Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады студентов по теоретической механике

**Казань, Казанский государственный энергетический университет
5-9 декабря 2016 г.**

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович

Рецензент:
доцент кафедры АГД К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович

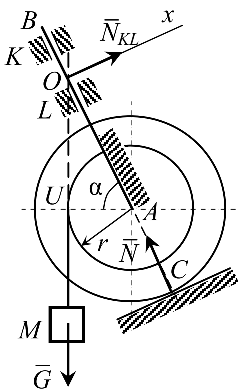

Рис. 1

Решение задачи С1.

1). Линии действия силы тяжести груза $\bar{G}$ и реакции опоры $\bar{N}$ в точке C пересекаются в точке O стержня (рис. 1). Эти силы уравновешиваются приложенной в этой точке равнодействующей сил реакций направляющих K и L стержня $\bar{N}_{KL}$. Уравнение равновесия для проекций на ось x, перпендикулярную AB:

$$\sum_k F_{kx} = -G\cos\alpha + N_{KL} = 0 .$$

$$N_{KL} = mg\cos\alpha .$$

Из треугольника AOU расстояние от точки A до линии действия $\bar{N}_{KL}$ равно:

$$d = \frac{r}{\cos\alpha} .$$

2). Рассмотрим равновесие системы, образованной колесом 1, стержнем и точкой M (рис. 2). Обозначим через $\bar{S}$ силу натяжения нити в точке D. Проецируя на ось y, получим:

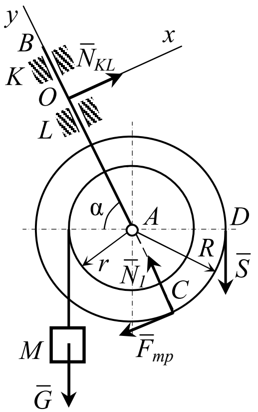

Рис. 2

$$\sum_k F_{ky} = N - S\sin\alpha - P\sin\alpha = 0\,. \qquad (1)$$

С учетом того, что реакции шарнира дают нулевые моменты относительно A, запишем для колеса *1*:

$$\sum_k M_A\left(\overline{F}_k\right) = Gr - SR - F_{mp}R = 0\,. \qquad (2)$$

Аналогично для колеса *2* (рис. 3):

$$\sum_k M_O\left(\overline{F}_k\right) = -F_{mp}r_2 + Sr_2 = 0\,. \qquad (3)$$

Из (3):

$$S = F_{mp}\,. \qquad (4)$$

Из (2), (4):

$$2F_{mp}R = Gr\,.$$

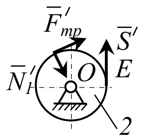

Рис. 3

$$F_{mp} = \frac{r}{2R}G\,. \qquad (5)$$

Выразим G из (1), с учетом (4):

$$G\sin\alpha = N - F_{mp}\sin\alpha\,.$$

$$G = \frac{N}{\sin\alpha} - F_{mp}\,.$$

Подставим в (5) и затем учтем закон Кулона:

$$F_{mp} = \frac{r}{2R}\left(\frac{N}{\sin\alpha} - F_{mp}\right).$$

$$\left(1 + \frac{r}{2R}\right)F_{mp} = \frac{r}{2R\sin\alpha}N\,.$$

$$F_{mp} = \frac{r}{2R\sin\alpha}\cdot\frac{2R}{2R+r}N \le fN\,.$$

$$f \ge \frac{r}{(2R+r)\sin\alpha}\,.$$

Замечание. Из условия $\sum\limits_k M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0$, записанного для стержня, следует $N_{KL}\cdot OA = 0$. Так как $N_{KL} \ne 0$ (очевидно при проецировании всех сил системы на горизонтальную ось), то здесь $OA = 0$. На вывод решения это не влияет.

Ответ. 1). $N_{KL} = mg\,cos\,\alpha$, $d = \dfrac{r}{cos\,\alpha}$. 2). $f \geq \dfrac{r}{(2R + r)\,sin\,\alpha}$.

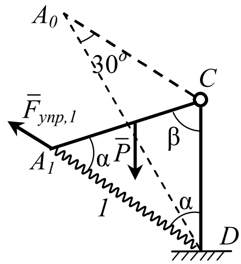

Рис. 4

Решение задачи С2.

Обозначим индексами «0» и «1» положения концов стержней при недеформированных пружинах и при равновесии, соответственно (рис. 4). Запишем уравнение равновесия стержня *AC*, обозначив через α, β углы между *AC* и пружиной *1* и между *AC* и *CD*, соответственно:

$$\sum_k M_C\left(\overline{F}_k\right) = -F_{упр,1} \sin\alpha \cdot l + P \sin\beta \cdot \frac{l}{2} +$$

$$+ M_C\left(\overline{F}_{упр,3}\right) = 0. \qquad (1)$$

Для сохранения положения равновесия независимо от коэффициента жесткости пружины *3* должно выполняться условие:

$$M_C\left(\overline{F}_{упр,3}\right) = 0. \qquad (2)$$

Из (1) с учетом (2) и $\sin\beta = \sin\left(180^\circ - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$:

$$F_{упр,1} \sin\alpha = \frac{1}{2} P \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$F_{упр,1} = P\cos\alpha. \qquad (3)$$

Здесь

$$F_{упр,1} = c_1 \Delta l_1 = c_1\left(A_0 D - A_1 D\right) =$$

$$= c_1 \cdot \left(2l\cos 30^\circ - 2l\cos\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} \cdot \frac{P}{l}\left(\sqrt{3}l - 2l\cos\alpha\right).$$

Из (3) после арифметических преобразований получим:

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} P\left(\sqrt{3} - 2\cos\alpha\right) = P\cos\alpha.$$

$$(2+\sqrt{6}-2)\cos\alpha = P\sqrt{3}\ .$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ\ . \qquad (4)$$

Условие (2) может реализоваться в двух случаях. В 1-м случае $F_{упр,3} = 0$. Во 2-м случае линия действия $\overline{F}_{упр,3}$ проходит через точку C.

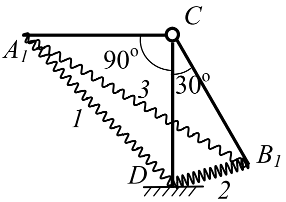

Рис. 5

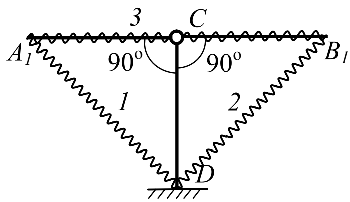

Рис. 6

В 1-м случае пружина 3 недеформирована, т.е. угол между стержнями AC и BC равен 120°. При этом возможны два положения пружины 2.

При одном из них отрезок BC получается поворотом AC на 120° вокруг C против часовой стрелки (рис. 5). Обозначим $c_2 = k_2\dfrac{P}{l}$. Записывая уравнение равновесия BC по аналогии с (1), получим аналог (3):

$$F_{упр,2} = P\cos\alpha_2\,, \qquad (5)$$

где

$$F_{упр,2} = c_2\Delta l_2 = c_2\left(B_0D - B_1D\right) =$$

$$= c_2\cdot\left(2l\cos 30^\circ - 2l\cos\alpha_2\right) = k_2\frac{P}{l}\left(\sqrt{3}l - 2l\cos\alpha_2\right).$$

$$\alpha_2 = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^\circ\ .$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Тогда из (5):

$$k_2\left(\sqrt{3} - 2\cos 75^\circ\right) = \cos 75^\circ .$$

$$k_2 = \frac{\cos 75^\circ}{\sqrt{3} - 2\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}.$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)} \cdot \frac{P}{l}.$$

Другое возможное положение BC, при котором отрезок BC получается поворотом AC на 120° вокруг C по часовой стрелке, не является равновесным, так как несложно заметить: при этом пружина BC растянута, в записи $\sum\limits_k M_C\left(\overline{F}_k\right)$ получим $M_C\left(\overline{F}_{упр,2}\right) < 0$, $M_C\left(\overline{P}\right) < 0$, откуда $\sum\limits_k M_C\left(\overline{F}_k\right) < 0$.

Во 2-м случае, когда линия действия $\overline{F}_{упр,3}$ проходит через точку C, получаем, что AC и BC лежат на одной прямой, угол между ними 180°, т.е. угол между BC и CD также равен 90° (рис. 6). В силу симметрии сразу получаем при этом для равновесия:

$$c_2 = c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}-2} \cdot \frac{P}{l}.$$

Ответ. $c_2 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)} \cdot \dfrac{P}{l}$ или $c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}-2} \cdot \dfrac{P}{l}$.

Решение задачи К1.

1). Построим мгновенные центры скоростей P_1 и P_2 для AB и BC, соответственно (рис. 7). Так как $AP_1 = BP_1$, то $v_B = v_A = v$. Так как

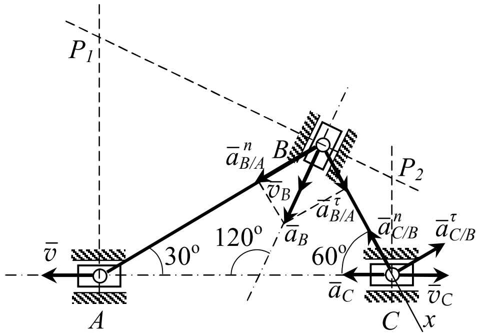

Рис. 7

$BP_2 = CP_2$, то

$$v_C = v_B = v\,.$$

При этом

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{v}{l}\,. \qquad (1)$$

С учетом $BC = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$,

$$BP_2 = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{l}{3}:$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{3v}{l}\,. \qquad (2)$$

При плоскопараллельном движении *AB* с учетом $v = const$:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{B/A}^{\tau} + \overline{a}_{B/A}^{n} = \overline{a}_{B/A}^{\tau} + \overline{a}_{B/A}^{n}\,.$$

Из соответствующего прямоугольного треугольника:

$$tg60^o = \frac{a_{B/A}^{n}}{a_{B/A}^{\tau}}\,.$$

$$a_{B/A}^{n} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{v^2}{l}\,.$$

$$a_{B/A}^{\tau} = \frac{a_{B/A}^{n}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}v^2}{3l}\,.$$

При плоскопараллельном движении *BC*:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{C/B}^{\tau} + \overline{a}_{C/B}^{n} = \overline{a}_{B/A}^{\tau} + \overline{a}_{B/A}^{n} + \overline{a}_{C/B}^{\tau} + \overline{a}_{C/B}^{n}\,. \qquad (3)$$

$$a_{C/B}^{n} = BC \cdot \omega_{BC}^2 = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9v^2}{l^2} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{l}\,.$$

Проецируем на ось *x* (перпендикулярно $\overline{a}_{C/B}^{\tau}$):

$$-a_C \cos 60^o = a_{B/A}^{\tau} - a_{C/B}^{n}\,.$$

$$a_C = 2\left(\frac{3\sqrt{3}v^2}{l} - \frac{\sqrt{3}v^2}{3l}\right) = \frac{16\sqrt{3}v^2}{3l}\,.$$

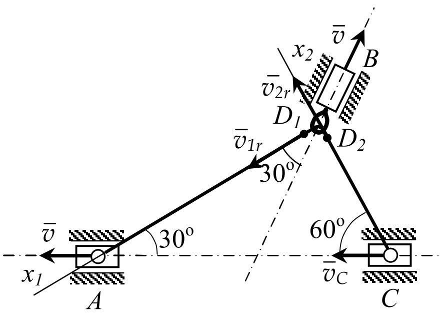

Рис. 8

2). *1 способ (геометрический).* Обозначим через D_1 и D_2 точки нити, предельно близкие к ушку, находящиеся по разные стороны от него (рис.8). Движение каждой из них можно рассмотреть как сложное, при котором переносным является движение ушка со скоростью $\overline{v}_B$, $v_B = v$, а относительным – движение D_1 или D_2 относительно ушка со скоростью $\overline{v}_{1r}$ или $\overline{v}_{2r}$, соответственно. Так как нить нерастяжима, то $v_{1r} = v_{2r} = v_r$.

По теореме о сложении скоростей при сложном движении:

$$\overline{v}_{D_1} = \overline{v}_B + \overline{v}_{1r}.$$

Участок нити AD_1 в данный момент совершает плоскопараллельное движение. По теореме о проекциях скоростей для AD_1 при проецировании на ось x_1:

$$v_A \cos 30^\circ = v_r - v_B \cos 30^\circ.$$

$$2v \cos 30^\circ = v_r.$$

$$v_r = \sqrt{3}v. \tag{4}$$

Аналогично для точки D_2 и участка нити D_2C получим:

$$\overline{v}_{D_2} = \overline{v}_B + \overline{v}_{2r}.$$

$$v_r + v_B \cos 60^\circ = v_C \cos 60^\circ.$$

Учтем здесь (4):

$$\sqrt{3}v + \frac{v}{2} = \frac{v_C}{2}.$$

$$v_C = \left(2\sqrt{3} + 1\right)v.$$

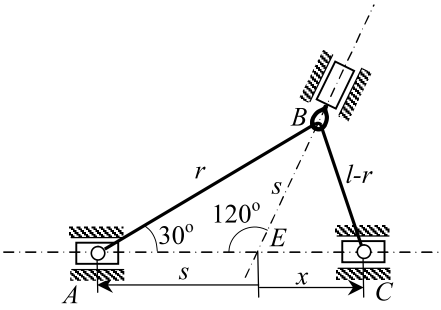

Рис. 9

2 способ (аналитический). Рассмотрим положение системы в произвольный момент времени, предполагая, что все время $v_A = v_B = v$ и треугольник ABE остается равнобедренным (рис.9). Обозначим $AE = BE = s$, $AB = r$. Тогда $BC = l - r$, где l – длина всей нити.

$$r = 2s \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}\, s .$$

$$\dot{r} = \sqrt{3}\, \dot{s} = \sqrt{3}\, v . \tag{5}$$

По теореме косинусов:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cdot \cos 60^\circ ,$$

$$\left(l - r\right)^2 = s^2 + x^2 - 2sx \cdot \frac{1}{2} .$$

$$\left(l - r\right) \cdot (-2\dot{r}) = 2s\dot{s} + 2x\dot{x} - \dot{s}x - s\dot{x} . \tag{6}$$

В рассматриваемый момент времени треугольник BEC по условию является равносторонним. При этом $l - r = s = x$. Сокращаем в (6) этот общий множитель и учитываем $\dot{s} = v$, $\dot{x} = -v_C$ и (5):

$$-2\dot{r} = 2\dot{s} + 2\dot{x} - \dot{s} - \dot{x} .$$

$$-2\sqrt{3}v = v - v_C .$$

$$v_C = \left(2\sqrt{3} + 1\right) v .$$

Ответ К1. 1). $v_C = v$. $a_C = \dfrac{16\sqrt{3}v^2}{3l}$. 2). $v_C = \left(2\sqrt{3} + 1\right) v$.

Решение задачи К2.

1 способ (геометрический). Сначала рассмотрим случай, когда AB движется поступательно, т.е. в данный момент $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$. Тогда векторы ускорений для всех точек AB одинаковы. Значит, одинаковы

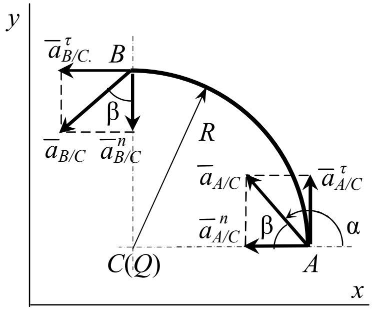

Рис. 10

и величины ускорений всех точек. При всех α из заданного в условии промежутка $0 \le \alpha \le 180^o$ получим:

$$a_{Bx} = a_{Ax} = a\cos\alpha\,,$$

$$a_{By} = a_{Ay} = a\sin\alpha\,.$$

Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одно из значений ω или ε не равно нулю. Согласно известной теореме, в этом случае при движении плоской фигуры в своей плоскости в каждый момент времени имеется единственная точка, ускорение которой равно нулю. Это точка Q – мгновенный центр ускорений (МЦУ). Для любой точки M тела при этом выполняется:

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

Из условия равенства величин ускорений всех точек AB следует, что расстояние MQ для любой точки тела принимает одно и то же значение. Такая ситуация реализуется, если МЦУ находится в центре C закругления AB (рис. 10). Тогда все расстояния MQ равны радиусу R закругления AB.

Получаем: $\overline{a}_C = 0$, $\overline{a}_A = \overline{a}_{A/C} = \overline{a}^{\tau}_{A/C} + \overline{a}^{n}_{A/C}$. Так как вектор нормального ускорения $\overline{a}^{n}_{A/C}$ направлен к точке C либо равен нулю (если $\omega = 0$), то угол $\beta = 180^o - \alpha$ между $\overline{a}_A$ и $\overline{a}^{n}_{A/C}$ не может превышать 90^o. Это условие возможно при $90^o \le \alpha \le 180^o$. При этом:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{B/C} = \overline{a}^{\tau}_{B/C} + \overline{a}^{n}_{B/C}\,.$$

В силу $a^{\tau}_{B/C} = a^{\tau}_{A/C}$, $a^{n}_{B/C} = a^{n}_{A/C}$, угол между векторами $\overline{a}_B$ и $\overline{a}^{n}_{B/C}$ тоже равен β.

$$a_{Bx} = -a\sin\beta = -a\sin\alpha\,,\quad a_{By} = -a\,cos\,\beta = a\,cos\,\alpha\,.$$

Приведенное рассуждение с использованием МЦУ позволяет строго обосновать отсутствие других решений задачи.

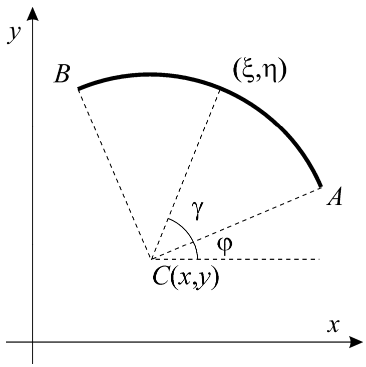

Рис. 11

2 способ (аналитический, предложен Р.Ф. Мардановым). Плоскопараллельное движение AB задается перемещением полюса C с координатами (x, y) и поворотом вокруг него, определяемым углом φ. Обозначим через (ξ, η) координаты точки AB с угловой координатой γ (рис. 11). Тогда

$$\xi = x + R\cos(\varphi + \gamma),$$
$$\eta = y + R\sin(\varphi + \gamma).$$

Дифференцируя, получим:

$$\dot\xi = \dot x - R\sin(\varphi + \gamma)\dot\varphi,$$
$$\dot\eta = \dot y + R\cos(\varphi + \gamma)\dot\varphi,$$
$$\ddot\xi = \ddot x - R\cos(\varphi + \gamma)\dot\varphi^2 - R\sin(\varphi + \gamma)\ddot\varphi,$$
$$\ddot\eta = \ddot y - R\sin(\varphi + \gamma)\dot\varphi^2 + R\cos(\varphi + \gamma)\ddot\varphi.$$

Или, учтя, что в расчетный момент времени $\varphi = 0$:

$$\ddot\xi = \ddot x - R\cos\gamma\dot\varphi^2 - R\sin\gamma\ddot\varphi,$$
$$\ddot\eta = \ddot y - R\sin\gamma\dot\varphi^2 + R\cos\gamma\ddot\varphi.$$

Так как для любой точки AB по условию задачи модуль ускорения постоянен и равен a, то его квадрат по теореме Пифагора:

$$w^2 = \ddot\xi^2 + \ddot\eta^2 = \ddot x^2 + \ddot y^2 + R^2\dot\varphi^4 + R^2\ddot\varphi^2 - 2\ddot x R(\cos\gamma\dot\varphi^2 + \sin\gamma\ddot\varphi) -$$
$$- 2\ddot y R(\sin\gamma\dot\varphi^2 - \cos\gamma\ddot\varphi) = \ddot x^2 + \ddot y^2 + R^2\dot\varphi^4 + R^2\ddot\varphi^2 +$$
$$+ 2R\left[\cos\gamma(\ddot y\ddot\varphi - \ddot x\dot\varphi^2) - \sin\gamma(\ddot y\dot\varphi^2 + \ddot x\ddot\varphi)\right] = a^2.$$

Для того чтобы последнее соотношение выполнялось для любой точки AB необходимо, чтобы w^2 не зависело от γ. Для этого потребуем равенства нулю коэффициентов при $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$:

$$\begin{cases} \ddot y\ddot\varphi - \ddot x\dot\varphi^2 = 0, \\ \ddot y\dot\varphi^2 + \ddot x\ddot\varphi = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot y(\dot\varphi^4 + \ddot\varphi^2) = 0, \\ \ddot x(\dot\varphi^4 + \ddot\varphi^2) = 0. \end{cases}$$

Удовлетворение последней системы уравнений возможно лишь в двух случаях: а) $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ или б) $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$.

Так как для точки A угол $\gamma = 0$, то

$$\ddot{\xi}_A = \ddot{x} - R\dot{\varphi}^2 = a\cos\alpha, \quad \ddot{\eta}_A = \ddot{y} + R\ddot{\varphi} = a\sin\alpha. \qquad (1)$$

Для точки B угол $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$\ddot{\xi}_B = \ddot{x} - R\ddot{\varphi}, \quad \ddot{\eta}_B = \ddot{y} - R\dot{\varphi}^2. \qquad (2)$$

В случае а) $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ точка C будет являться мгновенным центром ускорений. Из соотношений (1) запишем

$$R\dot{\varphi}^2 = -a\cos\alpha, \quad R\ddot{\varphi} = a\sin\alpha.$$

Так как $R\dot{\varphi}^2 > 0$, то из последних формул следует, что этот случай возможен только для $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Тогда в этом случае из (2) получим

$$\ddot{\xi}_B = -a\sin\alpha, \quad \ddot{\eta}_B = a\cos\alpha.$$

В случае б) $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ движение AB является поступательным. Из соотношения (1) имеем

$$\ddot{x} = a\cos\alpha, \quad \ddot{y} = a\sin\alpha.$$

Тогда в этом случае из (2) найдем

$$\ddot{\xi}_B = a\cos\alpha, \quad \ddot{\eta}_B = a\sin\alpha,$$

причем $0 < \alpha < \pi$.

Ответ. При $0 \le \alpha < 90^o$ $a_{Bx} = a\cos\alpha$, $a_{By} = a\sin\alpha$.

При $90^o \le \alpha \le 180^o$ $a_{Bx} = a\cos\alpha$, $a_{By} = a\sin\alpha$ либо $a_{Bx} = -a\sin\alpha$, $a_{By} = a\cos\alpha$.

Решение задачи Д1.

1). Дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m\frac{dv_x}{dt} = (-t + 2)\, mg\,.$$

$$\int_0^{v_x} dv_x = g\int_0^t (-t+2)\, dt .$$

$$v_x = g\left(-\frac{t^2}{2} + 2t\right) .$$

При $v_x = 0$, $t > 0$ получим: $-\frac{t^2}{2} + 2t = 0$, откуда $t = 4$.

2). При $t = 0$: $Q_x(0) = kmg > 0$. Значит, в этот момент точка не начнет смещаться влево.

2.1. Условие того, что точка сразу начнет смещаться вправо, преодолев силу трения $F_{mp,max} = fmg = mg$, $F_{mp,x} = -mg$, имеет вид: $a_x(0) > 0$, т.е. $Q_x(0) + F_{mp,x} > 0$, $(k-1)mg > 0$, откуда $k > 1$. Тогда движение вправо ($v_x > 0$) вплоть до момента, когда $v_x = 0$, описывается ДУ:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \left[(1-k)t + k\right] mg - mg .$$

$$\int_0^{v_x} dv_x = (1-k)g\int_0^t (t-1)\, dt .$$

$$v_x = (1-k)g\left(\frac{t^2}{2} - t\right) .$$

Значит $v_x = 0$ в момент $t = 2$. При этом $Q_x(2) = \left(2-k\right) mg$. Так как $k > 1$, то $Q_x(2) < mg$ и исключено немедленное возобновление движения вправо из-за невозможности преодоления F_{mp}.

Для немедленного начала движения влево ($v_x < 0$) при $t = 2$ должно быть: $a_x(2) < 0$, $Q_x(2) + F_{mp,x} < 0$, т.е. с учетом $F_{mp,x} = mg$, должно быть: $(2-k+1)\, mg < 0$, откуда $k > 3$. При дальнейшем увеличении t $Q_x(t)$ уменьшается, значит, тем более будет $Q_x(t) + F_{mp,x} < 0$. Поэтому точка больше не остановится. Итак, при $k > 3$ $v_x(t) = 0$ при $t = 2$.

2.2. В случае $1 < k \le 3$ после момента $t = 2$ точка в течение какого-то промежутка времени окажется в состоянии покоя. При предельном равновесии точки, т.е. перед тем, как она начнет смещаться влево, в момент $t = \tau$: $Q_x(\tau) + F_{тр,x} = 0$ при $F_{тр,x} = mg$. Отсюда $\left[(1-k)\tau + k\right] + 1 = 0$, т.е. $\tau = \dfrac{k+1}{k-1}$. (При $k = 3$ будет $\tau = 2$, точка выйдет из равновесия в момент $\tau + dt$, где dt – бесконечно малый промежуток времени. Временной отрезок, когда точка находится в покое, сведется к единственному моменту $t = 2$.) При дальнейшем увеличении t будет $Q_x(t) + F_{тр,x} < 0$, поэтому точка больше не остановится. Итак, при $1 < k \le 3$ $v_x(t) = 0$ при $2 \le t \le \dfrac{k+1}{k-1}$.

2.3. В альтернативном случае, при $0 < k \le 1$ после момента $t = 0$ точка какое-то время будет оставаться в покое. При этих k $Q_x(t) > 0$, поэтому смещение влево исключено при любом t. При предельном равновесии точки, т.е. перед тем, как она начнет смещаться вправо, в момент $t = T$: $Q_x(T) + F_{тр,x} = 0$ при $F_{тр,x} = -mg$. Отсюда $\left[(1-k)T + k\right] - 1 = 0$, т.е. $T = \dfrac{1-k}{1-k} = 1$, если $k \ne 1$! При дальнейшем увеличении t будет $Q_x(t) > mg$, т.е. $Q_x(t) + F_{тр,x} > 0$, поэтому точка больше не остановится. Итак, при $0 < k < 1$ $v_x(t) = 0$ при $0 < t \le 1$.

2.4. Если $k = 1$, сила $Q_x = mg$ не сможет преодолеть $F_{тр} = mg$, и $v_x(t) = 0$ при всех $t > 0$.

Ответ. 1). $t = 4$. 2). При $0 < k < 1$: $0 < t \le 1$. При $k = 1$: $t > 0$. При $1 < k \le 3$: $2 \le t \le \dfrac{k+1}{k-1}$. При $k > 3$: $t = 2$.

Решение задачи Д2.

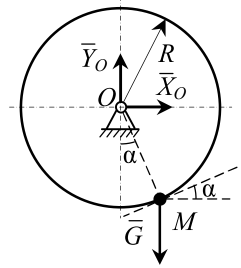

Рис. 12

1). Диск с прикрепленной точкой M образуют единое твердое тело с моментом инерции относительно оси вращения Oz, равным

$$J_z = mR^2 . \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 12):

$$J_z \varepsilon_z = -GR\sin\alpha , \qquad (2)$$

где $\varepsilon_z =$ – алгебраическое угловое ускорение (с учетом знака). Из (1), (2) получаем:

$$\varepsilon = \left|\varepsilon_z\right| = \frac{g\sin\alpha}{R} .$$

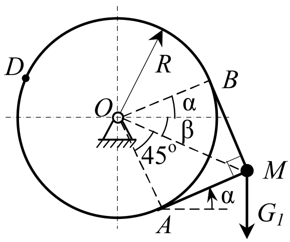

Рис. 13

2). Сначала решим задачу при условии, что обе нити остаются натянутыми в начале движения. В рамках этого условия систему можно рассматривать как единое твердое тело. С учетом $OM = \sqrt{2}R$ его момент инерции относительно Oz (рис.13):

$$J_{12,z} = m_1 \cdot \left(\sqrt{2}R\right)^2 + \frac{m_2 R^2}{2} = \left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right)R^2 .$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz:

$$J_{12,z}\varepsilon_z = -G_1 \cdot OM\cos\beta ,$$

где $\beta = 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$.

$$\left(2m_1+\frac{m_2}{2}\right)R^2\varepsilon_z=-m_1g\cdot\sqrt{2}R\cos\left(45^\circ-\alpha\right).$$

С учетом

$$\cos\left(45^\circ-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$$

получим:

$$\varepsilon=\left|\varepsilon_z\right|=\frac{2m_1g(\sin\alpha+\cos\alpha)}{(4m_1+m_2)R}. \qquad (3)$$

Очевидно, что, так как при заданном условии $0\le\alpha<90^o$ точка *M* находится ниже *B*, участок *BM* нити будет натянут независимо от соотношения между α, m_1, m_2 (подробнее см. замечание 2).

Условием натянутости нижней нити является $S_1>0$, где $\overline{S}_1$ – сила натяжения для *AM* (рис. 14). При этом точка *M* начинает движение по окружности с центром в точке *O*, поэтому $\overline{a}_M\perp OM$ (рис. 14),

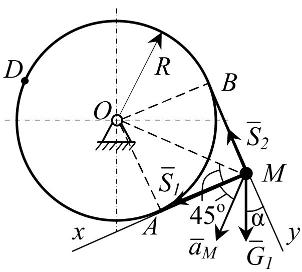

Рис. 14

$$a_M=OM\cdot\varepsilon=\sqrt{2}R\varepsilon. \qquad (4)$$

Запишем второй закон динамики для точки *M* в проекции на ось *x*, перпендикулярную участку нити *BM* (чтобы обнулить проекцию его силы натяжения $\overline{S}_2$):

$$m_1a_M\cos45^\circ=S_1+G_1\sin\alpha. \qquad (5)$$

С учетом (4) и (3) получим из (5):

$$S_1=m_1\cdot\sqrt{2}R\frac{2m_1g(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\left(4m_1+m_2\right)R}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-m_1g\sin\alpha=$$

$$=m_1g\left(\frac{2m_1(\sin\alpha+\cos\alpha)}{4m_1+m_2}-\sin\alpha\right),$$

Из условия $S_1 > 0$:

$$2m_1(\sin\alpha + \cos\alpha) - (4m_1 + m_2)\sin\alpha > 0 .$$

$$2m_1 \cos\alpha > (2m_1 + m_2)\sin\alpha .$$

$$\mathrm{tg}\alpha < \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} . \qquad (6)$$

При невыполнении (6), т.е. в случае $\mathrm{tg}\alpha \geq \frac{2m_1}{2m_1 + m_2}$, участок нити *AM* не натянут (начинает провисать). При этом точка *M* имеет две степени свободы: при движении вдоль *x* и вдоль *y* (рис. 15).

$$\overline{a}_M = \overline{a}_x + \overline{a}_y .$$

Одна из степеней свободы связана с движением *M* вдоль линии нити *BM* с ускорением a_y. При этом очевидно, что $a_y = R\varepsilon$. (Другая степень свободы связана с движением *M* в направлении оси *x*, перпендикулярной нити, при повороте участка *BM* и не связана с угловым ускорением диска.)

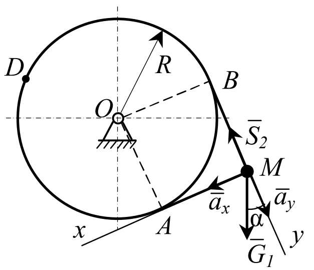

Рис. 15

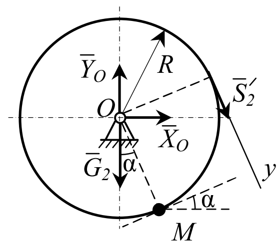

Рис. 16

Запишем второй закон динамики в проекции на *y*:

$$m_1 a_y = G_1 \cos\alpha - S_2 .$$

С учетом $a_y = R\varepsilon$ получим:

$$m_1 R\varepsilon = m_1 g\cos\alpha - S_2 . \qquad (7)$$

Дифференциальное уравнение вращения отдельно рассматриваемого диска вокруг оси Oz (рис.16):

$$\frac{m_2 R^2}{2}\varepsilon_z = -S_2^{/} R .$$

С учетом $\varepsilon_z = -\varepsilon$ получим:

$$S_2 = \frac{m_2 R}{2}\varepsilon . \qquad (8)$$

Подставим (8) в (7):

$$m_1 R\varepsilon = m_1 g\cos\alpha - \frac{m_2 R}{2}\varepsilon .$$

$$\left(2m_1 + m_2\right)R\varepsilon = 2m_1 g\cos\alpha .$$

$$\varepsilon = \frac{2m_1 g\cos\alpha}{\left(2m_1 + m_2\right)R} . \qquad (9)$$

Замечание 1. Проверим, что в пограничном случае при

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} \qquad (10)$$

выражения (3) и (9) совпадают. Из (10) следует

$$\sin\alpha = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2}\cos\alpha . \qquad (11)$$

Подстановка (11) в выражение (3) дает:

$$\frac{2m_1 g\left(\dfrac{2m_1}{2m_1 + m_2} + 1\right)\cos\alpha}{\left(4m_1 + m_2\right)R} = \frac{2m_1 g \cdot \dfrac{4m_1 + m_2}{2m_1 + m_2}\cos\alpha}{\left(4m_1 + m_2\right)R} = \frac{2m_1 g\cos\alpha}{\left(2m_1 + m_2\right)R} ,$$

что совпадает с выражением (9).

Замечание 2. Дадим обоснование того, что $S_2 > 0$.

Предположим противное: пусть при некоторых значениях α , m_1 ,

m_2 будет $S_2 = 0$. Тогда диск либо находится в покое, либо за счет натяжения нити *AM* вращается против часовой стрелки. Тогда для точки *M* получаем $a_y \le 0$.

С другой стороны, независимо от того, натянута ли нить *AM*, по второму закону динамики в проекции на ось *y*: $m_1 a_y = G_1 \cos\alpha - S_2$. Отсюда в силу следующего из условия задачи неравенства $\cos\alpha > 0$ получаем $a_y > 0$.

Пришли к противоречию. Значит, $S_2 > 0$.

Ответ. 1). $\varepsilon = \dfrac{g\sin\alpha}{R}$.

2). При $tg\,\alpha < \dfrac{2m_1}{2m_1 + m_2}$ $\quad \varepsilon = \dfrac{2m_1 g(\sin\alpha + \cos\alpha)}{(4m_1 + m_2)R}$.

При $tg\,\alpha \ge \dfrac{2m_1}{2m_1 + m_2}$ $\quad \varepsilon = \dfrac{2m_1 g\cos\alpha}{(2m_1 + m_2)R}$.

Решение задачи Д3.

Предположим, что колесо 1 катится вниз, а колесо 2 вверх (рис.17). (Если это так, то сумма работ внешних сил должна получиться положительной, в противном же случае отрицательной.) Так как нить нерастяжима, то $v_A = v_B = v$. Мгновенные центры скоростей колес *1* и *2* при их плоскопараллельных движениях находятся в точках P_1 и P_2, соответственно.

$$\frac{v_A}{v_1} = \frac{AP_1}{C_1P_1} = \frac{3r}{2r}.$$

$$v_1 = \frac{2}{3}v. \qquad (1)$$

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_1} = \frac{v}{3r}.$$

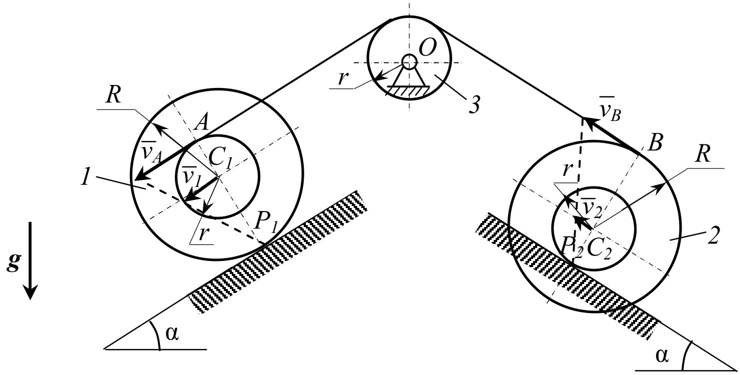

Рис. 17

С учетом этого и, например, теоремы Гюйгенса-Штейнера найдем кинетическую энергию колеса *1*:

$$J_{P_1z} = mr^2 + m(2r)^2 = 5mr^2 .$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{P_1z} \omega_1^2 = \frac{5}{18} mv^2 . \qquad (2)$$

Такой же результат можно получить при использовании формулы $T = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2$.

Аналогично для колеса *2*:

$$\frac{v_B}{v_2} = \frac{BP_2}{C_2P_2} = \frac{3r}{r} .$$

$$v_2 = \frac{1}{3} v . \qquad (3)$$

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_1} = \frac{v}{3r} .$$

$$J_{P_2z} = mr^2 + mr^2 = 2mr^2 .$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{P_2z} \omega_2^2 = \frac{1}{9} mv^2 . \qquad (4)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_{P_1 z} \omega_1^2 = \frac{7}{18} m v^2 . \qquad (5)$$

Интегрируем по времени (1) и (3) при нулевых начальных условиях, получим соотношения для соответствующих перемещений:

$$s_1 = \frac{2}{3} s . \quad s_2 = \frac{1}{3} s .$$

$$\sum_k A_k^e = A_{G_1} + A_{G_2} = mgs_1 \sin\alpha - mgs_2 \sin\alpha =$$

$$= mg\left(\frac{2}{3} s - \frac{1}{3} s\right) sin\,\alpha = \frac{1}{3} mgs\, sin\,\alpha . \qquad (6)$$

По теореме об изменении кинетической энергии механической системы с учетом (5) и (6):

$$T - T_0 = \sum_k A_k^e .$$

$$\frac{7}{18} m v^2 = \frac{1}{3} mgs\, sin\,\alpha .$$

С учетом $v = r\omega$, $s = r\varphi$ получим:

$$\omega_3^2 = \frac{6g\, sin\,\alpha}{7r} \varphi_3 . \qquad (7)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{6g\, sin\,\alpha}{7r} \varphi_3} .$$

Дифференцируем (7) по времени:

$$2\omega_3 \varepsilon_3 = \frac{6g\, sin\,\alpha}{7r} \omega_3 .$$

Сокращая ω_3, находим ε_3:

$$\varepsilon_3 = \frac{3g\, sin\,\alpha}{7r} .$$

Ответ. $\omega_3 = \sqrt{\frac{6g\, sin\,\alpha}{7r} \varphi_3}$. $\varepsilon_3 = \frac{3g\, sin\,\alpha}{7r}$.

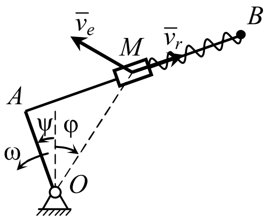

Рис. 18

Решение задачи Д4.

Рассмотрим движение точки M как сложное: переносное движение – вращение вместе со стержнем, относительное движение – движение вдоль стержня (рис. 18).

$$\overline{v}_M = \overline{v}_e + \overline{v}_r .$$

Обозначим через ψ угол поворота OAB. Его угловая скорость: $\omega = \dfrac{d\psi}{dt}$. Закон сохранения кинетического момента:

$$K_{z,1} = K_{z,0}. \qquad (1)$$

Здесь

$$K_{z,0} = 0,$$

$$K_{z,1} = J_z\omega + m_2 v_e \cdot OM - m_2 v_r \cdot OA . \qquad (2)$$

Момент инерции стержня $J_z = \dfrac{m_1 l^2}{3}$, $OM^2 = l^2 + s_r^2$, где $s_r = AM$. Переносная и относительная скорости точки M равны: $v_e = OM \cdot \omega$, $v_r = \dfrac{ds_r}{dt}$. Из (1), (2) получаем с учетом того, что в начальный и конечный моменты $AM_0 = 0$ и $AM_1 = 2l$, соответственно:

$$\left(J_z + m_2(l^2 + s_r^2)\right)\frac{d\psi}{dt} = m_2 \frac{ds_r}{dt} l .$$

$$\int_0^{\psi_1} d\psi = m_2 l \int_0^{2l} \frac{ds_r}{\left(J_z + m_2 l^2\right) + m_2 s_r^2} .$$

$$\psi_1 = \frac{l}{\sqrt{\dfrac{J_z + m_2 l^2}{m_2}}} \operatorname{arctg} \frac{2l}{\sqrt{\dfrac{J_z + m_2 l^2}{m_2}}} .$$

Обозначим для удобства: $k = \sqrt{\dfrac{m_2 l^2}{J_z + m_2 l^2}} = \sqrt{\dfrac{3m_2}{m_1 + 3m_2}}$. Тогда

$$\psi_1 = k \ \operatorname{arctg} 2k \ .$$

Из геометрических соображений для конечного положения:

$$\operatorname{tg}(\psi_1 + \varphi_1) = \frac{AM_1}{OA} = \frac{2l}{l} = 2 \ .$$

$$\psi_1 + \varphi_1 = \operatorname{arctg} 2 \ .$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} 2 - \psi_1 = \operatorname{arctg} 2 - k \ \operatorname{arctg} 2k \ .$$

Заметим, что так как $k < 1$, то $\varphi_1 > 0$.

Ответ. $\varphi = \operatorname{arctg} 2 \ - \ k \operatorname{arctg} 2k$, где $k = \sqrt{\dfrac{3m_2}{m_1 + 3m_2}}$.