_c \operatorname{th}(\alpha l + j\beta l),$$

где  $\underline{Z}_k$  – входное сопротивление линии для режима короткого замыкания.

Отсюда следует, что  $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_k \underline{Z}_x}$ ,

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_x}}, \quad \underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_x \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_x}.$$

При несогласованной нагрузке в линии возникает обратная волна. Вводят коэффициент отражения  $\underline{N}$ :

$$\underline{N} = \frac{\dot{U}_{2\text{обр}}}{\dot{U}_{2\text{пр}}} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c} = n e^{j\nu}, \text{ и тогда } \underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{N} e^{-2\underline{\gamma} l}}{1 - \underline{N} e^{-2\underline{\gamma} l}}.$$

При согласованной нагрузке, то есть, когда  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c = \underline{Z}_{\text{вх}}$ , обратной волны нет:

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{пр}}; \quad \dot{I} = \dot{I}_{\text{пр}}; \quad \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_c = Z_c e^{j\theta};$$

$$P = UI \cos \theta; \quad Q = UI \sin \theta;$$

$$\alpha l = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2};$$

$$\beta l = \Psi_{u_1} - \Psi_{u_2} = \Psi_{i_1} - \Psi_{i_2};$$

$$\underline{\gamma} l = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}.$$

Для неискажающей линии ( $\alpha = \text{const}$ ;  $\vartheta_\Phi = \text{const}$ ) должно выполняться соотношение

$$R_0/L_0 = g_0/C_0.$$

Тогда

$$\alpha = \sqrt{R_0 g_0} = g_0 Z_c; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad \vartheta_\Phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}; \quad \underline{Z}_c = Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

В линии без потерь ( $R_0 = 0$ ;  $g_0 = 0$ )  $\underline{Z}_c = Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  – чисто

активное

сопротивление. В воздушной линии без потерь  $\vartheta_\Phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = c = 3 \cdot 10^8$

м/с, а в кабеле без потерь, изоляция которого имеет относительные диэлектрическую  $\epsilon$  и магнитную  $\mu$  проницаемости,  $\vartheta_\Phi = c / \sqrt{\epsilon \mu}$ . Для воздушной двухпроводной линии:

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln \frac{d}{r_0}}, \quad L_0 = \frac{\mu \mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0};$$

где  $d$  – расстояние между проводами;  $r_0$  – радиус провода. Для коаксиального кабеля

$$L_0 = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad C_0 = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где  $r_1$  – радиус жилы;  $r_2$  – внутренний радиус оболочки. Напряжение и ток в линии и входное сопротивление равны:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x + j \underline{Z}_c \dot{I} \sin \beta x; \\ \dot{U} = j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x + \dot{I}_2 \cos \beta x; \end{cases}$$

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_H + j \underline{Z}_c \operatorname{tg} \beta l}{\underline{Z}_c + j \underline{Z}_H \operatorname{tg} \beta l} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{N} e^{-j2\beta l}}{1 - \underline{N} e^{-j2\beta l}}.$$

При согласованной нагрузке  $\underline{Z}_H = R_H = \underline{Z}_c = \underline{Z}_{\text{BX}} = R_{\text{BX}}$  и  $\underline{N} = 0$  нет обратной волны:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta x}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{j\beta x} = \dot{I}_2 e^{j\beta x}; \quad \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \underline{Z}_c;$$

$$u = U_{2m} \sin(\omega t + \beta x); \quad i = \frac{U_{2m}}{\underline{Z}_c} \sin(\omega t + \beta x).$$

В режиме холостого хода ( $\underline{N} = 1$ ):

$$\dot{U}_x = \dot{U}_{2x} \cos \beta x; \quad \dot{I}_x = j \frac{\dot{U}_{2x}}{\underline{Z}_c} \sin \beta x;$$

$$u = U_{2m} \cos \beta x \cdot \sin \omega t; \quad i = \frac{U_{2m}}{\underline{Z}_c} \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + 90^\circ).$$

В узлах напряжения выполняется соотношения:  $U_{\min} = 0$ ,  $I_{\max} = U_2/\underline{Z}_c$  В пучностях напряжения  $U_{\max} = U_2$ ,  $I_{\min} = 0$  Выражения для напряжения и тока в любой точке примут вид:

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{\dot{U}_2}{2} e^{j\beta x} + \frac{\dot{U}_2}{2} e^{-j\beta x} = \dot{U}_{\text{пр}} + \dot{U}_{\text{обр}}; \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{2\underline{Z}_c} e^{j\beta x} - \frac{\dot{U}_2}{2\underline{Z}_c} e^{-j\beta x} = \dot{I}_{\text{пр}} - \dot{I}_{\text{обр}}; \end{cases}$$

$$U_{\text{пр}} = U_{\text{обр}} = \frac{U_2}{2}; \quad I_{\text{пр}} = I_{\text{обр}} = \frac{U_2}{2\underline{Z}_c}.$$

Входное сопротивление  $\underline{Z}_x = -j \underline{Z}_c \operatorname{ctg} \beta l$ . В режиме короткого замыкания ( $\underline{N} = -1$ )



$$\begin{aligned}\dot{U} &= jZ_c \dot{I}_2 \sin \beta x; & \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x; \\ u &= I_{2m} Z_c \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + 90^\circ); \\ i &= I_{2m} \cos \beta x \cdot \cos \omega t, & \underline{Z}_K &= jZ_c \operatorname{tg} \beta x.\end{aligned}$$

При произвольной нагрузке:

$$\begin{aligned}U_{\max} &= U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}} = Z_c I_{\max}; \\ U_{\min} &= U_{\text{пр}} - U_{\text{обр}} = Z_c I_{\min}; \\ I_{\max} &= I_{\text{пр}} + I_{\text{обр}} = \frac{U_{\max}}{Z_c}; \\ I_{\min} &= I_{\text{пр}} - I_{\text{обр}} = \frac{U_{\min}}{Z_c}.\end{aligned}$$

Коэффициент бегущей волны:

$$k_\sigma = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{1-n}{1+n}.$$

Входное сопротивление – чисто активное в точках, где напряжение минимальное, а ток максимальный и наоборот.

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = \frac{Z_c I_{\min}}{I_{\max}} = Z_c k_\sigma; \quad \underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}} = \frac{Z_c I_{\max}}{I_{\min}} = Z_c k_c,$$

где  $k_c = 1/k_\sigma$  – коэффициент стоячей волны.

При комплексном сопротивлении нагрузки распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии без потерь определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{U_{2m}^2 \cos^2 \beta x + Z_c^2 I_{2m}^2 \sin^2 \beta x + U_{2m} Z_c I_{2m} \sin \varphi_2 \sin 2\beta x}; \\ I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{I_{2m}^2 \cos^2 \beta x + \frac{U_{2m}^2}{Z_c^2} \sin^2 \beta x - \frac{U_{2m} I_{2m}}{Z_c} \sin \varphi_2 \sin 2\beta x},\end{aligned}$$

где  $\varphi_2$  – аргумент сопротивления нагрузки.

### Методические указания к изучению раздела 1

При изучении раздела 1 для лучшего усвоения теоретических вопросов рекомендуется использовать учебники [1], [2], [4] и [5]. После полного

изучения теоретических вопросов следует приступать к разбору типовых задач, используя при этом учебные пособия [3], [6], [8] и [9]. При изучении электромагнитных полей в распределенных средах следует учесть их определенную общность с электромагнитными полями в однородных средах и с электрическими цепями переменного тока.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Первичные параметры воздушной линии при частоте сигнала  $f = 800$  Гц имеют следующие значения:  $R_0 = 2,52$  Ом/км;  $L_0 = 2$  мГн/км;  $C_0 = 6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км;  $g_0 = 1 \cdot 10^{-6}$  См/км. Определите волновое сопротивление  $\underline{Z}_c$ , Ом, коэффициент распространения  $\underline{\gamma}$ , фазовую скорость  $\vartheta_\phi$ , км/с, и длину волны  $\lambda$ , км.

**Решение.** 1. Волновое сопротивление линии равно

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \frac{\sqrt{2,52 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = 585e^{-j6^\circ 5'} \text{ Ом.}$$

2. Коэффициент распространения равен

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{10,3e^{j75^\circ 55'} \cdot 30 \cdot 10^{-6} e^{j88^\circ 5'}} = 1,76 \cdot 10^{-2} e^{j82^\circ} = \\ &= (0,245 + j1,74) \cdot 10^{-2} \text{ 1/км.} \end{aligned}$$

3. Фазовая скорость равна

$$\vartheta_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{1,74 \cdot 10^{-2}} = 289000 \text{ км/с.}$$

4. Длина волны равна

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1,74 \cdot 10^{-2}} = 362 \text{ км.}$$

**Задача 2.** Кабель длиной  $l = 80$  км имеет следующие первичные параметры:  $\underline{R}_0 = 11,4$  Ом/км;  $L_0 = 0,6 \cdot 10^{-3}$  Гн/км;  $C_0 = 38 \cdot 10^{-9}$  Ф/км;  $g_0 = 0,8 \cdot 10^{-8}$  См/км. Для частоты  $f_1 = 300$  Гц найдите волновое сопротивление  $\underline{Z}_c$ , Ом/км, коэффициент затухания  $\alpha$ , Нп/км, коэффициент фазы  $\beta$ , рад/км, фазовую скорость  $\vartheta_\phi$ , км/с; определите задержку во времени при прохождении на заданных частотах сигнала по всей линии.

**Решение.** 1. Для частоты  $f = 300$  Гц продольное сопротивление  $\underline{Z}_0$  и поперечная проводимость  $\underline{Y}_0$  равны:

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 11,4 + j2\pi \cdot 300 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} = 11,4 + j1,13 = 11,5 \cdot e^{j5^\circ 40'} \text{ Ом/км};$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_0 &= g_0 + j\omega C_0 = 0,8 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 300 \cdot 38 \cdot 10^{-9} = \\ &= (0,8 + j71,6) \cdot 10^{-6} = 71,6 \cdot 10^{-6} e^{j89^\circ 20'} \text{ См/км}; \end{aligned}$$

2. Волновое сопротивление равно

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{11,5 e^{j5^\circ}}{71,6 \cdot 10^{-6} e^{j89^\circ 20'}}} = 400 e^{-j41^\circ 50'} \text{ Ом/км}.$$

3. Коэффициент распространения

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{11,5 e^{j5^\circ 40'} \cdot 71,6 \cdot 10^{-6} e^{j89^\circ 20'}} = 28,8 \cdot 10^{-3} e^{j47^\circ 30'} = \\ &= (19,5 + j21,3) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}. \end{aligned}$$

Отсюда  $\alpha = 0,0195$  Нп/км;  $\beta = 0,0213$  рад/км.

4. Фазовая скорость

$$\vartheta_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 300}{0,0213} = 88000 \text{ км/с}.$$

5. Время прохождения сигнала по линии

$$t = \frac{l}{\vartheta_\phi} = \frac{80}{88000} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

**Задача 3.** Вторичные параметры двухпроводной стальной линии при частоте  $f = 800$  Гц равны:  $\underline{Z}_c = 1510 e^{j20^\circ 21'}$  Ом,  $\alpha = 13,6$  мН/км,  $\beta = 36,4$  мрад/км. Длина линии  $l = 38$  км. Линия не согласована с нагрузкой, сопротивление которой  $\underline{Z}_H = 1355 e^{j21^\circ 5'}$  Ом. Напряжение на входе линии  $U_1 = 10$  В. Определите напряжение и ток в нагрузке  $\dot{U}_2$ , В,  $\dot{I}_2$ , мА. Определите ток в начале линии  $\dot{I}_1$ , мА, а также входное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{вх}}$ , Ом, нагруженной линии; активную мощность, расходуемую в нагрузке  $P_2$ , мВт, и подводимую к линии  $P_1$ , мВт, КПД линии  $\eta$  и коэффициент отражения  $\underline{N}$ .

**Решение.** 1. Предварительно вычислим значения  $\underline{\gamma}l$ ,  $\text{sh}\underline{\gamma}l$  и  $\text{ch}\underline{\gamma}l$ :

$$\underline{\gamma}l = \alpha l + j\beta l = 13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38 + j36,4 \cdot 10^{-3} \cdot 38 = 0,505 + j1,385;$$

$$\text{sh}\underline{\gamma}l = \text{sh}(0,505 + j1,385) = 1,114e^{j85^\circ};$$

$$\text{ch}\underline{\gamma}l = \text{ch}(0,505 + j1,385) = 0,56e^{j68^\circ 3'}.$$

2. Определим напряжение в конце линии:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \text{sh}\underline{\gamma}l.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{\dot{U}_1}{\text{ch}\underline{\gamma}l + (\underline{Z}_c / \underline{Z}_H) \text{sh}\underline{\gamma}l} = \frac{10}{0,56e^{j58^\circ 3'} + \frac{1510e^{-j20^\circ 21'}}{1355e^{j21^\circ 5'}} \cdot 1,114e^{j85^\circ}} = \\ &= 5,78e^{-j52^\circ 15'} \text{ В.} \end{aligned}$$

3. Определим ток в нагрузке:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{5,78e^{-j52^\circ 15'}}{1355e^{j21^\circ 5'}} = 4,27e^{-j73^\circ 20'} \text{ МА.}$$

4. Определим ток в начале линии:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh}\underline{\gamma}l + \dot{I}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l = \frac{5,78e^{-j52^\circ 15'}}{1510e^{-j20^\circ 21'}} \cdot 1,114e^{j85^\circ} + \\ &+ 4,27e^{-j73^\circ 20'} \cdot 0,56e^{j68^\circ 3'} = 5,78e^{j32^\circ 50'} \text{ МА.} \end{aligned}$$

5. Входное сопротивление нагруженной линии равно:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{10}{5,78 \cdot 10^{-3} e^{j32^\circ 50'}} = 1732e^{-j32^\circ 50'} \text{ Ом.}$$

6. Активные мощности  $P_1$  и  $P_2$  на входе и в нагрузке, КПД линии  $\eta$  равны:

$$P_1 = \text{Re} \left[ \dot{U}_1 \dot{I}_1^* \right] = \text{Re} \left[ 10 \cdot 5,78e^{-j32^\circ 50'} \right] = 48,6 \text{ мВт};$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_2 I^* \right] = \operatorname{Re} \left[ 5,78e^{-52^\circ 15'} \cdot 4,27e^{j73^\circ 20'} \right] = 23,1 \text{ мВт};$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0,475.$$

7. Определим коэффициент отражения:

$$\underline{N} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C} = \frac{1355e^{j21^\circ 5'} - 1510e^{-j20^\circ 21'}}{1355e^{j21^\circ 5'} + 1510e^{-j20^\circ 21'}} = 0,382e^{j98^\circ 30'}.$$

**Задача 4.** Линия включена на напряжения  $\dot{U}_1 = 120e^{j60^\circ}$  с частотой  $f = 10$  кГц. Длина линии  $l = 15$  км. Вторичные параметры линии  $\underline{Z}_C = 500e^{j20^\circ}$  Ом,  $\underline{\gamma} = 0,5e^{j78^\circ 30'}$  1/км. Линия согласована с нагрузкой. Постройте график распределения напряжения вдоль линии в моменты времени, когда напряжение на входе  $U_1$  равно нулю и половине амплитуды  $\frac{U_{1m}}{2}$ . Постройте зависимость действующих значений  $U$  и  $I$  от расстояния. Постройте графики напряжений в функции времени на входе линии  $u_1(t)$  и на нагрузке  $u_2(t)$ .

**Решение.** 1. Для режима согласованной нагрузки при отсчете от начала линии напряжение  $\dot{U}$ , В, и ток  $\dot{I}$ , А, определяются так:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 e^{-\underline{\gamma}x} = 120e^{-0,1x} e^{j(60^\circ - 0,49 \cdot 57,3^\circ \cdot x)} = 120e^{-0,1x} e^{j(60^\circ - 28^\circ \cdot x)} \text{ В};$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{120}{500} e^{-0,1x} e^{j(40^\circ - 0,49 \cdot 57,3^\circ \cdot x)} = 0,24e^{-0,1x} e^{j(40^\circ - 28^\circ \cdot x)} \text{ А}.$$

2. Определим момент времени, когда напряжения на входе равно нулю:

$$u_1 = 120\sqrt{2}e^{-0,1x} \sin \omega t_1 + 60^\circ - 28^\circ \cdot x .$$

Отсюда при  $x = 0$  находим  $U_1 = 0$ ;  $\sin \omega t_1 + 60^\circ = 0$ . Тогда при  $k = 0$

$$\omega t_1 + 60^\circ = k \cdot 180^\circ \text{ и } \omega t_1 = -60^\circ .$$

Изменение напряжения вдоль линии в момент времени  $t_1$  (рис. 1.1) определяется выражением:

$$u_1(x, t_1) = 120\sqrt{2}e^{-0,1x} \sin -60^\circ + 60^\circ - 28^\circ \cdot x = 120\sqrt{2}e^{-0,1x} \cdot \sin -28^\circ \cdot x .$$

3. Определим момент времени, когда напряжение на входе равно половине амплитуды. При  $x=0$   $u_2 = 120\sqrt{2}/2$ .

Тогда

$$\frac{120\sqrt{2}}{2} = 120\sqrt{2} \sin \omega t_2 + 60^\circ ; \sin \omega t_2 + 60^\circ = 0,5; \omega t_2 + 60^\circ = 30^\circ .$$

Отсюда  $\omega t_2 = -30^\circ$ . Изменение напряжения вдоль линии в момент времени  $t_2$  (рис. 1.1) определяется выражением:

$$u_2(x, t_2) = 120\sqrt{2}e^{-0,1x} \sin -30^\circ + 60^\circ - 28^\circ \cdot x = 120\sqrt{2}e^{-0,1x} \sin 30^\circ - 28^\circ \cdot x .$$

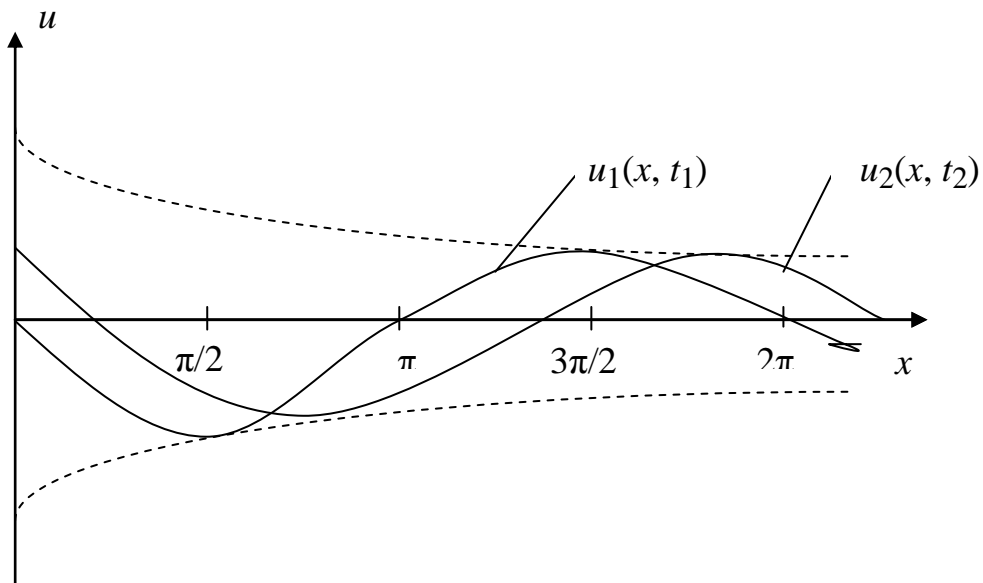


Рис. 1.1. График изменения напряжения вдоль линии в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

4. Определим зависимость действующих значений напряжения и тока от координаты:

$$U = 120e^{-0,1x} \text{ В};$$

$$I = 0,24e^{-0,1x} \text{ А.}$$

5. Определим зависимость напряжения от времени в начале и в конце линии. При  $x = 0$

$$u_1 = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60^\circ \text{ В.}$$

При  $x = 15 \text{ км}$

$$u_2 = 120\sqrt{2}e^{-0,1 \cdot 15} \sin \omega t + 60^\circ - 28^\circ \cdot 15 = 27\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В.}$$

**Задача 5.** Однородная линия имеет параметры  $\underline{Z}_c = 530e^{j21^\circ 30'}$  Ом и  $\underline{\gamma} = 1,335 \cdot 10^{-3} e^{j66^\circ 20'}$  1/км. Напряжение на входе линии  $U_1 = 190 \text{ кВ}$ . Длина линии  $l = 1000 \text{ км}$ . Определите токи  $\dot{I}_{1x}$ , кА,  $\dot{I}_{1к}$ , кА, в начале и ток  $\dot{I}_{2к}$ , кА, в конце линии и напряжения в конце линии  $\dot{U}_{2x}$ , кА, при ХХ и КЗ.

**Решение.** 1. В режиме холостого хода, когда  $\dot{I}_2 = 0$ , определяем напряжение в конце линии и ток в начале линии:

$$\begin{cases} \dot{U}_{1x} = \dot{U}_{2x} \operatorname{ch} \underline{\gamma} l; \\ \dot{I}_{1x} = \frac{\dot{U}_{2x}}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l, \end{cases}$$

откуда  $\dot{U}_{2x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l}$ ;  $\dot{I}_{1x} = \frac{\dot{U}_{2x}}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l$ . Вычисляем необходимые величины:

$$\underline{\gamma} l = 0,535 + j1,22;$$

$$e^{\underline{\gamma} l} = e^{0,535} \cdot e^{j1,22} = 0,584 + j1,6; \quad e^{-\underline{\gamma} l} = 0,585e^{-j70^\circ} = 0,2 - j0,55;$$

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma} l = \frac{e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l}}{2} = 1,09e^{j79^\circ 50'}; \quad \operatorname{ch} \underline{\gamma} l = \frac{e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}}{2} = 0,657e^{j53^\circ 20'}.$$

$$\text{Тогда } \dot{U}_{2x} = \frac{190}{0,657e^{j53^\circ 20'}} = 290e^{-j53^\circ 20'} \text{ кВ};$$

$$\dot{I}_{1x} = \frac{290e^{-j53^\circ 20'}}{530e^{-j21^\circ 20'}} \cdot 1,09e^{j79^\circ 50'} = 0,596e^{j47^\circ 55'} \text{ кА.}$$

2. В режиме короткого замыкания, когда  $\dot{U}_2 = 0$ , определяем токи в начале и конце линии:

$$\begin{cases} \dot{U}_{1к} = \underline{Z}_c \dot{I}_{2к} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l; \\ \dot{I}_{1к} = \dot{I}_{2к} \operatorname{ch} \underline{\gamma} l. \end{cases}$$

Отсюда определяем

$$\dot{I}_{2к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = \frac{190}{530 e^{-j21^\circ 20'} \cdot 1,09 e^{j79^\circ 50'}} = 0,328 e^{-j58^\circ 35'} \text{ кА.}$$

$$\dot{I}_{1к} = 0,328 e^{-j58^\circ 35'} \cdot 0,657 e^{j53^\circ 20'} = 0,214 e^{-j5^\circ 15'} \text{ кА.}$$

**Задача 6.** Первичные параметры двухпроводной медной телефонной линии (при  $f = 100$  кГц) таковы:  $R_0 = 14$  Ом/км,  $L_0 = 17,8 \cdot 10^{-3}$  Гн/км,  $g_0 = 5 \cdot 10^{-6}$  См/км,  $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9}$  Ф/км. Покажите, что линия является неискажающей. Определите вторичные параметры линии: волновое сопротивление  $Z_c$ , Ом.

**Решение.** 1. Условие не искажения линии выполняется, так как:

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{17,8 \cdot 10^{-3}}{14} = 1,27 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{C_0}{g_0} = \frac{6,35 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} = 1,27 \cdot 10^{-3}.$$

2. Вторичные параметры линии без искажений  $Z_c$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  равны:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{17,8 \cdot 10^{-3}}{6,35 \cdot 10^{-9}}} = 1675 \text{ Ом;}$$

$$\alpha = \sqrt{R_0 g_0} = \sqrt{14 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 8,37 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км} = 0,073 \text{ дБ/км;}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{17,8 \cdot 10^{-3} \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}} = 6,68 \text{ рад/км.}$$

**Задача 7.** Энергия передается на высокой частоте от генератора к излучающей системе с помощью фидера (линии), имеющего индуктивность  $L_0 = 1,57$  мкГн/м и емкость  $C_0 = 7,1$  пФ/м. Потерями в фидере можно пренебречь ( $R_0 = g_0 = 0$ ). Частота переменного тока  $f = 10^8$  Гц. Определите: волновое сопротивление  $Z_c$ , Ом, коэффициенты затухания  $\alpha$ , Нп/км, и фазы  $\beta$ , рад/км, длину волны  $\lambda$ , км, фазовую скорость  $\vartheta_\phi$ , км.

**Решение.** 1. Определим волновое сопротивление, коэффициенты затухания и фазы:



$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1,57 \cdot 10^{-6}}{7,1 \cdot 10^{-12}}} = 470 \text{ Ом}; \quad \alpha = 0;$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 10^8 \cdot \sqrt{1,57 \cdot 10^{-6} \cdot 7,1 \cdot 10^{-12}} = 1,2 \text{ рад/км.}$$

2. Вычислим длину волны и фазовую скорость:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2,1} = 3 \text{ м}; \quad \vartheta_{\phi} = c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с.}$$

**Задача 8.** Коаксиальный кабель имеет первичные параметры  $L_0 = 0,232$  мкГн/м;  $C_0 = 48$  пФ/м. Рассматривая кабель как линию без потерь, найдите его волновое сопротивление  $Z_c$ , Ом, и фазовую скорость волны  $\vartheta_{\phi}$ , км/с, в нем. При частоте сигнала  $f = 60$  МГц определите коэффициент распространения  $\underline{\gamma}$ , 1/м, и фазы  $\beta$ , рад/м.

**Решение.** 1. Определим волновое сопротивление и фазовую скорость:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2,32 \cdot 10^{-7}}{48 \cdot 10^{-12}}} = 70 \text{ Ом};$$

$$\vartheta_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2,32 \cdot 10^{-7} \cdot 48 \cdot 10^{-12}}} = 2,997 \cdot 10^8 \text{ км/с.}$$

2. Определим коэффициент распространения по формуле

$$\underline{\gamma} = j\omega \sqrt{L_0 C_0}, \text{ где } \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^7 = 3,77 \cdot 10^8 \text{ рад/с};$$

$$\underline{\gamma} = j3,77 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{2,32 \cdot 10^{-7} \cdot 48 \cdot 10^{-12}} = j1,257 \text{ рад/м,}$$

отсюда  $\beta = 1,257$  рад/м = 72 град/м.

**Задача 9.** Линию без потерь длиной  $l = 5$  м требуется согласовать с нагрузкой  $R_H = 5Z_c$  с помощью четвертьволнового отрезка (рис.1.2). Параметры линии: длина волны  $\lambda = 3$  м, волновое сопротивление  $Z_c = 500$  Ом. Определите волновое сопротивление  $Z_{тр}$ , Ом, этого отрезка. Приняв напряжение на нагрузке  $U_2 = 10$  В,  $f = 10^8$  Гц, вычислите напряжение  $\dot{U}_{aa}$ , В, и ток  $\dot{I}_{aa}$ , мА, на входе трансформатора. Вычислите подводимую к линии  $P_1$ , Вт, и расходуемую в нагрузке  $P_2$ , Вт, мощности.

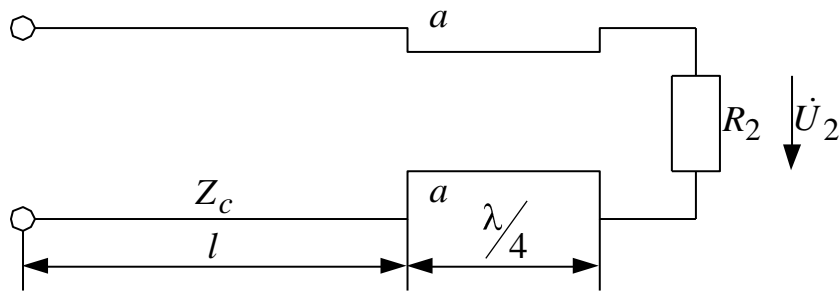


Рис. 1.2. Схема линии с четвертьволновым трансформатором.

**Решение.** 1. Коэффициент фазы  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}$ .

Длина отрезка  $l_1 = \lambda / 4 = 3 / 4 = 0,75$  м.

2. Входное сопротивление  $Z_{\text{вх}}$  нагруженной четвертьволновой линии ( $\beta l_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$ ) относительно точек  $a - a$  равно:

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{тр}} \frac{R_{\text{н}} + jZ_{\text{тр}} \operatorname{tg} \beta l_1}{Z_{\text{тр}} + jR_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta l_1} = Z_{\text{тр}} \frac{R_{\text{н}} / \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + jZ_{\text{тр}}}{Z_{\text{тр}} / \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + jR_{\text{н}}} = \frac{Z_{\text{тр}}^2}{R_{\text{н}}}.$$

Для согласования линии с нагрузкой необходимо выполнить условие  $Z_{\text{вх}} = Z_{\text{с}}$ , то есть

$$\frac{Z_{\text{тр}}^2}{R_{\text{н}}} = Z_{\text{с}},$$

отсюда  $Z_{\text{тр}} = \sqrt{Z_{\text{с}} R_{\text{н}}} = \sqrt{500 \cdot 2500} = 1120$  Ом.

3. Напряжение и ток на входе трансформатора (точки  $a - a$ ) найдем по формулам

$$\begin{aligned} \dot{U}_{aa} &= \dot{U}_2 \cos \beta l_1 + j \dot{I}_2 Z_{\text{тр}} \sin \beta l_1 = \dot{U}_2 \cos \frac{\pi}{2} + j \dot{I}_2 Z_{\text{тр}} \sin \frac{\pi}{2} = \\ &= j \frac{U_2}{R_{\text{н}}} Z_{\text{тр}} = j \frac{10}{2500} \cdot 1120 = j4,5 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{aa} = I_2 \cos \beta l_1 + j \frac{U_2}{Z_{\text{тр}}} \sin \beta l_1 = j9 \text{ мА}.$$

Так как линия согласована с нагрузкой в точках  $a - a$ , то напряжение и ток в начале линии при отсчете с конца определяем формулами

$$\dot{U}_1 = U_{aa} e^{j\beta l}; \quad \dot{I}_1 = \frac{U_{aa}}{Z_c} e^{j\beta l}.$$

Действующие значения напряжения и тока

$$U_1 = \left| U_{aa} e^{j\beta l} \right| = U_{aa} = 4,5 \text{ В}; \quad I_1 = \left| \frac{U_{aa}}{Z_c} e^{j\beta l} \right| = I_{aa} = 9 \text{ мА}.$$

4. Подводимая к линии мощность равна

$$P_1 = U_1 I_1 \cos(\dot{U}_1 \dot{I}_1) = 4,5 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cos 0^\circ \cong 40 \cdot 10^{-3}.$$

Мощность, расходуемая в нагрузке, равна

$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\dot{U}_2 \dot{I}_2) = U_2 \frac{U_2}{R_H} \cdot \cos 0^\circ = \frac{10^2}{2500} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Вт, то есть } P_1 = P_2.$$

**Задача 10.** Для согласования приемника, сопротивление которого  $Z_H = 800 + j450$  Ом, с линией применяется схема, показанная на рис. 1.3. Определите наименьшую длину КЗ шлейфа  $l_{\text{ш}}$  и волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора  $Z_{\text{тр}}$ . Волновое сопротивление линии и шлейфа  $Z_c = 600$  Ом. Длина волны  $\lambda = 20$  м.

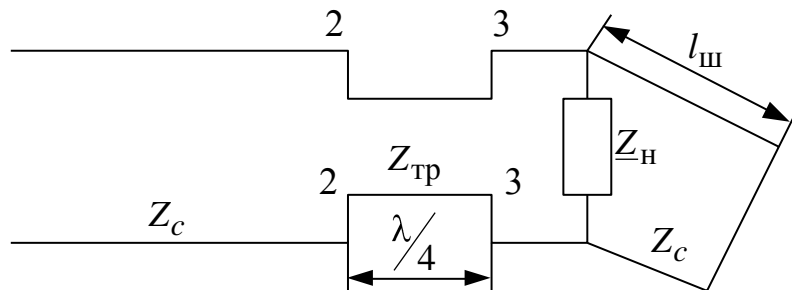


Рис. 1.3. Схема линии с согласующим устройством.

**Решение.** 1. Четвертьволновый трансформатор согласовывает только активное сопротивление. Поэтому длину шлейфа  $l_{\text{ш}}$  надо выбрать такой,

чтобы сопротивление, эквивалентное включенным параллельно сопротивлениям нагрузки  $\underline{Z}_H$  и шлейфа, было чисто активным, т.е. в уравнении

$$\frac{1}{\underline{Z}_H} + \frac{1}{\underline{Z}_{ш}} = \frac{1}{\underline{Z}_H} + \frac{1}{jZ_c \operatorname{tg} \beta l_{ш}} = g_3 - jb_3$$

необходимо иметь  $b_3 = 0$ .

Так как  $\frac{1}{\underline{Z}_H} = \frac{1}{800 + j450} = (0,95 - j0,535) \cdot 10^{-3}$ , то получим уравнение

$$b_3 = -j0,535 \cdot 10^{-3} - j \frac{1}{600 \operatorname{tg} \beta l_{ш}} = 0, \text{ где } \beta = \frac{360}{\lambda} = \frac{360}{20} = 18 \text{ }^\circ/\text{м}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \beta l_{ш} = -3,12; \beta l_{ш} = 107^\circ; l_{ш} = 5,96 \text{ м}.$$

2. Сопротивление нагрузки трансформатора

$$R_3 = \frac{1}{g_3} = \frac{1}{0,95 \cdot 10^{-3}} = 1050 \text{ Ом},$$

волновое сопротивление трансформатора

$$\underline{Z}_{тр} = \sqrt{Z_c R_3} = \sqrt{600 \cdot 1050} = 795 \text{ Ом}.$$

### Контрольные вопросы

1. Поясните за счет чего токи и напряжения вдоль линии с распределенными параметрами не одинаковы для одного и того же момента времени?

2. Дайте определение однородной линии.

3. Назовите и охарактеризуйте параметры  $L_0$ ,  $C_0$ ,  $R_0$  и  $G_0$ , входящие в уравнения однородной двухпроводной линии?

4. Поясните, почему уравнения однородной линии упрощаются для установившегося режима при синусоидальном напряжении?

5. Приведите условия, с помощью которых определяются постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ ?

6. Укажите особенности согласованного режима работы линии.

## РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

### Общие сведения

Одно из фундаментальных положений теории электромагнетизма состоит в том, что ни при каких условиях электрический заряд не возникает ниоткуда и не исчезает бесследно. Это свойство сохранения заряда может быть выражено математически в форме дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\vec{j}_{\text{пр.}} = 0,$$

которое называют еще уравнением непрерывности для тока проводимости. Здесь  $\rho$  – объемная плотность электрического заряда, а  $\vec{j}_{\text{пр.}}$  – плотность тока проводимости.

Еще одним характерным свойством электрического заряда является его квантование, т.е. в природе существует минимальный заряд – заряд электрона ( $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл), а все другие отрицательные и положительные заряды являются кратными ему, например,  $2e$ ,  $9e$ ,  $1000e$  и т.д.

Основными законами и характеристиками электростатического поля являются:

Закон Кулона: 
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}.$$

Принцип суперпозиции для электрической силы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_0 q_i}{r_{i0}^2} \left( \frac{\vec{r}_{i0}}{r_{i0}} \right).$$

Напряженность электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{q_i}{r_{i0}^2} \left( \frac{\vec{r}_{i0}}{r_{i0}} \right) = \sum_{i=1}^{N-1} \vec{E}_i.$$

Поток вектора напряженности электрического поля  $\Phi_E$ :

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}).$$

Полный поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда через сферу радиуса  $r$  равен

$$\Phi = ES = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

**Теорема Гаусса.** Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную:

$$\oint_S (\vec{E}d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i.$$

Так как  $\oint_S (\vec{E}d\vec{S}) = \int_V \text{div}\vec{E}dV$ , а  $\sum_i q_i = \int_V \rho dV$ , то получаем закон Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Отсюда следует, что силовые линии электрического поля имеют источники или стоки в тех точках пространства, где расположены электрические заряды.

Работа сил электрического поля:

$$dA = (\vec{F}d\vec{l}) = Fdl\cos\alpha = Fdr,$$

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = \frac{q_0q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Поле называется потенциальным, если работа его сил не зависит от формы пути, а зависит лишь от начальной и конечной точки. Отсюда для потенциальных полей работа по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L (\vec{F}d\vec{l}) = 0 = \oint_L F_l dl = \oint_L q_0 E_l dl \quad \text{или} \quad \oint_L E_l dl = \oint_L (\vec{E}d\vec{l}) = \int_S \text{rot}\vec{E}d\vec{S}.$$

Так как элемент площади не равен нулю, то в дифференциальной форме для напряженности электрического поля получаем следующее соотношение:

$$\text{rot}\vec{E} = 0.$$

**Потенциал электрического поля.** В качестве скалярной величины, характеризующей электрическое поле, может быть выбрана циркуляция напряженности

$$\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 (\vec{E}d\vec{l}).$$

Здесь величина  $\varphi_{21}$  имеет смысл работы, затраченной на перемещение единичного положительного заряда в электрическом поле из точки 1 в точку 2, и называется разностью потенциалов. Сам потенциал для точечного заряда равен

$$\varphi_{1\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

и совпадает с работой по перемещению заряда из точки поля на бесконечность. Поскольку напряженность и потенциал – это две характеристики электрического поля, то между ними существует связь

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 (\vec{E}d\vec{l}).$$

**Электрическое поле в диэлектриках.** Поскольку диэлектрические среды представляют собой совокупность связанных электрических зарядов в форме атомов или молекул, то в электрическом поле на эти заряды действуют силы, способные смещать их из положения равновесия. В результате такого смещения диэлектрик поляризуется, т.е. внутри него появляются электрические дипольные моменты  $p$  для неполярных молекул. Полярные молекулы, имеющие собственные дипольные моменты, в электрическом поле ориентируются вдоль его направления. Но в том и другом случае молекулы создают дополнительное внутреннее электрическое поле в диэлектрике, которое характеризуется вектором поляризации  $\vec{P}$ .

Во многих диэлектриках при небольших внешних электрических полях наблюдается прямая пропорциональность между векторами поляризации и напряженностью электрического поля:

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E},$$

где  $\chi$  – безразмерная диэлектрическая восприимчивость.

**Вектор электрической индукции.** В веществе кроме свободных зарядов  $\rho$  могут быть еще и связанные заряды  $\rho'$ . Поэтому закон Гаусса в дифференциальной форме необходимо записать в виде

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho') = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho - \text{div}\vec{P}) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho - \epsilon_0\chi\text{div}\vec{E}),$$

$$\text{div}(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho.$$

Если ввести обозначение

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \chi\epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon\vec{E},$$

где  $\varepsilon = 1 + \chi$  – диэлектрическая проницаемость среды, то  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  – вектор электрической индукции или электрического смещения.

Теперь теорема Гаусса в дифференциальной и интегральной форме для среды приобретает вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho dV = \sum_i q_i.$$

Уравнения Пуассона и Лапласа:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \vec{E} = (\vec{\nabla} \vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Подставляя первое уравнение во второе, получаем

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = -(\vec{\nabla} \vec{\nabla} \varphi) = -\nabla^2 \varphi = -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Здесь  $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа, а соотношение

$\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}$  называется уравнением Пуассона. Частный вид уравнения

Пуассона при  $\rho = 0$  называется уравнением Лапласа. Например, уравнение Лапласа, записанное в частных производных в декартовой системе координат, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

**Ток смещения.** Известно, что переменный электрический ток может протекать через конденсатор, где отсутствуют электрические заряды. Предполагается, что в этой области протекает некий ток, отличный по своей природе от тока проводимости. Этот ток назвали током смещения. Так как по

теореме Гаусса  $\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$ , а ток  $i = \frac{dq}{dt}$ , то  $i = \varepsilon_0 \oint_S \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \right)$ . Отсюда

находим, что ток смещения равен

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Ток смещения порождает магнитное поле так же, как и ток проводимости. Он возникает в любом диэлектрике и в вакууме при изменении напряженности электрического поля. Хотя природа токов



проводимости и смещения не одинакова, оба они обладают одним и тем же свойством – создавать магнитное поле. Поэтому термин «ток смещения» является условным. По существу, ток смещения – это изменяющееся со временем электрическое поле. Ток смещения есть везде, где есть изменяющееся электрическое поле.

**Характеристики магнитного поля.** Магнитное поле является одной из форм существования материи. Его свойства характеризуются: индукцией магнитного поля  $\vec{B}$  ( $[B] = \text{Тл} = \text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м})$ ), намагниченностью  $\vec{M}$  ( $[M] = \text{А}/\text{м}$ ), напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$  ( $[H] = \text{А}/\text{м}$ ). Индукцию магнитного поля, как его силовую характеристику, можно определить различными способами, например, по магнитной силе Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v} \cdot \vec{B}].$$

Отсюда видно, что действительно индукция магнитного поля прямо пропорциональна силе, действующей на движущийся электрический заряд, и обратно пропорциональна скорости и величине заряда.

**Намагниченность.** При действии магнитного поля вещество способно приобрести магнитный момент, то есть намагнититься. Природа магнетизма связана с круговыми микроскопическими молекулярными токами (электронный спиновый магнетизм). Отсюда элементарный магнитный момент равен

$$\vec{m} = IS\vec{n},$$

где  $S$  – элементарная площадка, обтекаемая током  $I$ ;  $\vec{n}$  – единичный вектор, ортогональный площадке.

Намагниченность вещества  $\vec{M}$  определяется как предел отношения суммы магнитных моментов  $\vec{m}$  в некотором объеме  $\Delta V$  при его неограниченном уменьшении

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{\Delta V} \frac{\vec{m}}{\Delta V}.$$

Сама намагниченность связана с плотностью молекулярных токов  $\vec{j}_{\text{мол}}$

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot}\vec{M}.$$

В веществе индукцию магнитного поля удобнее записать в следующей форме

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}).$$

Поскольку в слабых полях намагниченность пропорциональна напряженности магнитного поля, т.е.  $\vec{M} = \chi\vec{H}$ , то получаем

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}.$$

Здесь  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества;  $\mu = 1 + \chi$  – магнитная проницаемость. По величине восприимчивости магнитные материалы подразделяются на парамагнетики при  $\chi \approx 1$ , диамагнетики при  $\chi \approx -1$  и ферромагнетики, у которых  $\chi$  намного больше единицы.

**Непрерывность магнитного потока.** Поскольку в природе не обнаружено магнитных зарядов, то вектор индукции магнитного поля не имеет ни начала, ни конца. Поэтому силовые линии магнитного поля замкнуты и, следовательно, поток вектора  $\vec{B}$  через замкнутую поверхность равен 0, т.е.

$$\Phi_B = \oint_S (\vec{B}d\vec{S}) = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0.$$

**Закон полного тока.** Эрстедом экспериментально было установлено, что при протекании тока по проводнику в окружающем его пространстве возникает магнитное поле. Для линейного проводника величина магнитной индукции этого поля равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a}.$$

Отсюда циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по круговому контуру можно записать в виде

$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \oint_L B a d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a} a \oint_L d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a} a 2\pi = \mu_0 I,$$

и поэтому закон полного тока в интегральной и дифференциальной формах принимает вид

$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \mu_0 I, \quad \text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Для напряженности магнитного поля в общем случае соответствующие формулы запишутся как

$$\oint_L (\vec{H}d\vec{l}) = \sum_i I_i, \quad \text{rot}\vec{H} = \vec{j}.$$

Следует заметить, что поле называют вихревым, если ротор этого поля отличен от нуля.

**Закон электромагнитной индукции.** В 1831 году М. Фарадей установил связь между магнитными и электрическими полями. Эта связь в форме закона электромагнитной индукции может быть записана как

$$E_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

со следующей формулировкой: при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего замкнутый электрический контур, в последнем возникает электрический ток, где  $E_{\text{инд}}$  – индукционная составляющая напряженности электрического поля.

Из закона электромагнитной индукции следуют полевые соотношения между напряженностями электрического и магнитного поля:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = -\oint_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right), \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Так как здесь  $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ , то переменное электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем, является тоже вихревым.

**Уравнения Максвелла.** В 1873 году была опубликована научная работа Дж. Кларка Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме». В этой работе были записаны уравнения, которые обобщили все открытия к тому времени в области электромагнетизма. Современную форму уравнения Максвелла приобрели в трудах Г. Герца, Г. Лоренца, О. Хевисайда:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = -\int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \right), \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ 2) \quad & \oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ 3) \quad & \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho dV, \quad \text{div} \vec{D} = \rho, \\ 4) \quad & \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0. \end{aligned}$$

Чтобы учесть свойства среды, эти уравнения дополняются условиями связи:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Уравнения Максвелла – это полная система уравнений электромагнитного поля, которая включила в себя все отдельные эмпирические законы. Поэтому из них однозначно вытекают все свойства поля, как уже изученные, так и совершенно новые.

Система уравнений Максвелла обретает физическое содержание только в том случае, если будет указано, в каких опытах проявляется

электромагнитное поле. Например, можно узнать, что по проводнику протекает электрический ток по его тепловому действию. Следовательно, электромагнитное поле можно обнаружить только в том случае, когда его энергия преобразуется в другие формы: тепловую, механическую, магнитную и т.д.

### Электромагнитные волны

**Волновое уравнение.** Среди новых свойств электромагнитного поля, которые следуют из уравнений Максвелла, рассмотрим явление распространения поля в пустоте, где плотность заряда и плотность тока равны нулю. В этом случае уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0.$$

Эти уравнения имеют отличные от нуля решения. Это означает, что электромагнитное поле может существовать даже в отсутствии электрических зарядов. Электромагнитные поля, существующие в пустоте при отсутствии зарядов, называют электромагнитными волнами.

Получим уравнения для переменного электромагнитного поля. С этой целью введем векторный и скалярный потенциал поля. Векторный потенциал вводится с помощью следующего соотношения:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right), \quad \text{или} \quad \operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Ротор вектора равен нулю только в том случае, если вектор равен градиенту от скаляра, то есть

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Используя соотношения для векторного  $A$  и скалярного  $\varphi$  потенциалов, получаем из уравнений Максвелла следующие уравнения:

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2\varphi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Эти соотношения и есть волновые уравнения, или уравнения Даламбера. Решением волнового уравнения является электромагнитная волна, распространяющаяся в пространстве с фазовой скоростью

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Волновые уравнения могут быть получены и для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которые для произвольного вещества имеют вид

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Поскольку электромагнитные волны поперечны, т.е. вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, то для синусоидальных волн

$$E = E_m \sin(\omega t - kx), \quad H = H_m \sin(\omega t - kx).$$

**Плоские электромагнитные волны.** Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, в котором поле зависит только от одной координаты  $x$  и времени. Такие волны называются плоскими. Волна называется плоской, если ее волновые поверхности представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

Для плоских электромагнитных волн волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь под  $f$  понимается любая компонента векторов  $E$  или  $H$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$f = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Если, например,  $F_2 = 0$ , то  $f = F_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ . Смысл этого решения следующий. В каждой плоскости  $x = \text{const}$  поле меняется со временем. В каждый данный момент времени поле различно для разных  $x$ . Поле имеет одинаковое значение для координат  $x$  и моментов времени  $t$ , удовлетворяющих соотношению  $t - x/c = \text{const}$ , т.е.

$$x = \text{const} + ct.$$

Это означает, что если в некоторый момент времени  $t = 0$  в некоторой точке  $x$  пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени  $t$  то же самое значение поле имеет на расстоянии  $ct$  вдоль оси  $x$ . Можно сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси  $x$  со скоростью, равной скорости света  $c$ . Таким образом,  $F_1(t - \frac{x}{c})$  представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси  $x$ , а  $F_2(t + \frac{x}{c})$  – в противоположном направлении.

**Монохроматическая плоская волна.** Важным случаем электромагнитных волн являются волны, в которых поле представляется простой периодической функцией времени. Такая волна называется монохроматической. Все величины в монохроматической волне зависят от времени посредством множителя  $\cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\omega$  – циклическая частота волны. Поэтому в волновом уравнении производная по времени равна  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$ . Отсюда само уравнение приобретает вид

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0.$$

В плоской волне поле является функцией только от  $t - x/c$ . Если плоская волна монохроматическая, то поле является к тому же периодической функцией от  $t - x/c$ . Отсюда векторный потенциал можно записать в виде вещественной части комплексного выражения

$$A = \operatorname{Re}\{A_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\}.$$

Если учесть, что длина волны  $\lambda = 2\pi c / \omega$ , волновой вектор  $k = (\omega / c)n$ ,  $n$  – единичный вектор в направлении распространения волны, то векторный потенциал можно представить в виде

$$A = \operatorname{Re}\{A_0 e^{-i(\omega t - kr)}\},$$

не зависящем от выбора осей координат. Более того, пока производятся линейные операции над  $A$ ,  $E$  или  $H$ , можно опускать знак взятия вещественной части и оперировать с комплексными числами:

$$\dot{A} = A e^{i(kr - \omega t)}.$$

**Уравнения Максвелла в комплексной форме.** Уравнения Максвелла в комплексной форме можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega \vec{B} = -i\omega \mu_a \vec{H}, \quad \mu_a = \mu_0 \mu, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= j + i\omega \vec{D} = j + i\omega \varepsilon_a \vec{E}, \quad \varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \dot{\rho}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \vec{j} = \sigma \vec{E}. \end{aligned}$$

Если рассмотреть электромагнитный процесс в материальной среде с удельной проводимостью  $\sigma$ , то второе уравнение Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \vec{E},$$

где величина  $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - i \frac{\sigma}{\omega}$  представляет собой комплексную диэлектрическую проницаемость данного вещества. Этот параметр учитывает одновременно поляризационные и проводящие свойства вещества. Комплексную диэлектрическую проницаемость можно представить графически в виде вектора на комплексной плоскости.

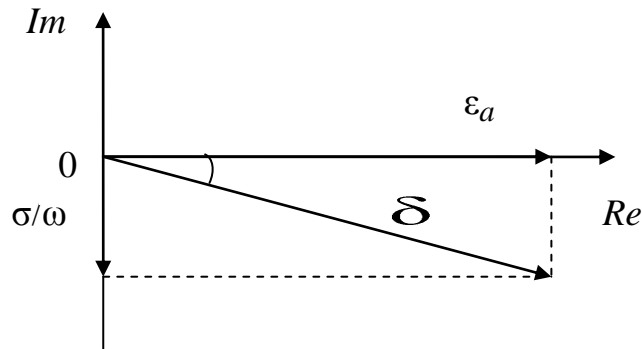


Рис. 2.1. Комплексная диэлектрическая проницаемость на комплексной плоскости. Угол диэлектрических потерь

Угол  $\delta$  называют углом диэлектрических потерь. Чем больше этот угол, тем значительнее доля электромагнитной энергии, рассеиваемой в виде теплоты при протекании тока проводимости. В справочниках обычно приводят значения тангенса этого угла  $\operatorname{tg} \delta = \sigma / \omega \varepsilon_a$ , который для хороших диэлектриков в СВЧ диапазоне лежит в пределах от  $10^{-5}$  до  $10^{-4}$ . Если  $\operatorname{tg} \delta > 10^{-3}$ , то такой диэлектрик принято считать плохим.

Величина  $\operatorname{tg}\delta$  является критерием для разделения веществ на проводники ( $\operatorname{tg}\delta \gg 1$ ), диэлектрики ( $\operatorname{tg}\delta \ll 1$ ) и полупроводники ( $\operatorname{tg}\delta \sim 1$ ). Следует заметить, что одни и те же вещества на различных частотах могут обладать свойствами или проводника, или диэлектрика. Например, земную поверхность на длинных и средних волнах можно считать проводником, а в диапазоне сверхвысоких частот – диэлектриком.

Введение комплексной диэлектрической проницаемости позволяет также использовать решения электродинамических задач в средах без потерь ( $\sigma = 0$ ) и для сред с потерями ( $\sigma \neq 0$ ) путем замены в первых диэлектрической проницаемости  $\epsilon_a$  на комплексную  $\tilde{\epsilon}_a$ .

Волновые уравнения для комплексных величин  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  также принимают более простой вид. Из уравнений

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = i\omega\epsilon_a\dot{\vec{E}}, \quad \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -i\omega\mu_a\dot{\vec{H}}$$

можно получить, например, для вектора  $\dot{\vec{E}}$

$$\nabla^2\dot{\vec{E}} + k^2\dot{\vec{E}} = 0, \quad k^2 = \omega^2\epsilon_a\mu_a.$$

Это уравнение называют векторным однородным уравнением Гельмгольца. Зная  $\dot{\vec{E}}$ ,  $\dot{\vec{H}}$  легко определить из первого уравнения Максвелла:

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{i\omega\mu_a}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}.$$

В случае однородной проводящей среды в уравнениях Максвелла и волновых уравнениях всюду  $\epsilon_a$  заменяют на комплексную величину  $\tilde{\epsilon}_a$ , а вместо  $k^2$  ставят

$$\tilde{k}^2 = \omega^2\tilde{\epsilon}_a\mu_a = \omega^2\left(\epsilon_a - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mu_a.$$

Заметим, что  $\frac{\partial\dot{\vec{A}}}{\partial t} = -i\omega\dot{\vec{A}}$ ,  $\frac{\partial\dot{\vec{A}}}{\partial x} = ik\dot{\vec{A}}$ .

Отсюда следует, что производная по времени от комплексной величины сводится к умножению на  $(-i\omega)$ , а по координате – на  $(ik)$ . Например, оператор Набла равен  $\vec{\nabla} = ik\vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – вектор направления распространения волны. Отсюда получаем

$$\operatorname{div}\dot{\vec{B}} = (\vec{\nabla}\mu_a\dot{\vec{H}}) = ik\mu_a(\vec{n}\dot{\vec{H}}) = 0,$$



$$\operatorname{div} \dot{\vec{D}} = (\vec{\nabla} \varepsilon_a \dot{\vec{E}}) = ik(\vec{n} \dot{\vec{E}}) = 0.$$

Следовательно,  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  перпендикулярны к направлению волны, а это означает, что плоские электромагнитные волны – поперечные. К тому же векторы  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  взаимно перпендикулярны. Для численных значений этих векторов получаем  $\mu_a \dot{H}^2 = \varepsilon_a \dot{E}^2$ . Так как последнее соотношение от времени не зависит, то  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  обладают одинаковыми фазами и изменяются синхронно. Комплексный волновой вектор в металле приводит к затуханию волны, а  $\tilde{\varepsilon}_a$  – к сдвигу фаз  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$ .

**Электромагнитные волны в диэлектриках.** Так как в диэлектриках проводимость равна нулю ( $\sigma = 0$ ), а свободные заряды отсутствуют ( $\rho = 0$ ), то уравнения Максвелла для диэлектрика принимают вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Если для плоской волны  $\vec{E} = \vec{E}(0, 0, E_z)$  и  $\vec{H} = \vec{H}(0, H_y, 0)$ , то из этих уравнений получаем

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -\varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Взяв производную от первого уравнения по времени, а от второго по координате, приходим к уравнениям второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\varepsilon_a \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial t},$$

которые для напряженности электрического поля принимают вид

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}, \quad v^2 = \frac{1}{\varepsilon_a \mu_a}.$$

Решением данного волнового уравнения будут две волны. Одна волна распространяется в положительном направлении оси  $x$ , а другая – в обратном направлении. Для напряженностей электрического и магнитного полей эти решения могут быть представлены в следующем самом общем виде:

$$E_z = F_1(x - vt) + F_2(x + vt), \quad H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} [F_1(x - vt) - F_2(x + vt)].$$

Абсолютные значения напряженностей из этих решений связаны как в прямой, так и в обратной волне соотношением

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} E, \text{ или } \frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{\epsilon_a E^2}{2}.$$

Следовательно, если существует только прямая или только обратная волна, то энергии магнитного и электрического полей равны между собой. Эти решения можно было записать сразу из сравнения их с телеграфными уравнениями для токов  $i_1$  и напряжений  $u_1$ :

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad -\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Между явлением распространения плоской электромагнитной волны в диэлектрике ( $E_z$ ,  $H_y$ ) и явлением распространения волн напряжения и тока в однородной длинной линии без потерь имеется и более глубокая аналогия. Так, величину напряженности электрического поля  $E_z$  можно рассматривать как падение напряжения, отнесенное к единице длины линии, напряженность магнитного поля  $H_y$  – как ток, отнесенный к единице длины линии. Тогда отношение

$$\frac{E_z}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = z$$

имеет размерность электрического сопротивления и может рассматриваться как волновое сопротивление среды, что аналогично волновому сопротивлению  $z = \sqrt{\frac{L}{C}}$  однородной линии. Если волна распространяется в пустоте, то

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7}}{1/(4\pi 9 \cdot 10^9)}} = 120 \pi = 377 \text{ Ом}.$$

Эту аналогию можно распространить и на другие свойства. Например, рассмотрим падение электромагнитной волны нормально к поверхности раздела двух сред с параметрами  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$  и  $\epsilon_2$ ,  $\mu_2$ .

Прямая волна ( $E_0, H_0$ ) частично проходит сквозь поверхность раздела, образуя во второй среде прямую волну ( $E_2, H_2$ ), и частично отражается от поверхности раздела, образуя в первой среде обратную (отраженную) волну ( $E_1, H_1$ ). На рис. 2.2 представлено поведение электромагнитной волны на границе раздела диэлектриков.

Соотношения между напряженностями поля этих волн на поверхности раздела можно записать, используя соответствия между напряжениями и токами в падающих, преломленных и отраженных волнах тока и напряжения длинных линий:

$$E_2 = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} E_0, \quad H_2 = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} H_0,$$

$$E_1 = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} E_0, \quad H_1 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} H_0,$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}.$$

Эти уравнения могут быть получены из граничных условий  $E_{t1} = E_{t2}$ ,  $H_{t1} = H_{t2}$  и соотношений связи

$$E_0 + E_1 = E_2, \quad H_0 + H_1 = H_2, \quad \frac{E_0}{H_0} = z_1, \quad \frac{E_2}{H_2} = z_2, \quad \frac{E_1}{H_1} = -z_1.$$

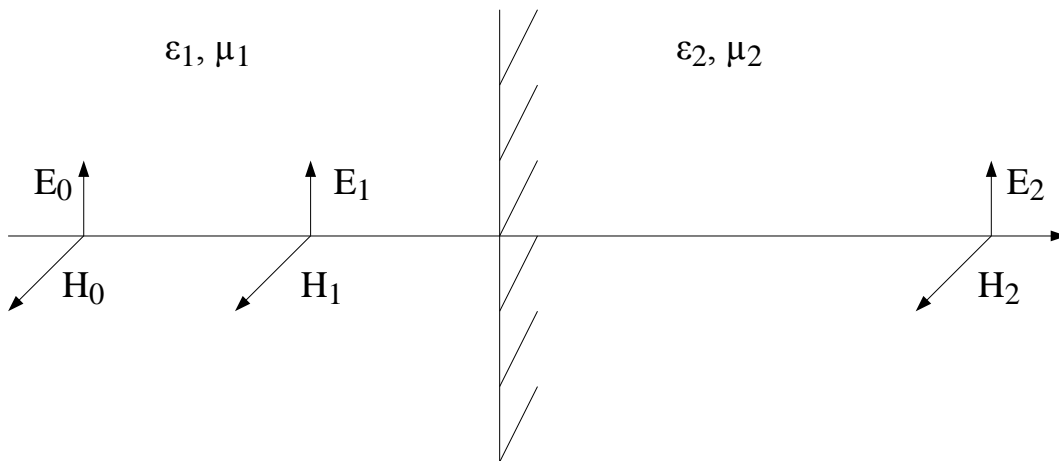


Рис. 2.2. Поведение электромагнитной волны на границе раздела диэлектриков

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1. Из полученных соотношений видно, что при  $z_1 = z_2$  отраженные волны отсутствуют.

2. Если  $z_1 < z_2$ , то  $E_2$  и  $E_1$  имеют одинаковые знаки, а  $H_1$  и  $H_2$  – разные. Отсюда следует, что в первой среде в результате частичного отражения напряженность электрического поля  $E_0 + E_1$  возрастает, а напряженность магнитного поля  $H_0 - H_1$  убывает.

3. Если  $z_1 > z_2$ , то  $E_2$  и  $E_1$  имеют противоположные знаки и в первой среде общая напряженность электрического поля  $E_0 - E_1$  убывает, а напряженность магнитного поля  $H_0 + H_1$  возрастает.

4. Если угол падения волны относительно нормали к поверхности отличен от нуля, то для нахождения отраженной и преломленной волн, необходимо учитывать граничные условия для всех векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ , и  $\vec{B}$ .

**Теорема Умова-Пойнтинга.** Из выражения для энергии электромагнитного поля

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV$$

следует, что энергия поля вполне определенным образом локализована в пространстве. При этом объемная плотность энергии в произвольном месте поля определяется соотношением

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = \frac{1}{2} (\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2),$$

где  $E$ ,  $H$  – численные значения соответствующих векторов.

Учитывая закон сохранения энергии, можно заключить, что если в какой-то определенной области энергия уменьшается, то это может происходить только за счет потока энергии за границы рассматриваемой области при условии неподвижной среды. Если среда движется, то часть энергии может уноситься веществом. Следовательно, полная энергия в данном объеме изменяется как за счет вытекания ее из объема, так и за счет того, что поле передает свою энергию веществу (заряженным частицам), т.е. производит работу над веществом.

Определим теперь изменение во времени энергии, находящейся внутри объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV \right\} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV;$$

учитывая уравнения Максвелла, получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V (jE) dV - \oint_S ([\vec{E} \times \vec{H}] \vec{dS}).$$

Из этого соотношения следует, что часть энергии расходуется на работу для перемещения зарядов (первое слагаемое), а другая часть уносится электромагнитными волнами.

Важнейшей особенностью переменного электромагнитного поля является способность распространяться в форме волны. Впервые учение о перемещении энергии волной применительно к упругим волнам в сплошных средах и связанное с ним фундаментальное понятие «потока мощности» были разработаны в 1874 году русским физиком Н.А. Умовым. По определению Н.А. Умова, вектор плотности потока мощности равен

$$\vec{\Pi} = w\vec{V},$$

где  $w$  – значение объемной плотности энергии волны (энергии на единицу объема);  $\vec{V}$  – вектор ее скорости.

Спустя 11 лет английский физик Пойнтинг получил из уравнений Максвелла энергетические соотношения для электромагнитного поля, то есть, подставляя  $w$  в выражение для  $\vec{\Pi}$ , получаем вектор Пойнтинга в виде

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}],$$

который представляет собой мощность потока электромагнитной энергии, отнесенной к единице площади поверхности, нормальной к направлению распространения волны.

$$\text{Вектор Пойнтинга имеет размерность } [\Pi] = [E][H] = \frac{B}{\text{м}} \frac{A}{\text{м}} = \frac{BA}{\text{м}^2}$$

мощности, отнесенной к единице площади поверхности. Направление вектора  $\vec{\Pi}$  совпадает направлением распространения электромагнитной волны.

Следовательно, вектор Пойнтинга определяет значение и направление потока электромагнитной энергии, передаваемой в единицу времени сквозь единицу поверхности, нормальной к направлению распространения волны.

Сама теорема Умова-Пойнтинга представляет собой соотношение

$$-\oint_S \vec{\Pi} \vec{dS} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV,$$

которое можно определить следующим образом: поток вектора Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность равен энергии, выделяющейся в виде теплоты

в единицу времени в объеме  $V$ , плюс скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема. Отсюда теорему Умова-Пойнтинга следует трактовать как уравнение энергетического баланса.

Следует отметить, что электромагнитная энергия от места ее генерации к месту потребления передается по диэлектрику. При этом провода в линиях передачи выполняют двоякую роль: во-первых, они являются каналами, по которым протекает электрический ток; во-вторых, они являются организаторами структуры поля в диэлектрике.

**Электромагнитное поле в проводящей среде.** Рассмотрим случай, когда плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в диэлектрике, подходит нормально к проводящей поверхности.

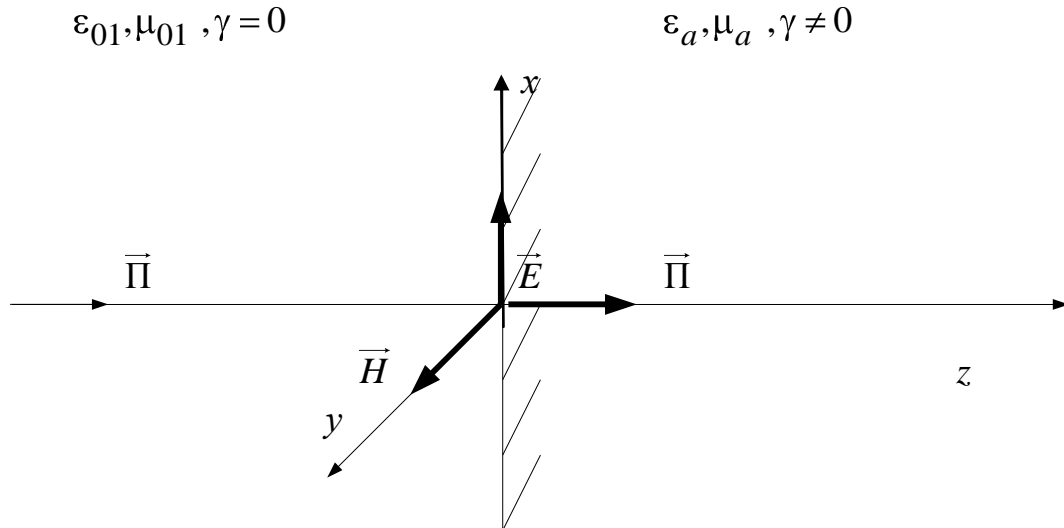


Рис. 2.3. Распространение электромагнитной энергии через границу раздела между диэлектриком и проводником

Как видно на рисунке 2.3, падающая волна частично отражается от проводящей среды, а частично проникает в эту среду и поглощается в ней. Отличительная особенность проводящей среды состоит в том, что в ней практически всегда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. В таком приближении уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Преобразовав эти уравнения, можно получить, например, уравнение

для напряженности электрического поля:

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Далее мгновенные значения напряженностей полей переведем в комплексную форму:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= E_m e^{i(\omega t + \psi_E)} = \dot{E}_m e^{i\omega t}, \\ \dot{H}_y &= H_m e^{i(\omega t + \psi_H)} = \dot{H}_m e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Поскольку волна распространяется только в направлении  $z$ , то амплитуды  $E_m$  и  $H_m$ , начальные фазы  $\psi_E$  и  $\psi_H$  и комплексные амплитуды  $\dot{E}_m$  и  $\dot{H}_m$  являются функциями только одной координаты  $z$ . Подставляя комплексные величины в уравнения для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , получаем

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = i\omega \gamma \mu_a \dot{H}_m, \quad \frac{d^2 \dot{E}_m}{dz^2} = i\omega \gamma \mu_a \dot{E}_m,$$

или

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = k^2 \dot{H}_m, \quad \frac{d^2 \dot{E}_m}{dz^2} = k^2 \dot{E}_m, \quad k^2 = 2ip^2, \quad p^2 = \frac{\omega \gamma \mu_a}{2}.$$

Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами для  $\dot{H}_m$  будем искать в виде

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-kz} + A_2 e^{kz}, \quad k = p\sqrt{2i} = p(1+i).$$

Отсюда

$$\dot{H}_m = A_1 e^{-kz} = A_1 e^{-pz} e^{-ipz}.$$

Второе решение опущено, так как при  $A_2 \neq 0$   $\dot{H}_m$  увеличивается до бесконечности при возрастании  $z$ , что дает не физическое решение. Постоянную  $A_1$  определим из граничных условий. При  $z = 0$  величина  $\dot{H}_m$  имеет определенное заданное значение  $\dot{H}_{me} = H_{me} e^{i\psi_{He}}$  на границе раздела двух сред. Отсюда мгновенное значение напряженности магнитного поля равно

$$H_y = H_{me} e^{-pz} \sin(\omega t + \psi_{He} - pz).$$

Выражение для напряженности электрического поля определим из первого уравнения Максвелла:

$$E = \frac{\text{rot}H}{\gamma}, \quad \dot{E}_m = \frac{1}{\gamma} \left( -\frac{\partial \dot{H}_m}{\partial z} \right) = \frac{(1+i)p}{\gamma} \dot{H}_{me} e^{-pz} e^{-ipz},$$

$$E_x = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} H_{me} e^{-pz} \sin(\omega t + \psi_{He} - pz + \frac{\pi}{4}).$$

Здесь учтено, что  $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ , а  $\frac{(1+i)p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Плотность тока изменяется по такому же закону, как и напряженность электрического поля:

$$j_x = \gamma E_x = \sqrt{\omega\gamma\mu_a} H_{me} e^{-pz} \sin(\omega t + \psi_{He} - pz + \frac{\pi}{4}).$$

Волновое сопротивление для проводящей среды оказывается комплексным и равно

$$\dot{z} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{(1+i)p}{\gamma} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}.$$

Используя это выражение, можно найти соотношение между напряженностями волн – падающей из диэлектрика на поверхность проводящей среды ( $\dot{E}_0, \dot{H}_0$ ), отраженной от поверхности среды ( $\dot{E}_1, \dot{H}_1$ ) и преломленной ( $\dot{E}_2, \dot{H}_2$ ), то есть прошедшей в проводящую среду:

$$\dot{E}_2 = \frac{2z}{z+z_1} \dot{E}_0, \quad \dot{E}_1 = \frac{z-z_1}{z+z_1} \dot{E}_0,$$

$$\dot{H}_2 = \frac{2z_1}{z+z_1}, \quad \dot{H}_1 = \frac{z_1-z}{z+z_1} \dot{H}_0, \quad z_1 = \sqrt{\frac{\mu_{01}}{\epsilon_{01}}}.$$

Из полученных соотношений следует, что

1) в предельном случае, когда удельная проводимость проводящей среды бесконечна,  $z = 0$  и поэтому

$$\dot{E}_1 = -\dot{E}_0, \quad \dot{H}_1 = \dot{H}_0,$$

а поверхности раздела

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_0 = 0, \quad \dot{H}_1 = 2\dot{H}_0,$$

то есть волна полностью отражается от поверхности сверхпроводящей среды;



2) по мере проникновения поля вглубь проводника фазы электрического вектора и плотности тока изменяются линейно, в зависимости от координаты  $z$ ;

3) амплитуды электрического вектора  $\sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} H_{me} e^{-pz}$  и плотности тока  $\sqrt{\omega \gamma \mu_a} H_{me} e^{-pz}$  убывают по экспоненциальному закону. При этом основная часть плотности тока сосредоточена в поверхностном слое толщиной  $1/p$ ;

4) на глубине  $1/p$  плотность тока в  $e$  раз меньше, чем у поверхности проводника. Эта глубина, называемая глубиной скин-слоя, равна

$$\Delta = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}};$$

5) ток концентрируется на поверхности проводника тем сильнее, чем больше частота тока;

6) концентрация плотности тока на поверхности проводника изменяет величину активного сопротивления, которое начинает зависеть от частоты. С увеличением частоты сопротивление увеличивается;

7) амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей убывают вглубь проводника по экспоненциальному закону;

8) начальная фаза колебаний изменяется пропорционально  $z$  и запаздывает все более по отношению к колебаниям на поверхности среды;

9) во всех точках среды, в том числе и на ее поверхности, напряженность электрического поля опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол  $45^\circ$ ;

10) отношение амплитуд напряженностей полей на расстоянии  $z = \lambda$  от поверхности среды к их значениям на поверхности равно  $e^{-p\lambda} = 0,0019$ , то есть на этом расстоянии волна практически полностью затухает;

11) вектор Пойнтинга имеет следующую зависимость:

$$\Pi = E_x H_y = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} H_{me}^2 e^{-2pz} \sin(\omega t + \psi_{He} - kz) \sin(\omega t + \psi_{He} - kz + \frac{\pi}{2}).$$

Среднее значение  $\Pi_{cp}$  вектора Пойнтинга за период колебаний равно

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} \frac{H_{me}^2}{2} e^{-2pz} \cos \frac{\pi}{2}.$$

Оценки показывают, что на расстояние от поверхности, равное  $z = \frac{\lambda}{2}$ , проникает только 0,187 % энергии, поглощаемой в проводящей среде. Поэтому практически можно считать, что волна затухает уже на расстоянии, в два-три раза меньшем, чем глубина скин-слоя.

**Комплексное сопротивление.** Пока частота переменного тока мала, мгновенное значение силы тока  $i(t)$  определяется ЭДС  $e(t)$  в тот же момент времени:

$$e(t) = Ri(t).$$

При произвольных частотах нет никаких оснований полагать, что эта зависимость сохранится. Можно лишь утверждать, что  $i(t)$  должен линейно зависеть от  $e$  во все предыдущие моменты времени, т.е.  $e = \hat{z}i$ ,  $\hat{z}$  – линейный оператор. Если разложить  $e(t)$  и  $i(t)$  в ряд Фурье, то для каждой гармоники результат действия оператора сведется к умножению на величину  $z$ , которая зависит от частоты:

$$e = z(\omega)i.$$

Функция  $z(\omega)$  в общем случае комплексная и поэтому называется комплексным сопротивлением, или импедансом проводника.

Обычное активное сопротивление  $R$  представляет собой нулевой член разложения функции  $z(\omega)$  по степеням  $\omega$ . Для определения следующего члена разложения нужно наряду с  $R$  учитывать также и самоиндукцию проводника  $L$ .

Рассмотрим электрический контур, в котором действует переменная ЭДС  $E(t)$ . По определению работа, производимая в одну секунду электрическим током над движущимися в проводнике зарядами, равна  $\varepsilon I$ . Эта работа частично переходит в джоулево тепло, а частично затрачивается на изменение энергии магнитного поля тока. Отсюда можно записать закон сохранения энергии в следующем виде:

$$\varepsilon I = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right) = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}, \quad \varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt}.$$

Записав монохроматические компоненты в комплексном представлении:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}, \quad I = I_0 e^{-i\omega t}$$

получим

$$\varepsilon = zI, \quad z = R - i\omega L.$$

Взяв вещественную часть от соотношения  $I = \varepsilon / z$ , определим временную зависимость силы тока:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \phi), \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L}{R}.$$

Здесь угол  $\phi$  определяет сдвиг фаз между током и ЭДС. Вещественная часть  $z$  совпадает с активным сопротивлением  $R$ , определяющим диссипацию энергии в контуре. В общем случае произвольной зависимости  $z(\omega)$  имеется аналогичная связь между  $\operatorname{Re} z$  и диссипацией энергии.

Вычислим  $z(\omega)$  для провода круглого сечения при произвольных частотах, т.е. не пренебрегая скин-эффектом. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии, представив его в другой форме записи. Разобьем мощность  $I\varepsilon$  на два слагаемых. Одно слагаемое будет представлять изменение энергии магнитного поля вне провода, а другое – полную энергию, потребляемую внутри провода. Полная энергия включает в себя изменение энергии поля в проводе и выделенное тепло. Эту часть можно вычислить как полный поток энергии, втекающий в одну секунду внутрь проводника через его поверхность:

$$\varepsilon I = \frac{d}{dt} \left( \frac{L_e I^2}{2} \right) + E H 2\pi a l,$$

где  $L_e$  – внешняя часть самоиндукции провода;  $E$  и  $H$  – напряженности электрического и магнитного поля на его поверхности;  $a$  – радиус провода;  $l$  – его длина;

$$H = \frac{I}{2\pi a}; \quad \varepsilon I = L_e I \frac{dI}{dt} + E \frac{I}{2\pi a} 2\pi a l; \quad \varepsilon = L_e \frac{dI}{dt} + El.$$

В комплексной форме последнее соотношение представляется в виде

$$\varepsilon = zI = -i\omega L_e I + El, \quad z = -i\omega L_e + \frac{El}{I} = -i\omega L_e + \frac{El}{2\pi a H}.$$

При произвольных частотах

$$E = \operatorname{const} J_0(ka) e^{-i\omega t}, \quad H = -i \operatorname{const} \sqrt{\frac{i\gamma}{\omega}} J_1(ka) e^{-i\omega t}.$$

Подставив  $E$  и  $H$ , получим

$$z = -i\omega l + R \frac{ak J_0(ak)}{2 J_1(ak)}, \quad R = \frac{l}{\pi a^2 \gamma}.$$

В случае сильного скин-эффекта

$$z' = \operatorname{Re} z(\omega) = R \frac{a}{2\Delta} = \frac{l}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}} \approx \omega^{1/2}.$$

Последнее уравнение можно представить еще в одной форме:

$$z' = \frac{\rho l}{2\pi a \gamma} = \rho \frac{l}{2\pi a \Delta} = \rho \frac{l}{S}.$$

Таким образом, проводник оказывает переменному току такое же сопротивление, какое он оказывал бы постоянному току, если бы ток был сосредоточен в поверхностном слое проводника толщиной  $\Delta$ .

## Методические указания к изучению раздела 2

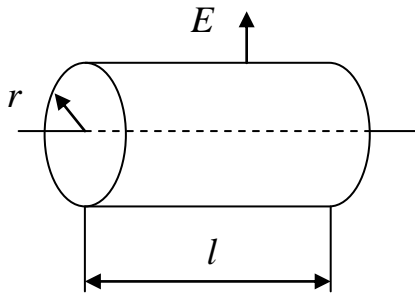
Второй раздел дисциплины посвящен изучению теории электромагнитного поля, в котором рассмотрены физические явления и процессы, происходящие в электромагнитном поле. Эти явления и процессы лежат в основе действия большого числа различных электромагнитных и электронных приборов и устройств, широко применяемых на практике. Методы расчета физических явлений и процессов, рассмотренных в этой части дисциплины, используют при расчете и конструировании данных приборов и устройств. Под электромагнитным полем понимают вид материи, характеризующейся совокупностью взаимно связанных и взаимно обуславливающих электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле может самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн. При распространении электромагнитного поля одновременно с движением потока электромагнитной энергии происходит его взаимодействие с веществом, которое и представляет основной интерес для технических приложений. Именно на этот аспект необходимо обратить основное внимание при изучении данного раздела.

При изучении второго раздела дисциплины для лучшего усвоения теоретических вопросов рекомендуется использовать учебники [1] и [5]. После полного изучения теоретических вопросов следует приступить к разбору типовых задач, используя при этом учебные пособия [7] и [9].

### Пример решения задач

**Задача 1.** Рассчитайте напряженность и потенциал электрического поля бесконечной заряженной оси с линейной плотностью заряда  $\tau$  на расстоянии 1 м в воздухе, используя теорему Гаусса.

**Решение.** Замкнутую поверхность выбираем в форме цилиндра, осью которого является искомая заряженная ось. На боковой поверхности цилиндра напряженность электрического поля одинаковая во всех ее точках и имеет направление, перпендикулярное поверхности. Поток вектора напряженности не пересекает торцы цилиндра и поэтому полная площадь цилиндра в законе Гаусса будет равна площади боковой поверхности.



$$\oint_S E ds = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0};$$

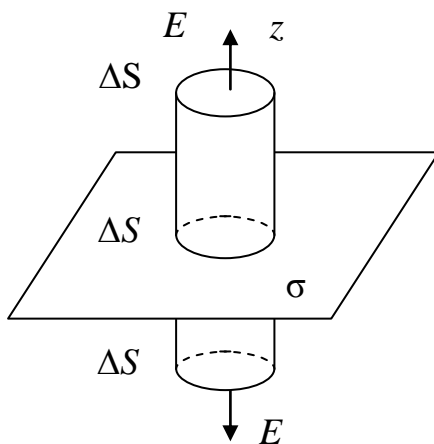
$$\oint_S E ds = E \int_{S_6} ds = E \cdot 2\pi r \cdot l; \quad \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = \frac{\tau \cdot l}{\epsilon_0};$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\tau \cdot l}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad \varphi = -\int E dr = -\int \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr;$$

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + const = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + const.$$

**Задача 2.** Определите распределение потенциала и напряженности электрического поля тонкого слоя зарядов от бесконечной заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  на расстоянии  $l$  м от нее в направлении нормали.

**Решение.**



$$\oint_S E ds = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0};$$

$$\oint_S E ds = \Delta S \cdot E + -\Delta S \cdot -E = 2E \cdot \Delta S;$$

$$\sum_i q_i = \sigma \cdot \Delta S, \quad 2E \cdot \Delta S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta S, \quad E = E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0};$$

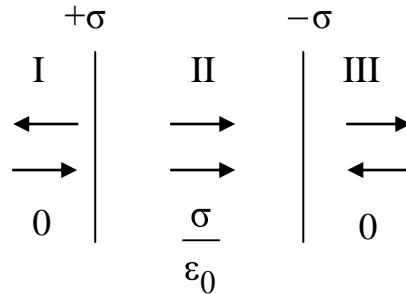
$$\varphi = -\int E_z ds + const = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + const.$$

Так как при  $z = 0$ ,  $\varphi = 0$ , то  $\text{const} = 0$  и  $\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$ . Если  $z > 0$ , то  $\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$ . Если  $z < 0$ , то  $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$ .

**Задача 3.** Рассчитайте напряженность электрического поля от двух противоположно заряженных бесконечных плоскостей с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

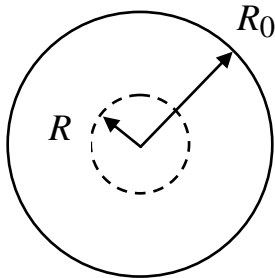
**Решение.**

С помощью решения предыдущей задачи имеем  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ;



**Задача 4.** Рассчитайте напряженность электрического поля и потенциал внутри шарообразного электронного облака радиусом  $R_0$ , если его объемная плотность заряда равна  $\rho$ .

**Решение.**



$$\oint_S E ds = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}; \quad \oint_S E ds = 4\pi R^2 E.$$

Если  $R < R_0$ ,

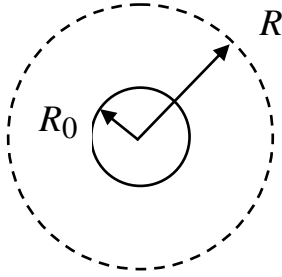
$$\text{то } \sum_i q_i = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3; \quad 4\pi R^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4\pi}{3} \cdot R^3;$$

$$E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}; \quad \varphi = -\int E dR + C_1 = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_1.$$

Так как при  $R = 0$ ,  $\varphi = 0$ , то  $C_1 = 0$  и  $\varphi = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}$ .

**Задача 5.** Рассчитайте напряженность электрического поля и потенциал вне шарообразного электронного облака радиусом  $R_0$ , если его объемная плотность заряда равна  $\rho$ .

**Решение.**



$$\oint_S E ds = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}; \quad \oint_S E ds = 4\pi R^2 E.$$

Если  $R > R_0$ ,

$$\text{то } \sum_i q_i = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R_0^3; \quad 4\pi R^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi}{3} \cdot R_0^3;$$

$$E = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R^2}; \quad \varphi = -\int E dR + C_2.$$

В силу непрерывности потенциала  $\varphi_{R < R_0} = \varphi_{R > R_0}$  при  $R = R_0$ , отсюда, с учетом результатов предыдущей задачи получаем

$$-\frac{\rho R_0^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R_0} + C_2; \quad C_2 = -\frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}; \quad \varphi = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R_0} - \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}.$$

**Задача 6.** Определите, какой радиус должен иметь уединенный металлический шар в воздухе с зарядом 1 Кл, если пробивная напряженность равна  $E_{\text{пр}} = 30$  кВ/см.

**Решение.**

$$E_{\text{пр}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2};$$

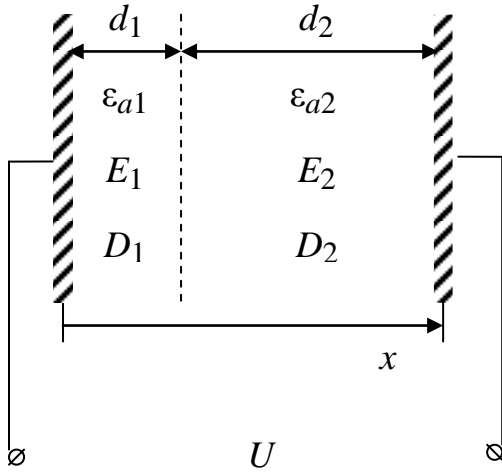
$$R_0 = \sqrt{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 10^2}} = 54,7 \text{ м.}$$

**Задача 7.** Выведите формулу для определения напряженности электрического поля и емкости двухслойного плоского конденсатора.

**Решение.**

Здесь  $\epsilon_{a1} = 2\epsilon_{a2}$ ,  $d_2 = 1,5d_1$ . Так как нормальная составляющая вектора электрической индукции непрерывна, то есть  $D_{1n} = D_{2n}$ , а  $D_{1n} = \epsilon_{a1} E_1$  и

$D_{2n} = \epsilon_{a2}E_2$ , то получаем  $\epsilon_{a1}E_1 = \epsilon_{a2}E_2$ . Напряжение между пластинами  $U$  является суммой падений напряжения в каждом слое:



$$U = \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E_2 dx = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Из уравнений

$$\begin{cases} \epsilon_{a1}E_1 = \epsilon_{a2}E_2 \\ E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2 = u \end{cases}$$

получаем

$$E_1 = \frac{U \epsilon_{a2}}{d_1 \epsilon_{a2} + d_2 \epsilon_{a1}} = \frac{U}{4d_1}; \quad E_2 = \frac{U \epsilon_{a1}}{d_1 \epsilon_{a2} + d_2 \epsilon_{a1}} = \frac{U}{2d_1}.$$

Емкость двухслойного конденсатора можно подсчитать как емкость двух последовательно включенных конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ , где  $C_1$  – емкость первого слоя конденсатора,  $C_2$  – емкость второго слоя конденсатора:

$$C_1 = \frac{\epsilon_{a1} S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_{a2} S}{d_2},$$

где  $S$  – площадь пластины конденсатора.

Емкость двух последовательно включенных конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{d_1 / \epsilon_{a1} + d_2 / \epsilon_{a2}} = \frac{S \epsilon_{a1}}{4d_1} = \frac{3S \epsilon_{a2}}{4d_2}.$$

**Задача 8.** Точечные электрические заряды  $+2q$  и  $-q$  находятся на расстоянии друг от друга  $l = 10$  см в вакууме. Определите положение и размер эквипотенциальной кривой, имеющей форму сферы.



**Решение.**

$$\varphi = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

где  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$r_2 = \sqrt{l - x^2 + y^2}.$$

Пусть  $\varphi = 0$ , тогда

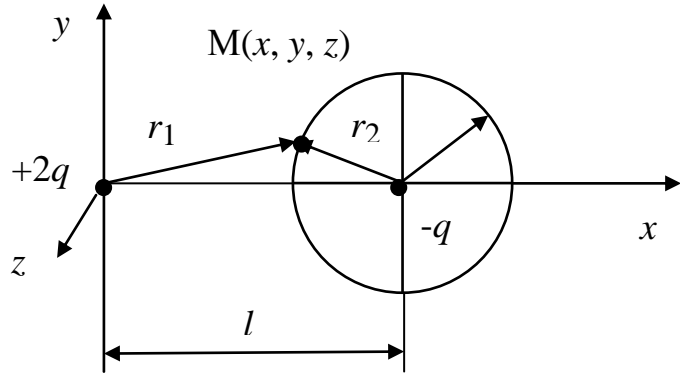
$$\frac{4}{x^2 + y^2} = \frac{1}{l - x^2 + y^2},$$

$$4y^2 + 4l^2 - 2lx + x^2 = x^2 + y^2, \quad 3y^2 + 3x^2 - 8lx + 4l^2 = 0$$

$$y^2 + x^2 - \frac{8}{3}lx + \frac{4}{3}l^2 = 0, \quad \left(x - \frac{4}{3}l\right)^2 + y^2,$$

где центр сферы имеет координаты  $y_0 = z_0 = 0$ ,  $x_0 = \frac{4}{3}l = \frac{40}{3} = 13,3$  см, а

радиус сферы равен  $R = \frac{2}{3}l = \frac{20}{3} = 6,7$  см.



**Задача 9.** Электромагнитная волна частоты 5000 Гц падает на проводник с электропроводностью  $10^{+7}$  (ом.м) $^{-1}$  и магнитной проницаемостью равной 1000. Определите величину скин-эффекта (глубину проникновения в проводник), длину волны и фазовую скорость.

**Решение.** Под глубиной проникновения  $\Delta$  понимают расстояние вдоль направления распространения волны, на котором амплитуда падающей волны уменьшается в  $e = 2,71$  раз. Глубина проникновения зависит от свойств проводящей среды ( $\gamma$  и  $\mu_r$ ) и частоты  $\omega$ .

$$\Delta = \frac{1}{k}; \quad k = \left(\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}\right)^{1/2}, \quad \mu_a = \mu_0 \cdot \mu_r.$$

Так как  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ,  $\mu_r = 10^3$ , то

$$k = \left( \frac{2\pi \cdot 5000 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^7}{2} \right)^{1/2} = 14100 \text{ м}^{-1};$$

$$\Delta = \frac{1}{k} = \frac{1}{1400} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Под длиной волны  $\lambda$  в проводящей среде понимают расстояние вдоль направления распространения волны, на котором фаза колебаний изменяется на  $2\pi$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1400} \approx 4,45 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Под фазовой скоростью понимают скорость, с которой надо было бы перемещаться вдоль направления распространения волны, чтобы колебание имело одну и ту же фазу:

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} = \frac{2\pi \cdot 5000}{14100} \approx 2,25 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение электростатического поля.
2. Запишите систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме.
3. Приведите граничные условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика.
4. Может ли величина напряженности электростатического поля измениться скачком при переходе через границу раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями?
5. Следствием какого уравнения Максвелла является уравнение Пуассона?
6. Запишите волновые уравнения.
7. Приведите теорему Умова-Пойнтинга.
8. Дайте определение скин-эффекту.

## 6 СЕМЕСТР

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Содержание разделов задания и исходные данные. Воздушная длинная линия без потерь длиной  $l = \lambda(1 + 0,1N)$  соединяет высокочастотный генератор с приемником. Напряжение генератора  $U_1 = 5N$  мВ, частота

$f = 10$  МГц ( $n$  – номер группы). Измерены коэффициент стоячей волны  $k_c = U_{\max}/U_{\min}$  и расстояние от конца линии до ближайшего минимума напряжения в долях длины волны  $x_{\min}/\lambda$ .

Числовые данные параметров линий приведены в нижеприведенной таблице.

№ варианта	$Z_c, \text{Ом}$	$k_c$	$x_{\min}/\lambda$	Тип согласующего устройства	№ варианта	$Z_c, \text{Ом}$	$k_c$	$x_{\min}/\lambda$	Тип согласующего устройства
1	400	1,8	0,15	1	19	70	2,0	0,15	4
2	450	1,9	0,2	2	20	80	2,1	0,2	5
3	500	2,0	0,3	3	21	400	2,2	0,3	1
4	550	2,1	0,35	4	22	450	2,3	0,35	2
5	600	2,2	0,2	5	23	500	2,4	0,2	3
6	40	2,3	0,2	1	24	550	2,5	0,2	4
7	50	2,4	0,15	2	25	600	1,8	0,15	5
8	60	2,5	0,2	3	26	40	1,9	0,2	1
9	70	1,8	0,3	4	27	50	2,0	0,3	2
10	80	1,9	0,35	5	28	60	2,1	0,35	3
11	400	2,0	0,2	1	29	70	2,2	0,2	4
12	450	2,1	0,2	2	30	80	2,3	0,2	5
13	500	2,2	0,15	3	31	400	2,4	0,15	1
14	550	2,3	0,2	4	32	450	2,5	0,2	2
15	600	2,4	0,3	5	33	500	1,8	0,3	3
16	40	2,5	0,35	1	34	550	1,9	0,35	4
17	50	1,8	0,2	2	35	600	2,0	0,2	5
18	60	1,9	0,2	3	36	40	2,1	0,2	1

1. Определите сопротивление нагрузки и входное сопротивление.
2. Рассчитайте согласующее устройство заданного в таблице типа и зарисуйте его.

3. Обоснуйте выбор согласующего устройства.
4. Определите активную, реактивную и полную мощности на нагрузке и на входе линии до и после согласования.

### Графический материал

1. Постройте графики распределения действующих значений напряжения  $U(x)$  и тока  $I(x)$  вдоль линии до согласования, где  $x$  отсчитывается от конца линии.

2. Постройте графики распределения действующих значений напряжения  $U$  и тока  $I$  в линии, трансформаторе и шлейфе после согласования, считая, что напряжение генератора осталось неизменным.

3. Постройте векторную диаграмму токов и напряжения в точке подключения шлейфа.

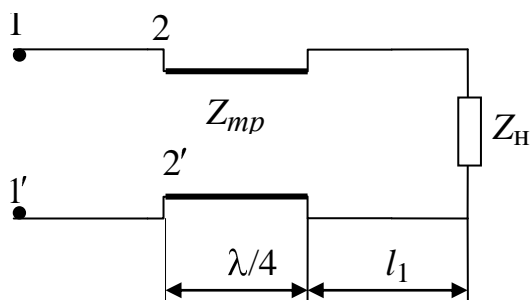
4. Постройте графики распределения действующих значений напряжения и тока падающей и отраженной волны до согласования.

5. Постройте совместно кривые  $U(t)$  для двух точек согласованной линии, отстоящих друг от друга на расстояние  $\lambda/4$ .

### Схемы согласующих устройств

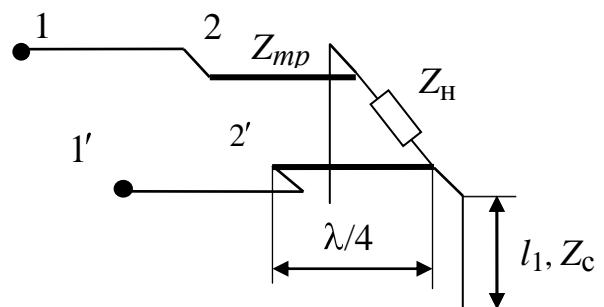
1

Четвертьволновой трансформатор



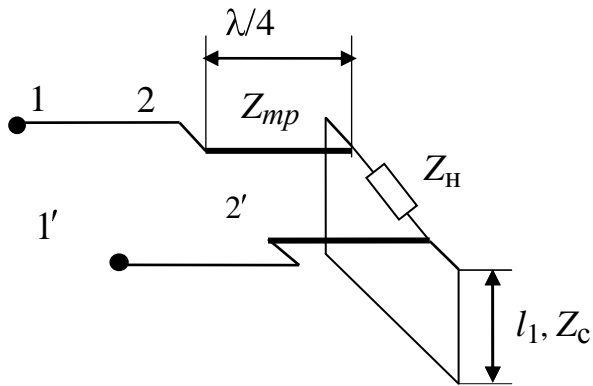
2

Четвертьволновой трансформатор с параллельным разомкнутым шлейфом



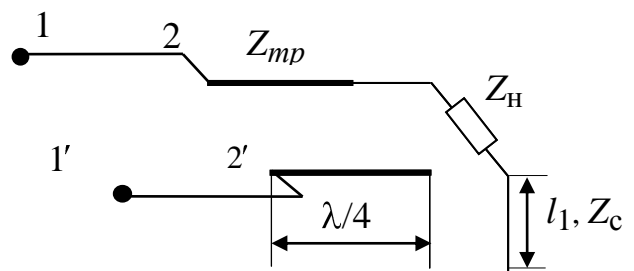
3

Четвертьволновой трансформатор с параллельным короткозамкнутым шлейфом



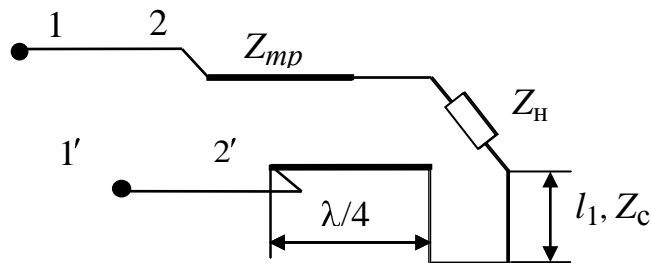
4

Четвертьволновой трансформатор с разомкнутым последовательным шлейфом



5

Четвертьволновой трансформатор с короткозамкнутым последовательным шлейфом



### Методические указания к оформлению контрольной работы

К представленным на рецензию контрольным заданиям предъявляются следующие требования:

1) на обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, домашний адрес, номер контрольного задания, название дисциплины и вариант студента;

2) в тетради следует оставить поля шириной не менее 4 см для замечаний преподавателя;

3) начиная решение задачи, укажите, какие физические законы, расчетные методы предполагается использовать при решении, приведите

математическую запись этих законов и методов. Все основные положения, приводимые при решении, должны быть пояснены;

4) промежуточные и конечные результаты расчетов должны быть четко выделены из общего текста;

5) решение задач не следует перегружать приведением всех алгебраических преобразований и арифметических расчетов;

6) вычисления должны быть сделаны с точностью до третьей значащей цифры;

7) рисунки, графики, схемы должны быть выполнены аккуратно и в удобочитаемом масштабе. Рекомендуется при построении кривых выбирать такой масштаб, чтобы на 1 см оси координат приходилось  $1 \cdot 10^n$  или  $2 \cdot 10^n$  единиц измерения физической величины. Градуировку осей следует выполнять, начиная с нуля, равномерно, через один или два сантиметра. Числовые значения координат точек, по которым строятся кривые, не приводить. Весь график в целом и отдельные кривые на нем должны иметь названия;

8) выполненные контрольные задания должны быть датированы и подписаны студентом;

9) непринятое контрольное задание должно быть выполнено и прислано на повторную рецензию вместе с первоначальной работой и замечаниями рецензента. Исправление ошибок в отрецензированном тексте не допускается. Если неправильно выполнена только часть работы, то переработанный и исправленный текст следует записать в тетради после первоначального текста под заголовком «Исправление ошибок».

Контрольные задания засчитываются, если решения не содержат ошибок принципиального характера и выполнены все перечисленные требования.

Номер варианта контрольных задач выбирается по порядковому номеру студента в учебной группе.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие. . . . .	3
Цель освоения учебной дисциплины . . . . .	3
Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата . . . . .	4
Результаты образования, формируемые в процессе освоения учебной дисциплины . . . . .	4
Программа учебной дисциплины «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» . . . . .	6
Общие рекомендации для изучения дисциплины «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» . . . . .	8
Учебно-методическое и информационное обеспечение учебной дисциплины . . . . .	9
Методические указания к самостоятельному изучению дисциплины «Электромагнитное поле в однородных и распределенных средах» . . . . .	10
Раздел 1. Электромагнитное поле в распределенных средах. . . . .	10
Раздел 2. Электромагнитное поле в однородных средах . . . . .	29
Контрольная работа . . . . .	58

*Учебное издание*

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНЫХ И  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ**

Программа, методические указания по изучению дисциплины  
для студентов заочной формы обучения направления  
подготовки «Электроника и наноэлектроника»  
профиля подготовки «Промышленная электроника»  
квалификации «Бакалавр»

**Кубарев Юрий Григорьевич,  
Сурай Людмила Анатольевна,  
Ерашова Юлия Николаевна**

Кафедра теоретических основ электротехники

Редактор издательского отдела  
Компьютерная верстка

Изд. лиц. ИД № 03480 от 08.12.00. Подписано в печать  
Формат 60 × 84/16. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.  
Физ. печ. л. . Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .  
Тираж \_\_\_\_ экз. Заказ № .

Издательский отдел КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51  
Типография КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51