МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский государственный
энергетический университет

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие

по курсу «Физика»

Казань 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский государственный
энергетический университет

О.С. ЗУЕВА

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по курсу «Физика»

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия по физике для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

Казань 2014

УДК 53
ББК 22.3
З 93

Зуева О.С.

Механика и молекулярная физика: Учеб. пособие. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2014. 230 с.

Пособие соответствует программе рассматриваемых разделов курса физики для студентов технических, в частности, энергетических специальностей вузов.

Наряду с теоретическим материалом пособие содержит примеры решения задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Рекомендуется для студентов всех форм обучения, но особенно для студентов заочной и очно-заочной форм.

Рецензенты

Зав. кафедрой общей физики КГТУ им. А.Н. Туполева, док. физ.-мат. наук, профессор Б.А. Тимеркаев

Зав. кафедрой физики Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина, профессор В.Б. Нагаев и профессор кафедры физики Р.З. Сюняев

Рекомендовано секцией РИС института электроники и электроэнергетики

Председатель секции В.Л. Матухин

Предисловие

Настоящая книга предназначена для изучающих курс физики студентов технических, в частности, энергетических специальностей вузов. Представленный в ней материал включает в себя части «Механика» и «Молекулярная физика», рассматриваемые в одном из трех (а для некоторых специальностей – четырех) учебных семестров. Рекомендуется для студентов всех форм обучения, но особенно для студентов заочной и очно-заочной форм.

Курс физики является фундаментальной дисциплиной, знание которой необходимо для освоения студентами как общетехнических, так и специальных дисциплин. В процессе изучения дисциплины «Физика», которое начинается на первом курсе, не все студенты в состоянии полностью освоить лекционный материал даже с помощью учебников. Возникающие пробелы в знаниях неизбежно дадут о себе знать впоследствии. Кроме того, не все студенты могут выделить основные наиболее важные положения изучаемого курса, запоминая второстепенные детали в ущерб главному.

Данное пособие предназначено для формирования базовых знаний у студентов, а его отличительной особенностью является то, что теоретический материал представлен в нем в сокращенной форме без выводов. Основной акцент придается объяснению (в том числе в ходе решения типовых задач) физического смысла рассматриваемых величин, что в конечном итоге должно способствовать появлению у студентов необходимых знаний. Пособие, не заменяя учебник, поможет студентам на стадии повторения пройденного теоретического материала, поскольку является кратким системным конспектом основных разделов курса физики.

Теоретические положения рассматриваемых разделов дополняются примерами решения задач, что должно способствовать не только лучшему усвоению предложенного материала, но и развитию умения применять теоретические знания для решения различных вопросов и задач. Кроме того, в каждом разделе приведены контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения. Большое количество системно подобранных задач может оказать значительную помощь преподавателю при проведении практических занятий и организации самостоятельной работы студентов. Приведена таблица вариантов для выполнения студентами расчетных и контрольных заданий, а также некоторые справочные данные.

Неотъемлемой частью изучения курса физики является выполнение лабораторных работ. При этом неизбежно возникают вопросы, касающиеся правильной обработки результатов измерений физических величин. Поэтому в данном пособии приведена очень нужная, но не относящаяся к лекционному материалу, краткая теория учета погрешностей при проведении физических экспериментов.

Часть данного пособия посвящена также вопросам контроля усвоения пройденного материала. Особое внимание уделено тестовому контролю знаний студентов. В частности, приведены примеры тестовых заданий по трем разделам курса физики.

Итак, данное пособие охватывает все виды деятельности студентов по изучению курса физики. Являясь кратким конспектом курса, оно может эффективно использоваться при повторении и обобщении материала, при освоении методики решения практических задач, при самостоятельном выполнении расчетных заданий, обработке экспериментальных данных и при подготовке к контрольным мероприятиям.

Пособие окажет методическую помощь студентам-заочникам, осваивающим курс физики самостоятельно или при периодическом общении с преподавателем при дистанционном обучении.

В ряде случаев пособие может быть использовано в качестве справочного, поскольку в нем приводятся практически все основные закономерности, определения, формулы, необходимые для освоения частей «Механика» и «Молекулярная физика» общего курса физики.

ВВЕДЕНИЕ

ПРЕДМЕТ ФИЗИКИ

Предметом физики является описание простейших и в то же время наиболее общих форм движения материи. Современная физика – обширная и разветвленная наука, но ее разделы имеют много общих черт. Поскольку развитие техники базируется на достижениях физики, четкое понимание логики постановки и решения физических вопросов необходимо для плодотворной деятельности современного инженера.

Физические законы устанавливаются на основе опытных фактов и выражают объективные закономерности, существующие в природе; только опыт является критерием их правильности. Поскольку опытные факты всегда ограничены как по точности проведенных измерений, так и по области изменения физических величин, каждый физический закон имеет определенную область применимости. Области применимости разных законов сильно отличаются друг от друга. Физические законы, имеющие наиболее обширные области применимости, называются фундаментальными (например, законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, законы Ньютона, закон Кулона). В принципе, небольшого количества наиболее фундаментальных законов достаточно для объяснения и предсказания хода почти всех физических (и технических) процессов, однако математически такое решение может оказаться невероятно громоздким, а потому недопустимым.

Практически же в физике и особенно в технике приходится использовать огромное число эмпирических закономерностей, имеющих узкую область применимости и не претендующих на объяснение механизма исследуемого процесса. При решении конкретной задачи встает вопрос о том, какие из многочисленных явлений и свойств необходимо учитывать и какими явлениями и свойствами можно пренебречь, т.е. встает вопрос о модели − упрощенной копии исследуемой реальной физической системы.

Для описания движения тел в физике пользуются, в зависимости от условий каждой конкретной задачи, различными приближенными моделями.

<u>Материальная точка</u> – тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Всякое тело можно разбить на большое количество сколь угодно малых по сравнению с его размерами частей – систему материальных точек.

<u>Абсолютно твердое тело</u> − тело, расстояния между точками которого можно считать постоянными.

Изучение курса физики начинают с изучения раздела «Механика», в котором рассматриваются закономерности изменения с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Механика состоит из кинематики, динамики, статики. В кинематике исследуют характеристики и закономерности различных типов механического движения тел, не интересуясь причинами, обуславливающими это движение. В динамике изучают влияние взаимодействий между телами на их механическое движение. В статике рассматриваются законы сложения сил и условия равновесия тел. Вопросы внутреннего строения тел и физической природы взаимодействий между телами или их частями в механике не рассматриваются.

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ

Корректное решение физических задач невозможно без основательного знания единиц физических величин. Различные системы единиц отличаются друг от друга тем, какие единицы приняты за основные.

В настоящее время в научной, а также в учебной литературе обязательна к применению Система Интернациональная (СИ), которая строится на семи основных единицах и двух дополнительных (таблица 1).

Таблица 1

Величина	Единица	
	наименование	обозначение
Основные единицы		
длина	метр	м
масса	килограмм	кг
время	секунда	с
сила электрического тока	ампер	А
термодинамическая температура	кельвин	К
сила света	кандела	кд
количество вещества	моль	моль
Дополнительные единицы		
плоский угол	радиан	рад
телесный угол	стерадиан	ср

Для установления производных единиц используют физические законы, связывающие их с основными единицами. Единицы механических величин и их размерности приведены в приложении 1.

ЧАСТЬ I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Механическое движение

Простейшей формой движения материи является механическое движение, при котором тела или их части перемещаются друг относительно друга. Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – <u>поступательное</u> и <u>вращательное</u>.

При поступательном движении любая прямая, соединяющая две произвольные точки тела, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. Поступательное движение абсолютно твердого тела может быть охарактеризовано движением какой-либо одной его точки, например, движением центра масс.

При вращательном движении абсолютно твердого тела все его точки описывают окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой <u>осью вращения</u>. Ось вращения может находиться как внутри, так и вне тела. Ось вращения проходит перпендикулярно плоскостям окружностей точек.

Основная задача кинематики заключается в описании движения тела (системы тел), т.е. в нахождении уравнений, позволяющих по заданным начальным условиям рассчитать положение тела в любой момент времени.

Поскольку движение материальной точки описывается проще, чем движение протяженного тела, рассмотрение вопросов кинематики начинают именно для этого случая.

1.2. Система отсчета

Положение материальной точки в пространстве в данный момент времени можно определить по отношению его к системе неподвижных относительно друг друга тел и при наличии отсчитывающих время часов, т.е. с помощью системы отсчета. В качестве системы отсчета для описания движения материальной точки можно выбрать декартову систему координат, оси x, y и z которой задаются ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соответственно (рис. 1.1).

Положение каждой точки в декартовой системе определяется либо ее координатами x, y, z, либо с помощью проведенного из начала координат в данную точку радиус-вектора:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.1}$$

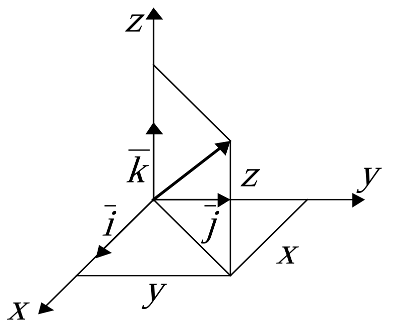


Рис. 1.1

Изменение положения точки – механическое движение – происходит во времени, которое всегда изменяется от прошлого к будущему и отсчитывается часами от произвольно выбираемого начального момента времени.

При движении точки ее координаты со временем меняются, т.е. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, что эквивалентно одному векторному уравнению $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

1.3. Вектор перемещения. Путь

Линия, по которой движется материальная точка, называется траекторией. Изменение положения точки, двигавшейся в течение промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$, определяется вектором перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (рис. 1.2). При этом точка проходит путь Δs, равный длине соответствующего участка траектории. В общем случае модуль вектора перемещения не равен пути, пройденному за рассматриваемый промежуток времени. Если точка возвращается в исходное положение, ее вектор перемещения равен нулю, в то время как путь нулю не равен. Путь является скалярной величиной и поэтому пути, пройденные точкой за последовательные промежутки времени, складываются арифметически.

При уменьшении промежутка времени Δt вектор перемещения располагается все ближе к траектории, а его направление все более совпадает с направлением касательной. При $\Delta t \to 0$ вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ направлен вдоль касательной к траектории, задавая направление движения точки.

1.4. Скорость

Быстрота движения и его направление в данный момент времени определяются векторной физической величиной – скоростью $\vec{\upsilon}$ (рис. 1.2).

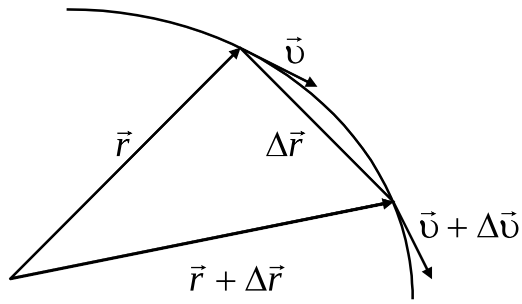


Рис. 1.2

Средняя скорость $\vec{\upsilon}_{ср}$ равна отношению перемещения точки $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени Δt, за который произошло это перемещение, т.е.

$$\vec{\upsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

Скорость измеряется в метрах в секунду (м/с).

Если $\Delta t \to 0$, получим выражение для мгновенной скорости:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор скорости $\vec{\upsilon}$ направлен по касательной в сторону движения. Заметим, что при $\Delta t \to 0$ модуль вектора перемещения Δr становится равным пути Δs и поэтому модуль скорости $\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$.

Поскольку вектор скорости может быть разложен на компоненты:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y + \vec{\upsilon}_z = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

а, по определению,

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \tag{1.2}$$

можно найти связь проекций вектора скорости и производных от соответствующих координат:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль скорости υ равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

В случае равномерного прямолинейного движения скорость не зависит от времени, т.е. $\vec{\upsilon} = \text{const} = \vec{\upsilon}_0$, а значит, вид траектории определяется дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}_0. \tag{1.3}$$

Его решением будет функция:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t, \tag{1.4}$$

эквивалентная системе уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_{0x} t, \\ y = y_0 + \upsilon_{0y} t, \\ z = z_0 + \upsilon_{0z} t, \end{cases} \tag{1.5}$$

являющихся уравнениями движения материальной точки в случае равномерного движения.

В этом случае траекторией будет прямая линия, причем вектор скорости направлен вдоль траектории. Средняя скорость за любой промежуток времени равна мгновенной скорости, т.е. $\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \vec{\upsilon}_0$.

1.5. Ускорение и его составляющие

Вектор скорости может меняться как по величине, так и по направлению. Быстроту изменения вектора скорости характеризует ускорение $\vec{a}$. Среднее ускорение, аналогично средней скорости, может быть найдено из соотношения:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1}.$$

Ускорение измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с^2).

Соответственно, мгновенное ускорение определяется формулой:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.6)$$

Проекции вектора ускорения на координатные оси равны:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора изменения скорости и по отношению к траектории может быть различным в зависимости от вида движения. Введем понятие тангенциальной $\vec{a}_\tau$ (направленной по касательной траектории) и нормальной $\vec{a}_n$ (направленной по нормали к касательной) составляющих вектора ускорения; вектор полного ускорения всегда можно представить в виде соотношения (рис. 1.3)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}.$$

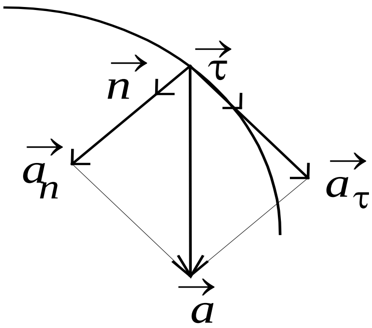


Рис. 1.3

где $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ – орты соответствующих направлений. Тангенциальная составляющая характеризует быстроту изменения численного значения скорости движения, а ее модуль равен

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

В свою очередь, модуль нормальной составляющей определяется соотношением

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где радиус кривизны R представляет собой радиус окружности, которая сливается в данном месте с кривой на бесконечно малом ее участке. Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения направления скорости движения.

В случае <u>равномерного движения по окружности</u> $\upsilon = \text{const}$, а значит, $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$. Заметим, что не изменяется только модуль скорости, направление вектора скорости, наоборот, все время меняется. В этом случае все ускорение является нормальным, причем

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \text{const}.$$

Итак, движение с постоянным нормальным ускорением – это движение по окружности.

В случае <u>равнопеременного движения</u> вектор ускорения $\vec{a}$ остается постоянным как по величине, так и по направлению, т.е.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \text{const}.$$

Решением этого дифференциального уравнения будут функции:

$$\begin{gathered} \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t; \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

которые в скалярном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \qquad x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}; \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t, \qquad y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}; \\ \upsilon_z = \upsilon_{0z} + a_z t, \qquad z = z_0 + \upsilon_{0z}t + \dfrac{a_z t^2}{2}. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Именно эти уравнения и будут уравнениями движения для точки, двигающейся равноускоренно.

Всякое механическое движение относительно; характер движения будет различным в зависимости от того, по отношению к какой системе отсчета это движение рассматривается. Опытным путем установлен принцип независимости движений: если точка одновременно участвует в нескольких движениях, то результирующее перемещение точки равно векторной сумме перемещений, совершаемых ею за то же время в каждом из движений порознь.

1.6. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Свободным падением тела называется движение, которое совершало бы тело под действием силы тяжести без учета сопротивления воздуха. При свободном падении тела с небольшой высоты оно движется с постоянным ускорением g = 9,81 м/с^2, направленным вертикально вниз, независимо от массы тела и направления его начальной скорости.

Принцип независимости движений позволяет получить уравнения движения тела, брошенного с некоторой высоты H под углом α к горизонту (рис. 1.4).

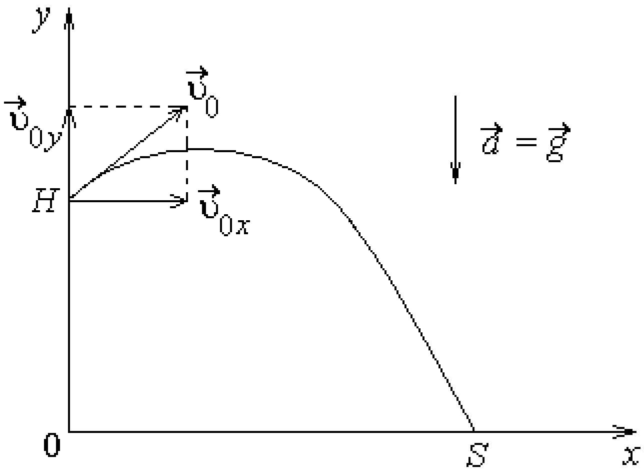


Рис. 1.4

Такое движение можно считать происходящим независимо по направлениям x и y с начальными скоростями:

$$\begin{aligned} \upsilon_{0x} &= \upsilon_0 \cos\alpha, \\ \upsilon_{0y} &= \upsilon_0 \sin\alpha, \end{aligned} \tag{1.9}$$

соответственно. В этом случае движение по оси x является равномерным, так как силы вдоль оси x не действуют, происходит со скоростью υ_{0x} и описывается уравнением:

$$x = \upsilon_{0x} t = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t\,.$$

Вдоль оси y действует сила тяжести, направленная вертикально вниз, поэтому движение по этой оси происходит с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$ (проекция $a_y = -g$) и описывается уравнением:

$$y = H + \upsilon_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} = H + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2};$$

скорость меняется по закону:

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t = \upsilon_0 \sin\alpha - gt\,.$$

Итак, движение тела, брошенного под углом к горизонту, описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t; \\ y = H + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt, \end{cases} \tag{1.10}$$

которые полностью определяют параметры траектории, положение тела и его скорости, а также нормальную и тангенциальную составляющие ускорения $\vec{g}$ в любой момент времени. Отметим, что траекторией движения будет парабола.

В частности, для определения величин, связанных с точкой падения, рассматривают уравнения (1.10) именно в этот момент $t = t_{п}$ ($t_{п}$ – время падения) и учитывают, что в этот момент времени коодинаты тела $x = S$, $y = 0$. Для определения максимальной высоты подъема $y = H_{max}$, которая достигается при $t = t_{в}$ ($t_{в}$ – время подъема до максимальной точки), учитывают, что в этот момент времени скорость тела направлена строго горизонтально, т.е. $\upsilon_y = 0$.

1.7. Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов. Характеризовать это движение с помощью линейной скорости $\vec{\upsilon}$, зависящей от радиуса R, неудобно. Вращательное движение гораздо удобнее рассматривать не с помощью декартовых координат, а с помощью полярных (сферических) координат, когда положение точки на окружности задается углом φ, который образует вектор $\vec{R}$ с каким-либо направлением (обычно с его направлением в нулевой момент времени). Угол φ измеряется в радианах (рад). В этом случае можно ввести угловую скорость вращения, одинаковую для всех точек вращающегося тела.

Угловой скоростью ω называется вектор, численно равный первой производной от угла поворота φ по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{1.11}$$

и направленный вдоль оси вращения в соответствии с правилом правого винта (как показано на рис. 1.5). Вектор $\vec{\omega}$ определяет положение оси вращения, направление и быстроту вращения тела. Единицей измерения угловой скорости является радиан в секунду (рад/с)

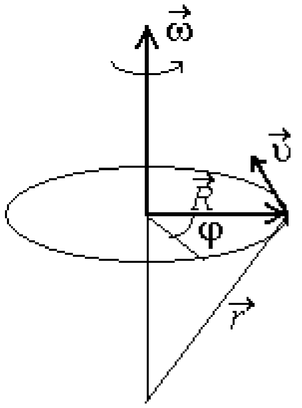


Рис. 1.5

Вращение называется равномерным, если угловая скорость $\vec{\omega}$ постоянна. В этом случае $\omega = \mathrm{const} = \omega_0$, следовательно, $\varphi = \omega_0 t$. При равномерном вращении величина $\nu = \omega/2\pi$ дает число оборотов за единицу времени и называется <u>частотой обращения</u>. Продолжительность одного обращения $T = 1/\nu$ называется <u>периодом вращения</u>.

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости, зависящие не только от ω, но и от расстояния до оси вращения R. Кроме того, при движении по окружности скорость $\vec{\upsilon}$ непрерывно изменяет свое направление. Можно показать, что

$$\upsilon = \omega R, \qquad \vec{\upsilon} = [\,\vec{\omega}\vec{R}\,] = [\,\vec{\omega}\,\vec{r}\,].$$

Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие <u>углового ускорения</u> $\vec{\varepsilon}$, равного

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Единицей измерения углового ускорения является радиан на секунду в квадрате (рад/с^2).

Вектор ω может изменяться как по величине (за счет изменения скорости вращения тела), так и за счет поворота оси вращения в пространстве. В случае вращения вектора вокруг неподвижной оси:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.12)$$

Тангенциальную $\vec{a}_\tau$ и нормальную $\vec{a}_n$ составляющие линейного ускорения точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

можно выразить через угловую скорость и угловое ускорение следующим образом,

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\,\vec{R}] = [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]; \qquad \vec{a}_n = -\,\omega^2 \vec{R}.$$

Уравнение кинематики вращательного движения в случае равнопеременного вращения тела может быть получено из условия $\varepsilon = \mathrm{const} = \frac{d\omega}{dt}$. Решением этого уравнения являются функции:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \qquad \varphi = 2\pi N = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 – начальная угловая скорость вращения, N – число оборотов, пройденных телом к моменту времени t, знаки «+» и «–» соответствуют случаям равноускоренного и равнозамедленного движений.

Наряду с вращательным движением, твердое тело может осуществлять так же и поступательное движение, т.е. такое движение, при котором все точки твердого тела имеют одинаковую скорость $\vec{\upsilon}$ и описывают траектории одинаковой формы. Существует правило, согласно которому произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью какой-либо его точки $\vec{\upsilon}$ и вращения вокруг оси, проходящий через эту точку, характеризуемого вектором $\vec{\omega}$. Каждый из векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$ задается в пространстве значениями своих трех компонент. Поэтому надо знать всего 6 величин для того, чтобы определить скорость любой точки твердого тела. Поэтому говорят, что твердое тело представляет собой механическую систему с шестью степенями свободы.

1.8. Примеры решения задач

Задача 1-1. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где C = 0,14 м/с^2 и D = 0,01 м/с^3. 1) Через сколько времени τ после начала движения ускорение тела будет равно 1 м/с^2? 2) Чему равно среднее ускорение тела за этот промежуток времени?

Решение. Согласно формулам (1.2) и (1.6) скорость и ускорение точки в произвольный момент времени t могут быть найдены как

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2C + 6Dt$$

По условию задачи, в момент времени $t = \tau$, ускорение a равно

$$a = 2C + 6D\tau .$$

Это соотношение позволяет найти искомое время τ:

$$\tau = \frac{a - 2C}{6D} = 12 \text{ с.}$$

Для нахождения среднего ускорения за промежуток времени τ, которое определяется соотношением:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\tau},$$

надо знать не только значение скорости в конечный момент времени при $t = \tau$, равное

$$\upsilon = B + 2C\tau + 3D\tau^2,$$

но и ее значение υ_0 в начальный момент при $t = 0$, которое равно $\upsilon_0 = B$. Следовательно, среднее ускорение:

$$a_0 = 2C + 3D\tau = 0{,}64 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1-2. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время $\tau = 0{,}5$ с на расстоянии $l = 5$ м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью υ_0 он брошен? С какой скоростью υ он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение. Траектория движения камня представлена на рис. 1.6. Уравнения движения камня записываются в виде:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t \\ y = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

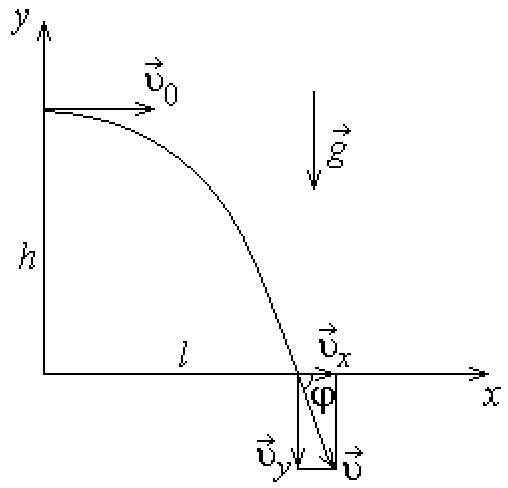


Рис. 1.6

Здесь учтено, что движение по оси x является равномерным, а по оси y – равноускоренным. По прошествии времени $\tau = 0{,}5$ с камень окажется в нижней точке с координатами $x = l$, $y = 0$, следовательно,

$$\begin{cases} l = \upsilon_0 \tau; \\ 0 = h - \dfrac{g\tau^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда для скорости υ_0 и высоты h имеем:

$$\begin{cases} \upsilon_0 = \dfrac{l}{\tau} = 10 \text{ м/с}; \\ h = \dfrac{g\tau^2}{2} = 1{,}25 \text{ м}. \end{cases}$$

Для определения конечной скорости υ найдем ее проекции на оси x и y. Поскольку движение вдоль оси x является равномерным, $\upsilon_x = \upsilon_0$, а вдоль оси

y – равноускоренным (с нулевой начальной скоростью), $\upsilon_y = -gt$. Используя теорему Пифагора, для скорости в точке падения на землю имеем

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2\tau^2} = 11{,}14 \text{ м/с}.$$

Угол φ может быть найден как

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{g\tau}{\upsilon_0}\right) = \operatorname{arctg}0{,}5 = 26^\circ 30'.$$

Задача 1-3. Камень брошен горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с. Определить угол α, который составит с вертикалью вектор скорости камня через $\tau = 3$ с после начала движения, а также тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения камня в этот момент.

Решение. Траектория движения тела представлена на рис. 1.7.

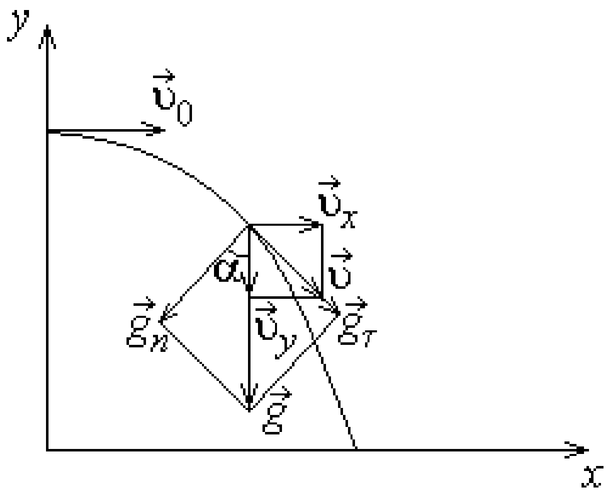


Рис. 1.7

Изменение проекций скорости на координатные оси описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \\ \upsilon_y = -gt \end{cases}.$$

Как видно из рисунка, на котором, кроме вектора скорости, представлен вектор полного ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ и его разложение на тангенциальную $\vec{g}_\tau$ и нормальную $\vec{g}_n$ составляющие, искомый угол α равен $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{g\tau}{\upsilon_0}\right) = 2{,}5$. Соответственно,

$$g_n = g\cos\alpha = \frac{g\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2\tau^2}} = 3{,}7 \text{ м/с}^2,$$

$$g_\tau = g\sin\alpha = \frac{g^2\tau}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2\tau^2}} = 9{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1-4. Тело брошено с высоты $h = 2$ м под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Определить, на какой высоте и с какой скоростью движется тело через $\tau = 1{,}5$ с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Траектория движения тела представлена на рис.1.8.

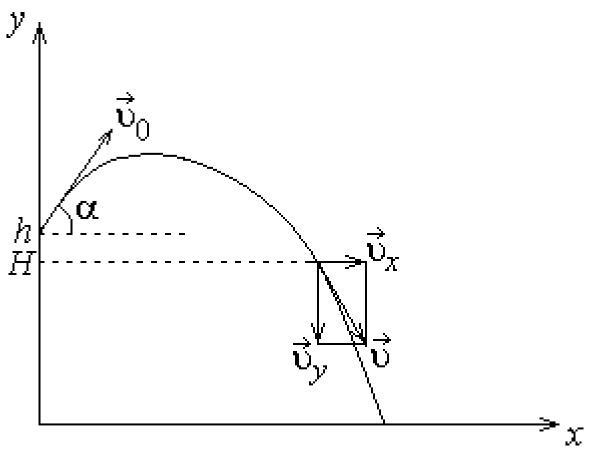


Рис. 1.8

Уравнения, которым подчиняются координаты и проекции скорости тела, имеют вид

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t; \\ y = h + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha; \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt. \end{cases}$$

Через τ = 1,5 с после начала движения тело будет находиться на высоте H = $y(\tau)$:

$$H = h + \upsilon_0 \sin\alpha\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 17 \text{ м} .$$

Полная скорость в этот момент будет равна

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 \sin\alpha \cdot g\tau + g^2\tau^2} = 10{,}5 \text{ м/с}.$$

Задача 1-5. Вал радиусом R = 0,1 м начинает вращение из положения покоя и за время t = 10 с совершает N = 50 оборотов. Считая движение вала равноускоренным, определить угловое ускорение вала, угловую и линейную конечную скорости точек его поверхности, а также их полное ускорение.

Решение. Уравнение движения произвольной точки на поверхности вала имеет вид:

$$\varphi = 2\pi N = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

при этом угловая скорость изменяется согласно уравнению:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t .$$

Решая эти уравнения совместно, имеем

$$\omega = \frac{4\pi N}{t} = 62{,}8 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2} = 6{,}28 \text{ рад/с}.$$

Линейная скорость точек вала равна $\upsilon = \omega R = 6{,}28$ м/с, следовательно, нормальное ускорение этих точек $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 394$ м/с^2, а полное ускорение с учетом соотношения $a_\tau = \varepsilon R$ равно

$$a = \sqrt{a_n^2 + \varepsilon^2 R^2} = 394 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1-6. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: 1) равно тангенциальному, 2) вдвое больше тангенциального? Определить угол φ между вектором полного ускорения и радиусом в первом случае.

Решение. Тангенциальное ускорение задает изменение скорости по величине $a_\tau = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$. Поскольку начальная скорость точки равна нулю, ее конечная скорость:

$$\upsilon = a_\tau \cdot t\,.$$

Нормальное ускорение увеличивается с ростом скорости согласно формуле

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{a_\tau^2 t^2}{R}\,.$$

Поэтому нормальное ускорение равно тангенциальному, т.е. $a_n = a_\tau$, когда

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = 2 \text{ с},$$

и вдвое больше тангенциального, т.е. $a_n = 2a_\tau$, когда

$$t = t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = 2{,}8 \text{ с}.$$

Угол, составляемый вектором полного ускорения с радиусом (рис. 1.9), находится из соотношения:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_\tau}{a_n} = 1,$$

поэтому $\varphi = 45°$.

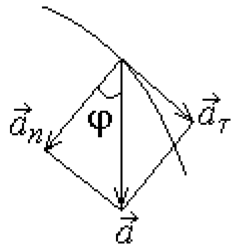


Рис. 1.9

1.9. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

1.1. Что называется материальной точкой? В каких ситуациях может использоваться эта модель?

1.2. Что такое радиус-вектор и какими величинами он характеризуется в декартовой системе координат?

1.3. Как определяются векторы средней и мгновенной скорости и куда они направлены? Как связаны проекции вектора скорости и производные от соответствующих координат?

1.4. Что описывают уравнения движения материальной точки? Какой вид имеют уравнения движения для точки, движущейся равномерно?

1.5. Как определяется вектор ускорения и что он характеризует? Как связаны проекции вектора ускорения и производные от соответствующих координат?

1.6. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? Чему она равна?

1.7. Что характеризует нормальная составляющая ускорения? Чему она равна?

1.8. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? тангенциальное ускорение? По какой траектории движется материальная точка в этих случаях?

1.9. Какой вид имеют уравнения движения материальной точки, движущейся равномерно? Как меняется скорость в таком движении?

1.10. О чем говорит принцип независимости движений? Приведите пример, где он может быть использован.

1.11. Какими уравнениями описывается движение тела, брошенного под углом к горизонту?

1.12. Как меняются векторы скорости и ускорения тела, брошенного под углом к горизонту?

1.13. Как определяются векторы угловой скорости и углового ускорения? Как они направлены?

1.14. Какова связь между линейной и угловой скоростью?

1.15. Какими уравнениями описывается равнопеременное вращение тела?

1.16. Зависимость пройденного телом пути s от времени дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $A = 6$ м, $B = 3$ м/с и $C = 2$ м/с^2. Найти среднюю скорость υ и среднее ускорение a тела для интервала времени $1 \le t \le 4$ с.

1.17. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ м, $B = 2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти среднюю скорость υ и среднее ускорение a тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

1.18. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}1$ м/с^2 и $D = 0{,}03$ м/с^2. Через какое время после начала движения тело будет иметь ускорение $a = 2$ м/с^2? Найти среднее ускорение тела за этот промежуток времени.

1.19. Радиус-вектор точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$. По какому закону изменяются скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ этой точки? Найти модуль скорости и ускорения в момент $t = 2$ с.

1.20. Точка движется со скоростью $\vec{\upsilon} = bt(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$, где $b = 1$ м/с^2. Найти скорость точки и ее модуль в момент времени $t = 1$ с; ускорение точки и его модуль.

1.21. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угол, под которым тело брошено к горизонту, если максимальная высота подъема тела равна 1/4 дальности его полета.

1.22. Камень, брошенный со скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, упал на землю на расстоянии l от места бросания. С какой высоты h надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости υ_0 он упал на то же место?

1.23. Наибольшая высота подъема тела, брошенного с уровня земли под углом α к горизонту со скоростью $\upsilon = 20$ м/с, составляет $H = 15$ м. Найти угол, под которым оно было брошено и расстояние по горизонтали от точки бросания до точки падения.

1.24. Над колодцем глубиной $h = 10$ м бросают вертикально вверх камень с начальной скоростью $\upsilon_0 = 14$ м/с. Написать уравнение движения камня. Определить время падения камня на дно колодца и величину его конечной скорости.

1.25. С башни высотой $h = 25$ м бросили камень со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти, какое время камень будет в движении. На каком расстоянии от основания башни он упадет на землю. С какой скоростью он упадет на землю. Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.26. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 14{,}7$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорения тела через $t = 1{,}25$ с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.27. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории тела через $t = 1$ с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.28. Тело брошено со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Найти величины υ_0 и α, если известно, что наибольшая высота подъема $h = 3$ м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории $R = 3$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.29. Снаряд вылетает из дула орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 600$ м/с. Определить, через какое время снаряд будет находиться на высоте $h = 400$ м и какова будет его скорость в этот момент. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.30. Движения двух материальных точек выражаются уравнениями $x_1 = 20 + 2t - 4t^2$ и $x_2 = 2 - 16t + 10t^2$ (длина – в метрах, время – в секундах). В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковыми? Чему равны скорости и ускорения точек в этот момент?

1.31. Материальная точка начинается двигаться по окружности радиусом $r = 12{,}5$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ см/с^2. Определить, в какой момент времени вектор ускорения образует с вектором скорости угол $\alpha = 45°$; путь, пройденный за это время движущейся точкой.

1.32. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Определить радиус колеса, если через $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 4{,}5$ м/с^2.

1.33. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через $t = 20$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки равна $\upsilon = 79{,}2$ см/с.

1.34. Колесо радиусом R = 10 см вращается с постоянным угловым ускорением ε = 3,14 рад/с2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: угловую скорость, линейную скорость, тангенциальное ускорение, нормальное ускорение, полное ускорение, угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса.

1.35. Найти угловое ускорение колеса, если известно, что через t = 2 с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол α = 60° с направлением линейной скорости этой точки.

1.36. Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$, где A = 2 рад/с2, B = 1 рад/с5. Определить полное ускорение точек обода колеса через τ = 1 с после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время.

1.37. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выражаемому формулой φ = 5 + 10t □4t2. Найти модуль полного ускорения a точки, находящейся на расстоянии r = 0,2 м от оси вращения для момента времени t0 = 0,5 с. Какой угол α составляет вектор a с нормалью к траектории в этот момент времени?

1.38. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = At$, где $A = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через какое время после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол α = 60° с ее вектором скорости?

1.39. Точка движется по окружности радиусом R = 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $x = Ct^3$, где C = 0,1 см/с^3 . Найти нормальное и тангенциальное ускорение точки в момент, когда линейная скорость равна υ = 0,3 м/с.

1.40. Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где B = 2 рад/с и C = 1 рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через τ = 2 с после начала движения следующие величины: угловую скорость, линейную скорость, угловое ускорение, тангенциальное ускорение, нормальное ускорение.

1.41. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где B = 1 рад/с, C = 1 рад/с^2 и D = 1 рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

1.42. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $B = -2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти линейную скорость точки, ее тангенциальное, нормальное и полное ускорения через $t = 3$ с после начала движения, если известно, что нормальное ускорение точки при $t' = 2$ с равно $a_n = 0{,}5$ м/с^2.

1.43. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны траектории $R = 50$ м. Уравнение движения автомобиля $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Найти скорость автомобиля, его тангенциальное, нормальное и полное ускорение в момент времени $t = 5$ с.

1.44. Диск радиусом $R = 0{,}1$ м вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 1$ рад/с^3). Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения.

1.45. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выражаемому формулой $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$. Найти по величине и направлению полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения для момента времени $t = 4$ с.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Первый закон Ньютона

Кинематика дает описание движения тел, не затрагивая вопроса о том, почему тело движется именно так, а не иначе. Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обуславливают тот или иной характер движения. Основная задача динамики состоит в определении положения тела в произвольный момент времени по известным начальному положению тела, начальной скорости и силам, действующим на тело.

В основе динамики лежат три закона И. Ньютона, сформулированные им в труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Эти законы возникли в результате обобщения тех опытных данных и теоретических сведений в области механики, которые были получены до Ньютона и самим Ньютоном. Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, имеет ограниченную область применимости; она является механикой тел больших масс (по сравнению с массой атомов), движущихся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света).

В качестве первого закона Ньютоном был принят закон инерции (открытый Галилеем): всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Этот закон показывает, что состояние покоя и равномерного прямолинейного движения не требует для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое инертностью; движение тела, свободного от внешних воздействий – движение по инерции.

При инерциальном движении вектор скорости материальной точки не изменяется с течением времени ни по направлению, ни по модулю ($\vec{\upsilon} = \text{const}$). Покой точки ($\vec{\upsilon} = 0$) является частным случаем инерциального движения.

Поскольку механическое движение относительно и его характер зависит от выбора системы отсчета, первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Системы отсчета, по отношению к которым выполняется закон инерции, называются инерциальными системами отсчета.

Таким образом, в первом законе Ньютона содержатся два утверждения:

а) все тела обладают свойством инертности;

б) существуют инерциальные системы отсчета.

2.2. Масса и плотность тела

Изменение состояния движения тела происходит под действием сил. Опыт показывает, что на одинаковое воздействие тела реагируют по-разному, приобретая разные по величине ускорения.

Всякое тело противится попыткам изменить состояние его движения. Это свойство тел называется инертностью. В отсутствие взаимодействий с другими телами инертность позволяет телу сохранить свою скорость.

В качестве количественной характеристики инертности используется величина, называемая инертной массой. При взаимодействии тел инертность проявляется в том, что для изменения скорости тела на заданную величину нужно, чтобы действие на нее определенного другого тела длилось некоторое время. Чем это время больше, тем инертнее тело.

Масса также характеризует способность данного тела взаимодействовать с другими телами в согласии с законом всемирного тяготения. В этих случаях масса выступает как мера гравитации, или мера тяготения и ее называют гравитационной массой. В современной физике с высокой степенью точности установлена тождественность значений инертной и гравитационной масс данного тела. Масса тела – скалярная величина. Она является свойством самого тела. Единицей массы в системе СИ является килограмм (кг).

В механике Ньютона считается, что: а) масса тела не зависит от скорости его движения; б) масса тела равна сумме масс всех частиц, из которых оно состоит; в) для данной совокупности тел выполняется закон сохранения массы: при любых процессах, происходящих в системе тел, ее масса остается неизменной.

Средней плотностью тела называется величина $\rho_{ср}$, равная отношению массы m тела к его объему: $\rho_{ср} = m/V$. Плотность ρ тела в данной точке равна пределу отношения массы Δm элемента тела, выбранного в окрестности данной точки, к его объему ΔV при неограниченном уменьшении ΔV:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Если тело однородно, $\rho = \rho_{ср} = m/V$. Плотность измеряется в килограммах на кубический метр, кг/м^3. В частности, плотность воды ρ_0 = 10^3 кг/м^3.

В механике Ньютона масса данного тела не зависит от того, в какой системе отсчета оно рассматривается.

2.3. Силы

Силой называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей. Сила является векторной величиной. Она полностью определена, если указаны ее численное значение, направление действия и точка ее приложения. Силы складываются по правилу векторного сложения. В результате действия силы данное тело изменяет скорость движения (приобретает ускорение) или деформируется.

В современной физике известно четыре вида взаимодействий: 1) гравитационное (обусловленное всемирным тяготением); 2) электромагнитное (осуществляемое через электрические и магнитные поля); 3) сильное (обеспечивающее связь частиц в атомном ядре); 4) слабое (ответственное за многие процессы распада элементарных частиц).

Сила, как количественная характеристика взаимодействий, позволяет оценивать лишь гравитационные и электромагнитные взаимодействия. В тех чрезвычайно малых областях пространства и в тех процессах, в которых проявляются сильные и слабые взаимодействия, такие понятия, как точка приложения, линия действия, а вместе с ними и само понятие силы теряет смысл.

Силы взаимодействия между частями некоторой рассматриваемой системы называются внутренними силами. Силы воздействия на тела данной системы со стороны тел, не включенных в эту систему, называются внешними силами. Деление сил на внутренние и внешние является условным, т.к. оно зависит от того, из каких тел состоит рассматриваемая система.

Система тел, на каждое из которых не действуют внешние силы, называется замкнутой (изолированной) системой.

Если на материальную точку одновременно действует несколько сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, … $\vec{F}_n$), то каждая из них действует так, как будто бы других сил не существует. В этом заключается установленный опытным путем принцип независимости действия сил.Все силы могут быть заменены одной силой $\vec{F}_\Sigma$, называемой равнодействующей силой, равной их векторной сумме:

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = \sum \vec{F}_i\ . \tag{2.1}$$

Точкой приложения равнодействующей силы в поступательном движении является центр масс. Единицей измерения силы в системе СИ является Ньютон (Н), 1 Н = 1 (кг · м)/с^2.

2.4. Импульс

Импульсом $\vec{p}_i$ материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы m_i точки на скорость υ_i ее движения:

$$\vec{p}_i = m_i\ \vec{\upsilon}_i\ . \tag{2.2}$$

Импульс $\vec{p}$ системы, состоящей из n материальных точек, равен сумме импульсов всех точек системы:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i\ \vec{\upsilon}_i\ . \tag{2.3}$$

Подобным образом может быть представлен импульс протяженного тела, поскольку любое тело может быть мысленно разбито на систему материальных точек, каждая из которых имеет массу m_i и движется со скоростью $\vec{\upsilon}_i$. Если тело движется поступательно, скорости всех его точек одинаковы и тогда:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

где m – масса тела, $\vec{\upsilon}$ – его скорость. Единицей измерения импульса является килограмм – метр на секунду (кг · м/с).

Инерциальное движение материальной точки и инерциальное поступательное движение тела не сопровождаются изменениями импульсов. При неинерциальном движении тела (т.е. движении с ускорением) его импульс изменяется. Этот процесс происходит под действием сил и количественно описывается с помощью второго закона Ньютона.

2.5. Второй закон Ньютона

Основная задача динамики заключается в установлении законов изменения механического движения (изменения скорости (импульса), в результате чего тело приобретает ускорение) под действием приложенных к телу сил. Поэтому второй закон Ньютона является основным законом динамики поступательного движения. Он гласит: ускорение, с которым тело движется относительно инерциальной системы отсчета, прямо пропорционально равнодействующей всех сил, действующих на тело, обратно пропорционально массе тела и по направлению совпадает с направлением равнодействующей всех сил:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\Sigma}}{m}. \tag{2.4}$$

Каждая сила действует на тело так, как если бы других сил не было. Результирующее ускорение тела $\vec{a}$ такое, как если бы на тело действовала одна сила, равная равнодействующей.

Для определения величины ускорения от векторной формы записи второго закона Ньютона переходят к скалярной. Для этого выбирают систему координат, одну из осей которой обычно направляют вдоль вектора ускорения и записывают уравнение (2.4) в проекциях на координатные оси. В результате получается система обычных алгебраических уравнений.

Существует и другая форма записи второго закона Ньютона. Поскольку ускорение тела $\vec{a}$ определяется изменением скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt},$$

соотношение (2.4) может быть представлено как:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}_{\Sigma},$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\Sigma}, \tag{2.5}$$

где $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – импульс тела. Полученное выражение является более общей формой записи второго закона Ньютона, справедливой и в том случае, когда масса тела не является постоянной, а также в релятивистской механике.

Произведение $\vec{F}\,dt$ называют импульсом силы. Поскольку соотношение (2.5) может быть записано в виде $md\vec{\upsilon} = \vec{F}\,dt$, импульс любого тела под действием силы изменяется на одну и ту же величину, если время действия определенной силы $\vec{F}$ одинаково (одинаков импульс силы).

Отметим, что второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета.

2.6. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона утверждает, что всякое действие материальных тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \tag{2.6}$$

Третий закон Ньютона бывает справедлив не всегда. Он выполняется строго в случае контактных взаимодействий (при непосредственном соприкосновении тел), а также при взаимодействии находящихся на некотором расстоянии друг от друга покоящихся тел. Следует отметить, что силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Из третьего закона Ньютона вытекает, что силы взаимодействия возникают попарно: у всякой силы, приложенной к какому-то телу, существует равная ей по величине и противоположно направленная сила, приложенная к другому телу, взаимодействующему с данным.

2.7. Закон движения центра инерции системы

Каждое тело представляет собой системy материальных точек. Поэтому произвольную систему тел также можно рассматривать как систему N материальных точек, а ее импульс $\vec{p}$ – как сумму N импульсов всех материальных точек системы:

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right).$$

Это соотношение значительно упрощается, если ввести понятие центра инерции (центра масс) системы. Центром инерции системы материальных точек называют точку C, радиус-вектор которой равен

$$\vec{r}_C=\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}.$$

где m – суммарная масса частиц, составляющих систему.

Импульс системы может быть представлен в виде произведения суммарной массы частиц на скорость центра инерции системы:

$$\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{r}_C)=m\vec{\upsilon}_C. \tag{2.7}$$

Закон движения центра инерции системы будет, соответственно, иметь вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}_\Sigma, \qquad m\vec{a}_C=\vec{F}_\Sigma. \tag{2.8}$$

Таким образом, центр инерции системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все силы, действующие на отдельные точки.

Заметим, что центр масс замкнутой системы в инерциальной системе отсчета движется прямолинейно и равномерно ($\vec{p}$ = const).

2.8. Силы тяготения

Закон всемирного тяготения: между двумя материальными точками действуют силы взаимного притяжения (гравитационные силы), прямо пропорциональные массам этих точек и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними. Модуль силы тяготения определяется выражением:

$$F_{\text{тяг}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.9)$$

где m_1, m_2 – массы взаимодействующих материальных точек, r – расстояние между ними.

Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной. Гравитационная постоянная G определяется опытным путем; Она равна силе взаимодействия двух материальных точек, массой 1 кг каждая, находящихся на расстоянии 1 м одна от другой;

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Гравитационные силы направлены вдоль линии, соединяющей взаимодействующие точки и поэтому называются центральными силами. Формула (2.9) справедлива не только в том случае, когда размерами тел можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними. Если тела имеют форму шаров, они притягиваются между собой как материальные точки, расположенные в центрах шаров. В данном случае r – расстояние между центрами шаров. Гравитационные силы являются потенциальными, т.е. работа по перемещению тела не зависит от траектории, а зависит только от начального и конечного положения.

Сила тяжести, т.е. сила притяжения тела к Земле согласно закону всемирного тяготения, будет равна $F_{\text{тяж}} = G\ m M_З / R_З{}^2$. Она направлена к центру Земли, имеющей массу $M_З$ и радиус $R_З$. Если на тело действует только сила тяжести, то оно совершает свободное падение. Применяя второй закон Ньютона, найдем ускорение свободного падения $g = G M_З / R_З{}^2 =$ $= 9{,}81$ м/с^2. Оно не зависит от массы m тела и, следовательно, одинаково для всех тел. Сила тяжести определяется соотношением $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$. Формулы справедливы при движении тела с небольшой высоты h ($h \ll R_З$). Следует отметить, что ускорение свободного падения g в разных пунктах Земли различно. Это связано с наличием вращения Земли, несферичностью Земного шара (сплюснут у полюсов) и неоднородностью распределения массы.

Весом тела P^* называют силу, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору или подвес, удерживающие его от свободного падения. Вес приложен не к рассматриваемому телу, а к опоре или подвесу. Если опора (подвес) неподвижна относительно Земли, то вес равен силе тяжести тела. Если опора или подвес вместе с телом будет ускоренно двигаться вверх или вниз, то вес тела будет соответственно больше или меньше силы тяжести.

2.9. Силы упругости

Силы, возникающие при упругой деформации тел, называются силами упругости. Силы упругости имеют электромагнитную природу. Если к телу приложить силу, деформирующую его, эта сила приведет к изменению взаимного положения атомов. В результате возникнет сила, противодействующая этому изменению, которая восстановит (если деформации не очень велики) прежние размеры тела. Так как сила упругости возвращает тело к первоначальному состоянию, то она направлена против направления смещения частиц тела при деформации.

Сила упругости, действующая на тело со стороны опоры или подвеса, называется силой реакции опоры или силой натяжения подвеса. Сила упругости направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения взаимодействующих тел, а если во взаимодействии участвуют такие тела, как стержень, шнуры, пружины, то сила упругости направлена вдоль их осей.

Сила упругости возникает при деформации тела вследствие движения одних его частей относительно других, определяется законом Гука и описывается уравнением

$$F = -kx$$

Закон Гука справедлив только в пределах упругих деформаций. В случае одномерного растяжения или сжатия, закон Гука говорит о том, что сила упругости пропорциональна вектору удлинения (сжатия) и противоположна ему по направлению. k – коэффициент жесткости пружины. Он показывает величину силы упругости при удлинении, равном единице.

Сила упругости зависит от взаимного расположения взаимодействующих тел (т.е. от координат) и является потенциальной силой (так же, как и сила всемирного тяготения), $E_п = kx^2/2$ – потенциальная энергия упруго деформированного тела. Работа силы упругости $A = kx_2^2/2 - kx_1^2/2$ не зависит от формы траектории и при перемещении по замкнутой траектории равна нулю. Поэтому силы упругости являются потенциальными силами.

2.10. Силы трения

Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки называется сухим трением. Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой тело движется, называется жидким или вязким трением.

Сила трения $\vec{F}_{тр}$ всегда направлена вдоль поверхностей соприкасающихся тел противоположно скорости их относительного перемещения.

а) Сила трения $\vec{F}_{тр}{}^{o}$, препятствующая возникновению движения одного тела по поверхности другого называется силой трения покоя. Сила трения покоя всегда равна по абсолютному значению и направлена противоположно силе, приложенной к телу параллельно поверхности соприкосновения его с другим телом. Максимальная сила трения покоя пропорциональна силе давления $|F_{тр}| = \mu_0 N$; μ_0 − коэффициент трения покоя (является безразмерной величиной). Он зависит от материала соприкасающихся тел, от качества обработки поверхностей, от наличия между ними инородных веществ и др.

б) Сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ между поверхностями соприкасающихся тел при их относительном движении зависит от силы реакции опоры: $F_{тр} = \mu N$; μ − коэффициент трения скольжения. Он зависит от тех же факторов, что и μ_0, а также от скорости относительного движения соприкасающихся тел. В большинстве случаев при малых скоростях относительного движения $\mu < \mu_0$.

Силы трения вызываются зацеплением неровностей поверхностей тел, упругими деформациями этих неровностей и сцеплением (слипанием) тел в тех местах, где расстояния между частицами оказываются малыми и достаточными для возникновения межмолекулярного притяжения. Следовательно, сила трения также имеет электромагнитную природу.

Силы трения, в отличие от гравитационных сил и сил упругости, не зависят от координат относительного расположения сил. Работа сил трения скольжения зависит от формы траектории относительного перемещения соприкасающихся тел и при замкнутой траектории не равна нулю. Следовательно, силы трения являются непотенциальными силами.

2.11. Практическое применение законов Ньютона

При решении задач механики вместо соотношения (2.4) удобнее пользоваться другой формой записи:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{тяги}} + \vec{F}_{\text{упр}} + \ldots \qquad (2.10)$$

В каждом конкретном случае должны учитываться только те силы, которые приложены к рассматриваемому телу.

Здесь учтено, что в механике обычно встречаются следующие силы:

а) сила тяжести $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$, направленная вертикально вниз к центру Земли;

б) сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно поверхности от поверхности;

в) сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная от тела по нити;

г) сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению, т.е. против вектора скорости, причем ее модуль $F_{\text{тр}} = \mu N$, где μ − коэффициент трения;

д) сила тяги $\vec{F}_{\text{тяги}}$ (если есть двигатель или другая тяга);

е) сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$, вводимая при наличии растягивающихся нитей и пружин и направленная в сторону, противоположную растяжению (сжатию) x.

Для решения полученного векторного уравнения выбирают систему координат, одну из осей которой обычно направляют вдоль вектора ускорения и рассматривают уравнение (2.10) в проекциях на соответствующие оси.

2.12. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Неинерциальными системами отсчета называются системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением. В неинерциальных системах отсчета законы Ньютона, вообще говоря, уже несправедливы. Однако законы динамики можно применять и для них, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга ввести в рассмотрение так называемые силы инерции.

Второй закон Ньютона, записанный с учетом сил инерции $\vec{F}_{\Sigma\text{ин}}$, будет справедлив для любой системы отсчета:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\Sigma} + \vec{F}_{\Sigma\text{ин}}. \qquad (2.11)$$

Здесь $\vec{a}$ – ускорение тела в неинерциальной системе отсчета. Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчета и проявляются по разному в зависимости от вида движения как самой системы отсчета, так и тела в этой системе отсчета. Силы инерции условно могут быть разбиты на три класса:

1) при ускоренном поступательном движении системы отсчета возникает сила инерции:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}, \qquad (2.12)$$

направленная противоположно ускорению (например, при торможении или ускорении транспорта);

2) на тело, покоящееся во вращающейся с частотой ω системе отсчета действует центробежная сила инерции:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = m\omega^2\vec{R}, \qquad (2.13)$$

направленная в сторону от центра вращения (R – расстояние от тела до оси вращения);

3) на тело, движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}$ во вращающейся системе отсчета, действует кориолисова сила инерции, которая может быть рассчитана по формуле:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = 2m[\vec{\omega}\vec{\upsilon}]. \qquad (2.14)$$

Действием сил Кориолиса, в частности, обуславливается более сильное подмывание правых берегов рек в северном полушарии и левых – в южном.

Следует отметить, что введение сил инерции не является совершенно необходимым. Любое движение можно рассмотреть по отношению к инерциальной системе отсчета. Однако во многих случаях использование неинерциальной системы приводит к большей простоте и наглядности получаемого решения.

Поскольку силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета, они не подчиняются третьему закону Ньютона.

Характерной особенностью сил инерции, так же как и гравитационных сил является их пропорциональность массе тела. Принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции, сформулированный Эйнштейном, лежит в основе общей теории относительности.

2.13. Примеры решения задач

Задача 2-1. Тело массой m = 1 кг движется по вертикальной стене. К телу приложена сила F = 20 Н, направленная под углом α = 30° к вертикали. Коэффициент трения между телом и стеной μ = 0,1. Определить ускорение тела a.

Решение. Укажем силы, действующие на тело в рассматриваемом случае (рис. 2.1): сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально вниз, сила реакции опоры $\vec{N}$ направлена перпендикулярно поверхности, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена в сторону, противоположную движению. Правильный выбор направления силы трения связан с выбором направления движения тела, которое в данном случае определяется ускорением тела $\vec{a}$.

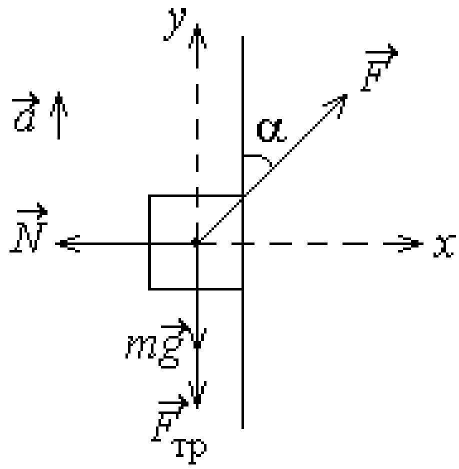


Рис. 2.1

Если в ходе решения задачи получится положительное значение ускорения – задача решена правильно и не требует корректировки. Отрицательное значение ускорения указывает не только на неправильный выбор направления ускорения, но и на неправильный выбор направления силы трения, а значит, задача с учетом данного факта должна быть решена заново.

Движение рассматриваемого тела описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}, \qquad F_{\text{тр}} = \mu N.$$

В проекциях на координатные оси x и y (рис. 2.1), это векторное уравнение преобразуется в два скалярных:

$$\begin{cases} 0 = F\sin\alpha - N, \\ ma = -mg + F\cos\alpha - \mu N. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $N = F\sin\alpha$, поэтому для расчета ускорения получим следующее соотношение:

$$a = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)/m - g = 6{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение получилось положительным, значит, тело действительно движется вверх, а сила трения направлена вниз, как указано на рис. 2.1.

Задача 2-2. Тело скользит равномерно по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. Чему равен коэффициент трения? С каким ускорением будет двигаться тело по наклонной плоскости, если коэффициент трения уменьшить в два раза?

Решение.

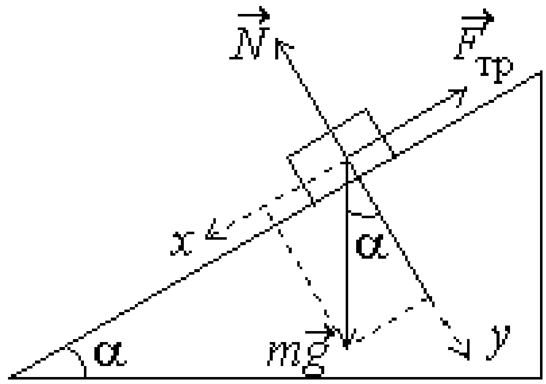


Рис. 2.2

На тело, лежащее на наклонной плоскости (рис.2.2), кроме силы тяжести $m\vec{g}$, действуют сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, модуль которой связан с коэффициентом трения соотношениям $F_{тр} = \mu N$. Второй закон Ньютона для тела записывается в виде:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Так как тело двигается вдоль плоскости вниз, его ускорение также направлено вниз или равно нулю в случае равномерного движения. Следовательно, в первом случае равномерного движения:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0.$$

В проекциях на координатные оси x (вдоль плоскости) и y (перпендикулярно плоскости) это векторное уравнение преобразовывается в два скалярных:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu N = 0 \\ mg\cos\alpha - N = 0. \end{cases}$$

Отсюда сила реакции опоры находится как $N = mg\cos\alpha$, а для коэффициента трения μ имеем

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58.$$

Если коэффициент трения уменьшить в два раза, т.е. $\mu = \frac{tg\alpha}{2}$, тело станет двигаться равноускоренно, а его движение будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - \mu N \\ 0 = mg\cos\alpha - N. \end{cases}$$

Для ускорения в этом случае имеем

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = g(\sin\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}) = \frac{1}{2}g\sin\alpha = 1/4g = 2{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2-3. Две гири массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти натяжение нити и ускорение, с которым движутся гири. Трением в блоке пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система изображена на рис. 2.3.

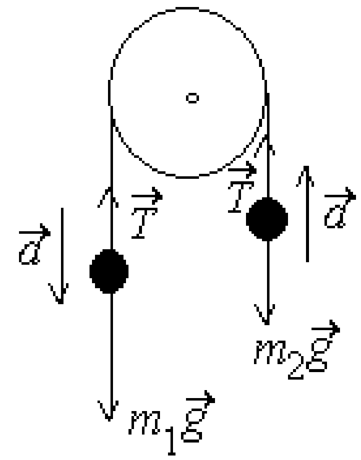


Рис. 2.3

Два тела, связанные нерастяжимой нитью, движутся с одинаковыми ускорениями, но их направления будут различны. Сила натяжения нитей $\vec{T}$ в силу третьего закона Ньютона также одинакова для обоих тел, если блок невесомый. Второй закон Ньютона в векторной форме и в проекциях на оси имеет вид:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - m_2 g. \end{cases}$$

Решив эти уравнения, получим

$$a = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 3{,}3 \text{ м/с}^2,$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 13{,}3 \text{ Н}.$$

Задача 2-4. В вагоне, двигающемся горизонтально с ускорением a = 5,7 м/с^2, висит на шнуре груз массой m = 200 г. Найти силу натяжения шнура и угол отклонения шнура от горизонтали.

Решение. Считаем, что вагон с подвешенным на шнуре грузом движется с ускорением слева направо, как показано на рис. 2.4.

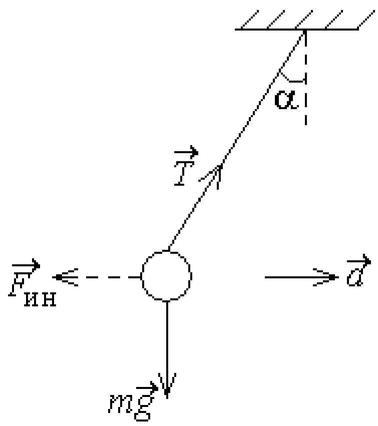


Рис. 2.4

В этом случае к грузу приложены две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Второй закон Ньютона в данном случае записывается в виде

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеем

$$\begin{cases} T\sin\alpha = ma \\ T\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

Отсюда для угла α и силы натяжения T шнура получаем

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{g} = \operatorname{arctg}0{,}58 \approx 30^\circ,$$

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2} \approx 2{,}27 \text{ Н}.$$

Отметим, что для решения этой задачи использовалась инерциальная система отсчета, связанная с неподвижной землей. Решим также эту задачу в неинерциальной системе, связанной с движущимся вагоном. Относительно вагона ускорение груза равно нулю. Однако для правильного написания второго закона Ньютона в этом случае необходимо ввести силу инерции:

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}.$$

Направление этой силы указано пунктиром на рис. 2.4. С учетом вышесказанного второй закон Ньютона примет вид:

$$0 = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ин}} \quad \text{или} \quad 0 = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}\,.$$

Это уравнение эквивалентно уже рассмотренному, а значит, дальнейший ход решения не меняется.

Задача 2-5. Гирька массой $m = 0{,}1$ кг, привязанная к нити длиной $l = 0{,}3$ м, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $R = 0{,}15$ м. Определить натяжение нити и угловую скорость вращения гирьки.

Решение. Второй закон Ньютона, описывающий движение гирьки (рис. 2.5), имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T},$$

причем все ускорение является нормальным, т.е.

$$a = a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.$$

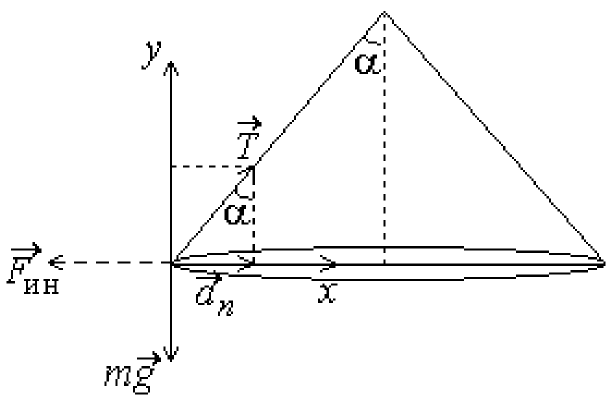


Рис. 2.5

В проекциях на координатные оси имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{R} = T\sin\alpha = m\omega^2 R \\ 0 = T\cos - mg, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} T\sin\alpha = \dfrac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R \\ T\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

Угол α может быть определен через R и l:

$$\sin\alpha = \frac{R}{l} = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Для силы натяжения имеем:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}}} = \frac{2mg}{\sqrt{3}} = 1{,}2 \text{ Н}.$$

Далее, найдем угловую скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{ml}} = 6{,}3 \text{ рад/с}.$$

Отметим, что эта задача решена в инерциальной системе отсчета, связанной с землей. Задача может быть решена также с использованием неинерциальной системы отсчета, связанной с движущейся гирькой. Эта система вращается с той же угловой скоростью, что и гирька, причем гирька в этой системе неподвижна (т.е. $\vec{a} = 0$). Для правильного решения этой задачи необходимо ввести силу инерции:

$$F_{\text{ин}} = m\omega^2 R\,.$$

Направление этой силы указано пунктиром на рис. 2.5. Заметим, что проекция этой силы на ось x отрицательна. Итак, в неинерциальной системе отсчета второй закон Ньютона записывается в виде:

$$0 = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ин}} \text{ или } 0 = m\vec{g} + \vec{T} + m\omega^2\vec{R}\,.$$

Это уравнение эквивалентно уже рассмотренному, а значит, дальнейший ход решения не меняется.

Задача 2-6. Шарик, имеющий массу m = 0,03 кг, подвешен на тонкой нити и отклонен на угол α = 60° от вертикали. Найти силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

Решение. Рассматриваемая система изображена на рис. 2.6.

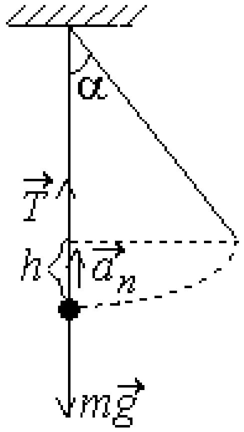


Рис. 2.6

В момент прохождения положения равновесия тангенциальная составляющая ускорения равна нулю, и поэтому $a = a_n$. Поэтому для нижней точки второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\vec{a}_n = m\vec{g} + \vec{T},$$

а в проекциях на вертикальную ось:

$$\frac{m\upsilon^2}{l} = T - mg\,.$$

Для определения силы натяжения T необходимо рассчитать скорость, приобретаемую телом к данному моменту. Ее можно найти из закона сохранения энергии:

$$mgh = mg(l - l\cos\alpha) = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

отсюда

$$\upsilon^2 = 2gl(1 - \cos\alpha),$$

а для силы натяжения T имеем

$$T = mg + \frac{m}{l}2gl(1 - \cos\alpha) = 3mg - 2mg\cos\alpha = 0{,}6\ \text{Н}.$$

2.14. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

2.1. Что утверждает первый закон Ньютона?

2.2. Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна?

2.3. Что такое масса и что она характеризует?

2.4. Что такое сила и какими величинами она определяется?

2.5. Чем определяется сила тяжести и куда она направлена?

2.6. Какие виды сил чаще всего встречаются в механике? Куда они направлены?

2.7. Что такое равнодействующая сила и как она может быть найдена?

2.8. Как может быть записан второй закон Ньютона?

2.9. В чем заключается принцип независимости действия сил?

2.10. Что утверждает третий закон Ньютона? Могут ли силы взаимодействия уравновешивать друг друга?

2.11. Что называется центром инерции системы? Как записывается закон движения центра инерции?

2.12. Какие системы отсчета называются неинерциальными? Можно ли применять для них законы динамики?

2.13. Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?

2.14. Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?

2.15. Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Когда они проявляются?

2.16. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением a_1=2 м/с^2, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разрывается. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась?

2.17. Во время движения на автомобиль массой $m = 10^3$ кг действует сила трения. Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Чему должна быть равна сила тяги, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался: 1) равномерно, 2) с ускорением $a = 2$ м/с^2?

2.18. Тело массой $m = 100$ кг перемещают равномерно по горизонтальной поверхности, прилагая силу, направленную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить величину этой силы, если коэффициент трения $\mu = 0{,}3$.

2.19. Тело массой $m = 10$ кг лежит на горизонтальном шероховатом столе. Коэффициент трения между телом и столом $\mu = 1{,}5$. На тело начинает действовать сила под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Модуль силы меняется по закону $F = at$, где $a = 0{,}5$ м/с. Через какой промежуток времени после начала действия силы тело начнет движение?

2.20. К гладкой вертикальной стене привязана нить длиной $l = 6$ см. К нити подвешен шар массой $m = 0{,}5$ кг и радиусом $R = 5$ см. Найти силу давления шара на стену.

2.21. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 4°$. При каком предельном коэффициенте трения k тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения $k = 0{,}03$? Какое время t потребуется для прохождения при этих условиях пути $s = 100$ м? Какую скорость υ будет иметь тело в конце этого пути?

2.22. Тело скользит равномерно по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. Чему равен коэффициент трения? С каким ускорением будет двигаться тело по наклонной плоскости, если коэффициент трения уменьшить в два раза?

2.23. Во время движения на автомобиль массой $3 \cdot 10^3$ кг действует сила трения. Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Определить мощность, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью $\upsilon = 36$ км/ч: 1) в гору с уклоном в $\alpha = 4°$, 2) под гору с тем же уклоном.

2.24. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола, и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет 25 % всей его длины. Чему равен коэффициент трения каната о стол?

2.25. Два тела, массы которых $m_1 = 0{,}05$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг, связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 2.7). С какой силой можно тянуть первое тело, чтобы нить, способная выдержать нагрузку $T_{max} = 5$ Н, не оборвалась? Изменится ли результат, если силу приложить ко второму телу?

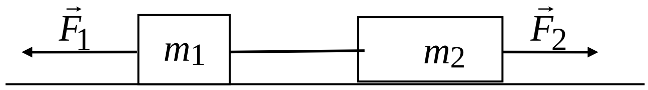


Рис. 2.7

2.26. На неподвижном блоке уравновешены два груза массой $m_1 = m_2 = 1{,}5$ кг каждый. После того, как на один из грузов был положен перегрузок массой $m_3 = 0{,}5$ кг, грузы пришли в движение. Определить силу натяжения нити, силу давления перегрузка на груз и ускорение грузов.

2.27. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости (рис. 2.8), составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гири 1 о наклонную плоскость и трением в блоке пренебречь. Как изменится результат, если коэффициент трения гири о плоскость $\mu = 0{,}1$?

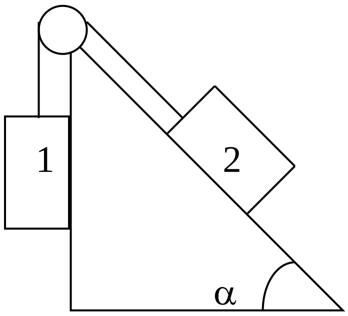


Рис. 2.8

2.28. На горизонтальном столе (рис. 2.9) лежит брусок 2, к которому привязана нить, перекинутая через блок, укрепленный на краю стола. Если за нить тянуть с силой $F = 3{,}0$ Н, то брусок будет двигаться с ускорением $a_1 = 8{,}0$ м/с^2. Каковы будут ускорение a_2 бруска и сила натяжения T нити, если к ее концу привязать груз 1 массой $m = 4$ кг? Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0{,}5$.

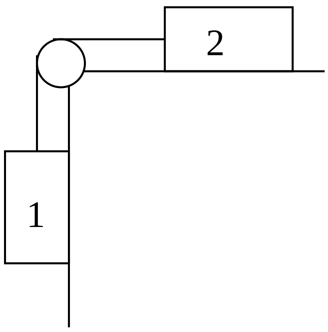


Рис. 2.9

2.29. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, (рис. 2.10) составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$. Гири A и B массой 2 кг каждая соединены нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Считать нить невесомой и нерастяжимой, трением пренебречь. Как изменится результат, если коэффициент трения гирь о плоскость $\mu = 0{,}1$?

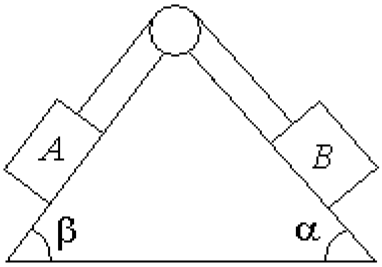


Рис. 2.10

2.30. На гладкой горизонтальной плоскости лежат четыре связанных нитью равных груза массой $m = 0{,}1$ кг каждый. На нити, прикрепленной к этим грузам и перекинутой через неподвижный блок, подвешен такой же груз. С каким ускорением движется эта система и какова сила натяжения между первым и вторым (к блоку) грузами? Как изменится результат, если коэффициент трения о плоскость $\mu = 0{,}1$?

2.31. Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной $l = 60$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти наименьшую скорость υ вращения ведерка, при которой в высшей точке вода из него не выливается. Какова сила натяжения веревки T при этой скорости в высшей и низшей точках окружности? Масса ведерка с водой $m = 2$ кг.

2.32. Камень, привязанный к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой частоте вращения ν веревка разорвется, если известно, что она разрывается при силе натяжения, равной десятикратной силе тяжести, действующей на камень.

2.33. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки $\Delta T = 10$ Н.

2.34. Самолет, летящий со скоростью $\upsilon = 900$ км/ч, делает «мертвую петлю». Каким должен быть радиус R «мертвой петли», чтобы наибольшая сила F, прижимающая летчика к сидению, была равна: а) пятикратной силе тяжести, действующей на летчика; б) десятикратной силе тяжести, действующей на летчика?

2.35. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч, делая поворот радиусом $R = 100$ м. На какой угол α при этом он должен наклониться, чтобы не упасть при повороте?

2.36. Определить силу давления на мост автомобиля массой $m = 10^4$ кг, движущегося со скоростью $\upsilon = 20$ м/с, если: 1) поверхность моста горизонтальна; 2) поверхность моста образует выпуклую дугу радиусом $R = 600$ м; 3) поверхность моста образует вогнутую дугу радиусом $R = 600$ м.

2.37. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикаль-ной оси с угловой скоростью $\nu = 0{,}5$ об/с. На каком расстоянии от оси вращения диска может удержаться тело, находящееся на нем, при коэффициенте трения $\mu = 0{,}2$?

2.38. Грузик массой $m = 0{,}1$ кг прикреплен к концу невесомого стержня длиной $l = 40$ см, который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг другого конца с угловой скоростью $\nu = 5$ об/с. Каково натяжение стержня в верхней и нижней точках траектории?

2.39. Груз массой $m = 0{,}5$ кг описывает окружность в горизонтальной плоскости. При этом шнур длиной $l = 0{,}5$ м, на котором подвешен груз, образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. Определить скорость вращения груза и силу натяжения шнура.

2.40. Гирька массой $m = 0{,}1$ кг, привязанная к нити длиной $l = 0{,}3$ м, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $R = 0{,}15$ м. Определить натяжение нити и угловую скорость вращения гирьки.

2.41. Стальная проволока некоторого диаметра выдерживает нагрузку до $T_{max} = 3000$ Н. На такой проволоке подвешен груз массой $m = 150$ кг. На какой наибольший угол можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении грузом положения равновесия?

2.42. На невесомом стержне висит груз весом $P = 10$ Н. Груз отклоняют на угол $\alpha = 90^\circ$ и отпускают. Найти натяжение стержня при прохождении им положения равновесия.

2.43. Определить период обращения T искусственного спутника, вращающегося по круговой орбите радиусом $R = 42\cdot10^6$ м. Радиус Земли равен $R_0 = 6{,}4\cdot10^6$ м, ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g_0 = 9{,}8$ м/с^2.

2.44. Определите период обращения T Луны вокруг Земли, зная ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2, радиус Земли $R_З = 6400$ км и расстояние между Луной и Землей $r = 3{,}84\cdot10^8$ м.

2.45. Две звезды, суммарная масса которых M, находятся на расстоянии R друг от друга. Найдите период обращения этих звезд относительно общего центра вращения.

3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Основные представления о законах сохранения

Система тел называется изолированной, или замкнутой, если для каждого тела, входящего в эту систему, все силы, действующие на него со стороны внешних по отношению к системе тел, взаимно уравновешиваются. В замкнутых системах имеют место три закона сохранения – закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса.

В основе закона сохранения импульса лежит однородность пространства, т.е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает, что если в системе происходит какой-то процесс (например, столкновение тел и их дальнейшее разлетание), то он будет происходить точно так же, если вся система как целое сдвинута на некоторое расстояние.

В основе сохранения момента импульса лежит изотропия пространства, т.е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах. Это означает, что если в системе происходит какой-то процесс (например, столкновение тел), то он будет происходить точно так же и в том случае, когда система повернута на некоторый угол.

В основе сохранения энергии лежит однородность времени, т.е. равнозначность всех моментов времени. Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 моментом t_2 без изменения координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает, что если какой-то процесс начался в момент времени t_1, то он будет протекать точно так же, как если бы он начался в момент времени t_2.

Законы сохранения могут быть получены из законов Ньютона, однако они обладают гораздо большей общностью, чем последние. Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии остаются строго справедливыми даже тогда, когда законы Ньютона претерпевают нарушения, в частности, в релятивистской области. Поскольку законы сохранения не зависят от характера действующих сил, с их помощью можно получить ряд сведений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы оказываются неизвестными.

3.2. Закон сохранения импульса

Рассмотрим полученный нами ранее закон движения системы частиц:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\Sigma},$$

где $\vec{p}$ – импульс системы; $\vec{F}_{\Sigma}$ – сумма всех сил, действующих на отдельные точки. Следует отметить, что в $\vec{F}_{\Sigma}$ должны входить как внутренние силы взаимодействия частиц между собой (но они подчиняются третьему закону Ньютона и в сумме дают ноль), так и внешние по отношению к системе силы $\vec{F}_i$. Деление сил на внешние и внутренние относительно: оно зависит от того, из чего состоит рассматриваемая система тел. В уравнение движения системы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

входят только внешние силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе.

Если система является замкнутой, внешние силы либо не действуют, либо они уравновешены, т.е. $\sum \vec{F}_i = 0$. В этом случае

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \ \vec{p} = \text{const}, \tag{3.1}$$

т.е. выполняется <u>закон сохранения импульса</u>: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

При решении задач удобнее пользоваться другой формой записи закона сохранения:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + ... = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + ... \tag{3.2}$$

Здесь $\vec{\upsilon}_i$ и $\vec{u}_i$ - скорости частицы с массой m_i до и после соударения. Это соотношение может быть с достаточной степенью точности использовано, когда внешние силы есть, но время взаимодействия тел системы очень мало, а возникающие в этот момент внутренние силы очень велики (например, в момент взрыва или соударения). В этом случае импульсом таких внешних сил, как тяготение и вязкое трение можно пренебречь.

Может возникнуть и такая ситуация, что внешние силы действуют, но в каком-то направлении (например, x) они не действуют или уравновешены, т.е. $\sum F_{x_i} = 0$ – сумма проекций всех внешних сил на это направление равна нулю. В этом случае,

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \qquad p_x = \text{const},$$

т.е. мы имеем закон сохранения проекции импульса: если проекция равнодействующей внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция на эту ось вектора импульса системы не зависит от времени.

При решении задач удобнее пользоваться другой формой записи этого закона, а именно:

$$m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} + ... = m_1u_{1x} + m_2u_{2x} + ... \qquad (3.3)$$

3.3. Работа и энергия

Энергией называется скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения материи и мерой перехода материи из одних форм в другие. Механическая энергия характеризует движение и взаимодействие тел. Она является функцией скоростей и взаимного расположения тел. Она равна сумме кинетической и потенциальной энергий. Единицей измерения энергии является джоуль (Дж), 1 Дж = 1 $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$.

Кинетическая энергия тела

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

зависит только от массы и скорости тела. Значения кинетической энергии зависят от выбора системы отсчета, но не могут быть отрицательными. Кинетическая энергия изолированной частицы сохраняется.

Причиной изменения состояния механического движения тела, а, следовательно, и его энергии является взаимодействие тела с другими телами. Процесс изменения энергии тела под действием силы называется процессом совершения работы, а приращение энергии тела в этом процессе называется работой, совершенной силой. Работа, так же как и энергия, измеряется в джоулях (Дж).

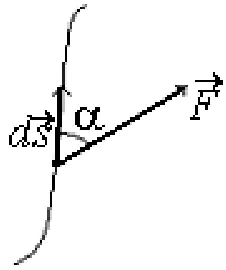


Рис. 3.1

Элементарная работа, совершаемая силой $\vec{F}$ (см. рис. 3.1) по перемещению материальной точки на расстояние $d\vec{s}$, равна

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = Fds\cos\alpha = F_S ds,$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения точки приложения силы; $F_S = F\cos\alpha$ – проекция силы на направление перемещения. Из этих соотношений видно, что сила не всегда совершает работу. Сила, действующая на тело, не совершает работу, если:

а) тело покоится ($ds = 0$);

б) сила перпендикулярна к направлению перемещения тела ($\alpha = 90°$).

Во втором случае действие силы приводит к искривлению траектории движущегося тела. Таково, например, действие центростремительной силы на материальную точку, равномерно движущуюся по окружности.

Работа может быть как положительной ($\alpha < \pi/2$, она совершается движущей силой), так и отрицательной ($\alpha > \pi/2$, работа совершается силой сопротивления). Работа, совершаемая силой $\overline{F}$ на конечном пути s, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути.

Эта сумма приводит к интегралу

$$A = \int_1^2 F\cos\alpha\, ds = \int_1^2 F_S ds = \int_1^2 \overline{F}d\overline{s}. \qquad (3.4)$$

Если величина составляющей силы F_S задана как функция от длины пути s (рис. 3.2), то элементарная работа $dA = F_S ds$ численно равна площади заштрихованной полоски. Поэтому полная работа A на пути 1-2 численно равна площади фигуры, ограниченной кривой F_s, вертикальными прямыми 1 и 2 и осью s.

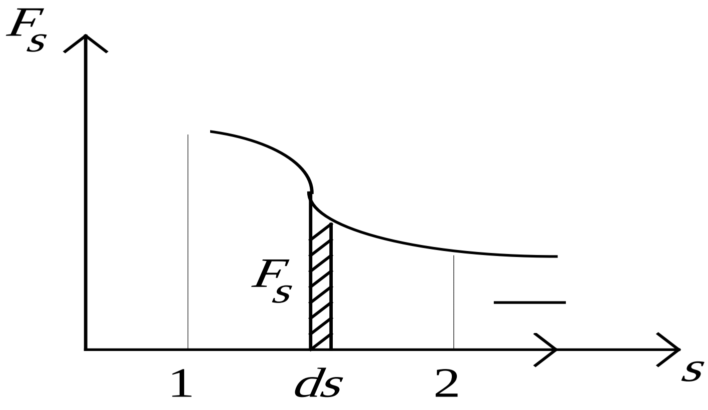


Рис. 3.2

Поскольку элементарное перемещение $d\vec{s} = \vec{\upsilon}dt$, выражению для элементарной работы можно придать вид $dA = \vec{F}\vec{\upsilon}dt$, и тогда,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\vec{\upsilon}dt.$$

Работа, совершаемая за единицу времени, называется мощностью P, т.е.

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Единицей измерения мощности является ватт (Вт), 1 Вт = 1 Дж/с = 1 $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}$.

Мощность в механике также может быть найдена из соотношения:

$$P = \vec{F}\vec{\upsilon}.$$

3.4. Консервативные силы

Если тело в каждой точке пространства подвержено воздействию других тел, оно находится в поле сил (например, в поле силы тяжести). Для стационарного (постоянного во времени) поля может оказаться, что работа, совершаемая над телом силами поля, зависит лишь от начального и конечного положений частицы и не зависит от пути, по которому двигалась частица. Силы, обладающие таким свойством, называются консервативными.

Итак, сила называется консервативной, если работа силы при перемещении тела из одного положения в другое не зависит от пути перехода. Работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю. Консервативными силами являются силы всемирного тяготения, силы упругости, кулоновские силы. Примером неконсервативных сил являются силы трения, силы, возникающие при неупругих соударениях.

Работа консервативных сил может быть представлена в виде $A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$, т.е. она определяется разностью значений некоторой функции $U(x, y, z)$, зависящей от положения тела в пространстве и называемой <u>потенциальной энергией</u> частицы. Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. В дифференциальной форме $dA = -dU$, т.е. работа консервативных сил равна уменьшению потенциальной энергии системы. Потенциальная энергия – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером взаимодействия между ними.

Зная вид функции $U(x, y, z)$, можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля. Можно показать, что

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}, \qquad (3.5)$$

где $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ – частные производные функции $U(x, y, z)$. Поскольку вектор с компонентами $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ в математике называют градиентом скалярной функции U и означают символом grad$U$, или ∇U, то

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U = -\nabla U .$$

Конкретный вид функции U зависит от характера силового поля. В частности, потенциальная энергия тела в поле силы тяжести:

$$U = mgh.$$

Обычно считается, что потенциальная энергия равна нулю, когда тело лежит на поверхности Земли. Потенциальная энергия сжатой пружины:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

где x – сжатие пружины.

3.5. Закон сохранения полной механической энергии

Полная механическая энергия системы E характеризует механическое движение и взаимодействие тел. Она равна сумме кинетической T и потенциальной U энергий,

$$E = T + U.$$

Изменение полной механической энергии системы происходит в процессе совершения работы неконсервативными силами, причем с помощью законов Ньютона можно показать, что

$$E_2 - E_1 = A,$$

где A – работа неконсервативных сил.

Если в системе нет сил трения и неупругих соударений, то механическая энергия системы остается постоянной:

$$E = T + U = \text{const}. \tag{3.6}$$

Имеем закон сохранения полной механической энергии: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется.

Для тела, находящегося в поле силы тяжести, закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + mgh = \text{const}.$$

При решении задач его удобнее брать в форме, связывающей два разных момента времени, а именно:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2. \tag{3.7}$$

Это соотношение может быть еще более упрощено, если начало отсчета потенциальной энергии выбрано в точке с наименьшей высотой. В этом случае одна из потенциальных энергий равна нулю.

Наличие сил трения и неупругих соударений в замкнутой системе приводит к уменьшению ее полной механической энергии со временем, причем изменение энергии в точности равно работе, совершаемой неконсервативными силами:

$$E_2 - E_1 = A. \tag{3.8}$$

Это соотношение выражает закон сохранения и превращения энергии и говорит о том, что энергия никогда не исчезает и не появляется из ничего, она лишь превращается из одного вида в другой и эти превращения происходят в процессе совершения работы. Механическая энергия при наличии неконсервативных сил переходит в другие, немеханические виды энергии. В этом случае выполняется более общий закон сохранения: в изолированной от любых внешних воздействий системе остается постоянной сумма всех видов энергии (включая немеханические).

3.6. Удар абсолютно упругих тел

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого не происходит превращения механической энергии системы соударяющихся тел в другие виды энергии. При абсолютно упругом ударе выполняются как закон сохранения импульса, так и закон сохранения энергии.

Рассчитаем скорости шаров после их абсолютно упругого прямого центрального соударения (см. рис. 3.3).

Рис. 3.3

Считаем, что до соударения шары массами m_1 и m_2 имели скорости $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, направленные в одну сторону по прямой, соединяющей центры шаров, причем $\upsilon_1 > \upsilon_2$. Скорости шаров $\vec{u_1}$ и $\vec{u_2}$ после удара находятся в результате решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}, \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \end{cases}$$

первое из которых выражает закон сохранения энергии, а второе – закон сохранения импульса.

Совместное решение этих уравнений дает следующий результат:

$$u_1 = \frac{\upsilon_1(m_1 - m_2) + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{\upsilon_2(m_2 - m_1) + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.9)$$

Следует помнить, что в этих формулах скорости υ_1 и υ_2 могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки в зависимости от направлений векторов $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $m_1 = m_2 = m$ – массы шаров одинаковы. Для скоростей имеем

$$u_1 = \upsilon_2, \qquad u_2 = \upsilon_1,$$

т.е. при ударе шары обмениваются скоростями.

б) $m_2 >> m_1$, $\upsilon_2 = 0$ – второй шар имеет большую массу и неподвижен. В этом случае $u_1 = -\upsilon_1$, $u_2 = 0$,

т.е. первый шар отскакивает от неподвижного массивного шара в обратную сторону с противоположно направленной скоростью $\vec{u}_1 = -\vec{\upsilon}_1$.

3.7. Удар абсолютно неупругих тел. Диссипация энергии

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела слипаются и двигаются в дальнейшем как единое целое. При абсолютно неупругом ударе выполняется только закон сохранения импульса. Закон сохранения энергии не выполняется, так как часть первоначальной энергии тел уходит на работу деформации или превращается в тепло.

Рассчитаем скорость совместного движения двух шаров после их абсолютно неупругого прямого центрального удара (см. рис. 3.4).

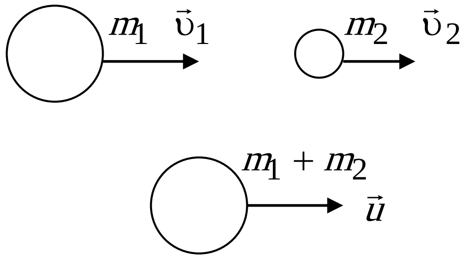


Рис. 3.4

В силу закона сохранения импульса с учетом того, что тела слипаются, выполняется соотношение:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

и так как скорости направлены в одну сторону, имеем

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения энергии не может быть применен, так как в рассматриваемой системе идут процессы диссипации (рассеяния энергии), – т.е. механическая энергия диссипативной системы постепенно уменьшается за счет преобразования в другие, немеханические формы энергии. В частности, в рассматриваемой системе изменение полной механической энергии в результате абсолютно неупругого удара равно:

$$\Delta E = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) < 0\,.$$

Таким образом, при неупругом ударе полная механическая энергия системы уменьшается. Работа, в точности равная убыли полной механической энергии системы, т.е.

$$A = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2,$$

затрачивается на деформацию и превращается в тепло.

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($\upsilon_2 = 0$), эту работу можно рассчитать по формуле:

$$A = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $\upsilon << \upsilon_1$ и почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. В этом случае КПД удара $\eta = A / E_1 = m_2 / (m_1 + m_2)$ максимален. И, наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей ($m_1 >> m_2$), тогда $\upsilon \approx \upsilon_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя, а не на остаточную деформацию стены.

3.8. Примеры решения задач

Задача 3-1. Снаряд, летевший с горизонтальной скоростью $\upsilon = 500$ м/с, разрывается на два осколка. Масса одного осколка в два раза больше другого. Больший осколок падает по вертикали, а меньший летит под углом 30° к горизонту. Какова скорость меньшего осколка?

Решение. В данном случае силой тяжести по сравнению с силами, появляющимися при взрыве, можно пренебречь, и поэтому выполняется закон сохранения импульса в векторной форме, который может быть записан в виде:

$$3m\vec{\upsilon} = 2m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 .$$

Левая часть уравнения соответствует импульсу системы до разрыва (рис. 3.5, наверху), правая часть – после (рис. 3.5, внизу).

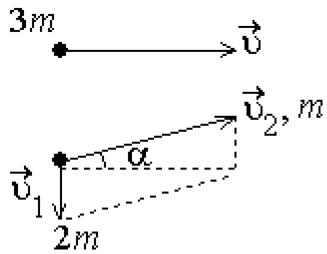


Рис. 3.5

Здесь учтено, что масса снаряда, обозначенная как $3m$, равна сумме масс осколков $m + 2m = 3m$. Из рис. 3.5 видно, что

$$\frac{3m\upsilon}{m\upsilon_2} = \cos\alpha, \;\; \upsilon_2 = \frac{3\upsilon}{\cos\alpha} .$$

Те же соотношения получаются и при рассмотрении проекции векторного уравнения на горизонтальную ось:

$$3m\upsilon = m\upsilon_2 \cos\alpha, \quad \upsilon_2 = \frac{3\upsilon}{\cos\alpha} = 1750 \text{ м/с.}$$

Задача 3-2. Платформа с песком общей массой $M = 2$ т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой

$m = 8$ кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определить, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда равна $\upsilon = 450$ м/с, и направлена сверху вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту.

Решение. После соударения платформа начнет двигаться, причем ее скорость $\vec{u}$ будет направлена горизонтально (см. рис. 3.6).

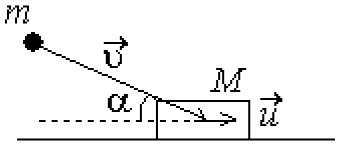


Рис. 3.6

В данном случае закон сохранения импульса в полной векторной форме не применим, т.к. вдоль вертикальной оси действуют сила тяжести и сила реакции опоры. В момент соударения сила реакции опоры возрастает, т.е. силы перестают уравновешивать друг друга. Здесь справедлив закон сохранения проекций импульса на горизонтальную ось, который в данном случае может быть записан в виде $m\upsilon\cos\alpha = (M + m)u$. Скорость совместного движения платформы с камнем определится соотношением:

$$u = \frac{m\upsilon\cos\alpha}{(M + m)} = 1{,}54 \text{ м/с.}$$

Задача 3-3. Пуля массой m = 12 г, летящая с горизонтальной скоростью $\upsilon = 0{,}6$ км/с, попадает в мешок с песком массой $M = 10$ кг, висящий на длинной нити, и застревает в нем. Определить: 1) высоту, на которую поднимается мешок, отклонившись после удара; 2) долю кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка.

Решение.

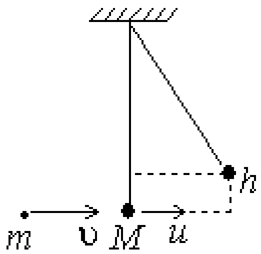


Рис. 3.7

Задача (см. рис. 3.7) решается на основе законов сохранения энергии и импульса. В момент столкновения пули с мешком выполняется закон сохранения импульса,

$$m\vec{\upsilon} = (M + m)\vec{u},$$

из которого следует, что

$$u = \frac{m\upsilon}{M + m}.$$

На следующем этапе совместного подъема мешка с пулей выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh.$$

Отсюда следует, что высота, на которую поднимается мешок после удара, равна

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{m^2\upsilon^2}{2g(M + m)^2} = 2{,}6 \text{ м}.$$

В процесс соударения энергия уменьшается, так как часть ее идет на пробивание песка. Разность исходной и конечной энергий равна

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} - (M + m)gh = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m^2\upsilon^2}{2(M + m)} =$$

$$= \frac{m\upsilon^2}{2}(1 - \frac{m}{M + m}) = \frac{m\upsilon^2}{2}\frac{M}{M + m}.$$

Доля кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка, может быть найдена как

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{M}{M + m} = 0{,}999.$$

Задача 3-4. Пуля, имеющая массу m = 0,01 кг, подлетает со скоростью υ_1= 1200 м/с к доске толщиной d = 0,04 м и, пробив доску, вылетает со скоростью υ_2 = 600 м/с. Найти среднюю силу сопротивления доски и работу этой силы.

Решение.

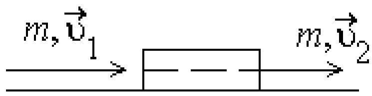


Рис. 3.8

В процессе столкновения пули с доской (см. рис. 3.8) кинетическая энергия системы уменьшается. Работа, совершаемая при пробивании доски, равна убыли кинетической энергии.

$$A = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2}.$$

Эта работа связана с силой сопротивления соотношением

$$A = F_c \cdot d = 5{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

поэтому сила сопротивления находится следующим образом:

$$F_c = \frac{m}{2d}(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) = 1{,}35 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Задача 3-5. С наклонной плоскости высотой h = 1 м и длиной l = 10 м скользит тело массой m = 1 кг. Найти: 1) кинетическую энергию T тела у основания плоскости; 2) скорость тела υ у основания плоскости; 3) расстояние s, пройденное телом по горизонтальной части пути до остановки. Коэффициент трения на всем пути считать постоянным и равным μ = 0,05.

Решение. На вершине наклонной плоскости тело обладает максимальной энергией, равной $U = mgh$. Эта энергия тратится на работу, совершаемую против сил трения на участках l и s (см. рис. 3.9).

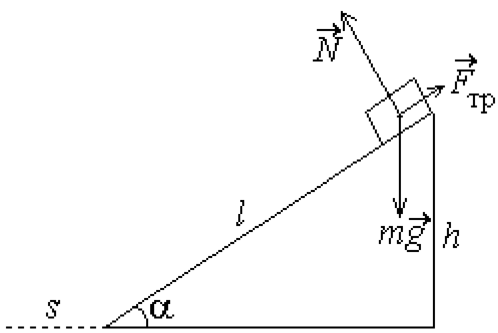


Рис. 3.9

Работа сил трения определяется величиной силы трения, а та, в свою очередь, зависит от величины силы реакции опоры N на данном участке. Как было показано в задаче 2-2, на наклонной плоскости $N_l = mg\cos\alpha$, а на плоской поверхности $N_s = mg$. Соответственно, силы трения на этих участках также будут различны. В силу закона сохранения и превращения энергии справедливо соотношение

$$A_{тр} = A_{тр}^{l} + A_{тр}^{s} = F_{тр}^{l} \cdot l + F_{тр}^{s} \cdot s = \mu N_l \cdot l + \mu N_s \cdot s =$$

$$= \mu mg\cos\alpha \cdot l + \mu mgs = E_n = mgh.$$

Кинетическая энергия T тела у основания плоскости:

$$T = \mu mgs = mgh - \mu mg\cos\alpha \cdot l = mg(h - \mu l\cos\alpha) = mg\left(h - \frac{\mu l^2}{\sqrt{l^2 - h^2}}\right) = 5 \text{ Дж.}$$

Отсюда можно найти величину пути:

$$s = \frac{h}{\mu} - l\cos\alpha = \frac{h}{\mu} - l\sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}} = \frac{h}{\mu} - \sqrt{l^2 - h^2} = 10 \text{ м.}$$

Для нахождения скорости тела у основания плоскости опять используем закон сохранения энергии, записанный в виде:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + F_{тр}^{l} \cdot l = \frac{m\upsilon^2}{2} + \mu mg\cos\alpha l.$$

Отсюда получим,

$$\upsilon = \sqrt{2gh - \mu gl\cos\alpha} = \sqrt{2gh - \mu gl\sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}}} = \sqrt{2gh - \mu g\sqrt{l^2 - h^2}} = 15 \text{ м/с.}$$

Задача 3-6. Тело массой m_1 = 2 кг движется со скоростью υ_1 = 3 м/с и нагоняет второе тело массой m_2 = 3 кг, движущееся со скоростью υ_2 = 1 м/с. Найти скорости тел после столкновения, если: 1) удар упругий и центральный; 2) удар неупругий и центральный.

Решение.

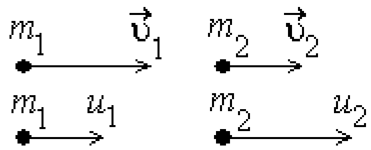


Рис. 3.10а

1) В случае упругого центрального соударения (см. рис. 3.10а) выполняются как закон сохранения импульса, так и закон сохранения энергии, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \\ m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \end{cases}$$

Скорости $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ могут быть найдены путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \end{cases}$$

В результате получим,

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = 0{,}6 \text{ м/с,}$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = 2{,}6 \text{ м/с.}$$

2) В случае неупругого центрального удара (см. рис. 3.10б) шары слипаются и двигаются в дальнейшем совместно. Здесь выполняется только закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u} .$$

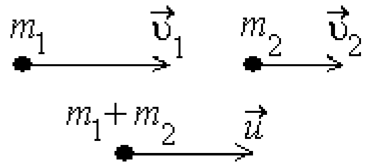


Рис. 3.10б

Так как все векторы направлены в одну сторону:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = 1{,}8 \text{ м/с}.$$

Задача 3-7. Брусок массой $m = 1$ кг лежит на шероховатой горизонтальной плоскости. К нему прикреплена невесомая пружина, жесткость которой $k = 40$ Н/м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}8$. Какую работу необходимо совершить, чтобы равномерно переместить брусок из состояния покоя (пружин не деформирована) на расстояние $l = 2$ м?

Решение.

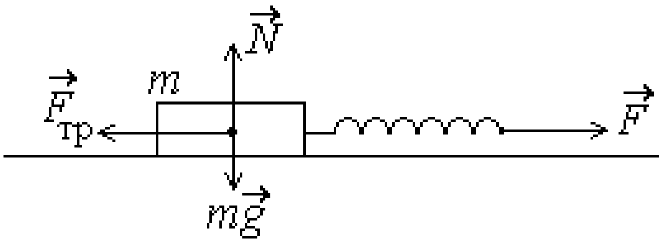


Рис. 3.11

Заметим, что процесс совершения работы происходит в два этапа. На первом этапе пружина растягивается под действием силы $\vec{F}$, при этом совершаемая силой работа A идет на увеличение потенциальной энергии. Только после этого брусок начинает перемещаться, на что затрачивается работа A_2. Условие равномерности перемещения говорит о том, что результирующее ускорение равно нулю, а значит, сумма всех приложенных к телу сил (см. рис. 3.11) также равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} = 0.$$

Следствием этого уравнения являются два соотношения:

$$N = mg, \quad F = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg.$$

Поскольку известна величина приложенной силы, по закону Гука можно рассчитать максимальное удлинение пружины:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{\mu mg}{k},$$

а затем и работу A_1, идущую на растяжение пружины:

$$A_1 = k\frac{x^2}{2} = \frac{\mu^2 m^2 g^2}{2k}.$$

Работа A_2 по перемещению бруса, совершаемая силой F на пути l, рассчитывается по формуле:

$$A_2 = F \cdot l = \mu mgl.$$

Искомая работа равна сумме найденных работ:

$$A = A_1 + A_2 = \mu mg\left(\frac{\mu mg}{2k} + l\right) = 16{,}45 \text{ Дж}.$$

Задача 3-8. Невесомая пружина жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на нее падает небольшой груз массой m (рис. 3.12). Какую максимальную скорость будет иметь груз при своем движении вниз? Трением пренебречь.

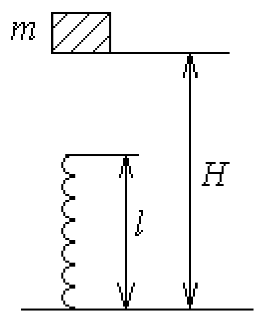


Рис. 3.12

Решение. После падения груза на пружину пружина начнет колебаться около положения нового равновесия, смещенного на некоторое расстояние x_0 вниз (его высота от поверхности стола $1 - x_0$). Величина x_0 может быть найдена из условия

$$mg = kx_0,$$

которое становится справедливым после затухания колебаний.

Максимальной скоростью обладает груз в момент прохождения положения равновесия, поэтому первоначальную энергию груза и пружины E_1 необходимо сравнить с их энергией E_2 именно в этот момент. Энергия E_1 – это потенциальная энергия груза, равная $E_1 = mgH$.
Пружина в этот момент не деформирована, ее энергия равна нулю.

В момент прохождения грузом положения нового равновесия энергия E_2 складывается из потенциальной энергии груза $mg(l - x_0)$, кинетической энергии груза $\frac{m\upsilon^2}{2}$ и потенциальной энергии сжатой пружины $\frac{kx_0^2}{2}$. По закону сохранения энергии в силу того, что трением можно пренебречь, эти энергии должны быть равны, т.е.

$$mgH = mg(l - x_0) + \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

Используя полученное ранее соотношение $x_0 = \frac{mg}{k}$, найдем искомую скорость:

$$\upsilon = \sqrt{2g(H - l) + \frac{mg^2}{k}}.$$

3.9. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

3.1. Какие системы называются замкнутыми? Приведите примеры таких систем.

3.2. Какие свойства пространства и времени лежат в основе законов сохранения?

3.3. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется?

3.4. Тело брошено под углом к горизонту. Сохраняется ли: а) импульс тела; б) проекция импульса тела на какие-либо направление?

3.5. Как космонавту, находящемуся автономно в открытом космосе, вернуться на космический корабль без посторонней помощи?

3.6. Что характеризует механическая энергия и из чего она складывается?

3.7. Чем определяются кинетическая и потенциальная энергии тела?

3.8. Как определяется работа силы?

3.9. Всегда ли сила, действующая на тело, совершает работу?

3.10. Какие силы называются консервативными? Приведите примеры консервативных и неконсервативных сил.

3.11. Какова связь между силой и потенциальной энергией?

3.12. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?

3.13. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?

3.14. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?

3.15. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом и абсолютно неупругом соударениях?

3.16. Две частицы с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу во взаимно перпендикулярных направлениях по гладкой горизонтальной плоскости со скоростями υ_1 и υ_2. Определить величину кинетической энергии частиц после их абсолютно неупругого удара.

3.17. Две частицы с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг движутся навстречу друг другу во взаимно перпендикулярных направлениях по гладкой горизонтальной плоскости со скоростями $\upsilon_1 = 3$ м/с и $\upsilon_2 = 2$ м/с. Определить количество тепла, выделившееся после их абсолютно неупругого удара.

3.18. Три одинаковых тела массой $m = 50$ г каждое расположено на горизонтальной плоскости вдоль одной линии. С крайним телом соударяется такое же тело, движущееся со скоростью $\upsilon = 20$ м/с вдоль линии, на которой расположены тела. Определить кинетическую энергию системы тел после всех соударений, считая соударения тел абсолютно неупругими.

3.19. Два тела массами $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 6$ кг движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Определить количество тепла, выделившегося при абсолютно неупругом соударении этих тел.

3.20. По горизонтальным рельсам движется платформа массой $M = 200$ кг со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. На нее вертикально падает камень массой $m = 50$ кг и движется в дальнейшем вместе с платформой. Определить скорость совместного движения платформы с камнем и количество теплоты, выделившееся при соударении.

3.21. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью $\upsilon = 400$ м/с, разорвался на две равные половины. Начальная скорость одной половины снаряда после разрыва равна $\upsilon_1 = 200$ м/с и направлена вертикально вниз. Определить величину и направление скорости второй половины снаряда.

3.22. Снаряд, падавший под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $\upsilon = 1000$ м/с, разорвался на две равные половины. Начальная скорость одной половины снаряда направлена вертикально вниз и так же равна $\upsilon_1 = 1000$ м/с. Определить величину и направление скорости второй половины снаряда.

3.23. Ядро, падавшее вертикально вниз со скоростью $\upsilon = 200$ м/с, разорвалось на два осколка. Первый осколок, масса которого составляет 40 % массы ядра, полетел в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_1 = 500$ м/с. Определить величину и направление скорости второго осколка.

3.24. Снаряд разорвался в верхней точке траектории на высоте h на две равные части. Скорость снаряда в момент взрыва равна υ. Один осколок упал на землю под местом взрыва через время t. Найти направление и величину скорости второго осколка.

3.25. Две частицы с массами m и $2m$, имеющие импульсы $\vec{p}$ и $\vec{p}/2$, движутся во взаимно перпендикулярных направлениях. После соударения частицы обмениваются импульсами. Определить потерю механической энергии при соударении.

3.26. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найти, какая часть первоначальной кинетической энергии переходит при ударе в тепло.

3.27. Идеально гладкий шар A, движущийся со скоростью υ_0, одновременно сталкивается с двумя такими же, соприкасающимися между собой шарами B и C (рис. 3.13). Удар является абсолютно упругим. Определить скорости шаров после столкновения.

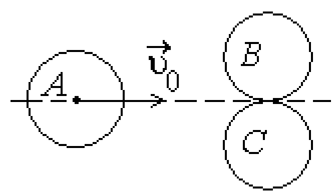


Рис. 3.13

3.28. На гладкий клин массой M, который может скользить лишь горизонтально, падает шарик массой m. Шарик упруго ударяется о грань, образующую угол $\alpha = 45°$ к горизонту. Скорость шарика непосредственно перед ударом равна υ_0 и направлена вертикально вниз (рис. 3.14). Найти скорость клина после удара. Трением пренебречь.

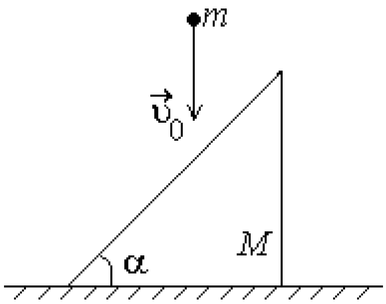


Рис. 3.14

3.29. Клин массой m_1 находится на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. Брусок массой m_2 первоначально находится на клине на высоте h (рис. 3.15.). Брусок отпускают и он начинает скользить по поверхности клина. Трение между бруском и клином отсутствует. Определить скорость бруска после соскальзывания с клина.

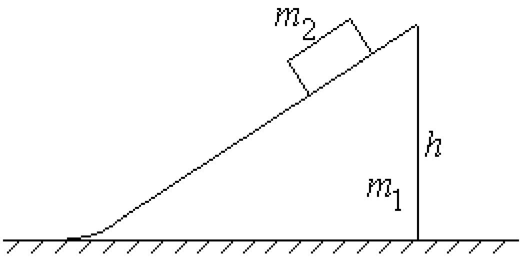


Рис. 3.15

3.30. Частица массой m_1 налетела со скоростью υ на неподвижную частицу массой m_2. Считая удар упругим и центральным, определить скорость частицы m_2 после удара, и долю первоначальной кинетической энергии, переданной второму телу при ударе.

3.31. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом, жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня $l = 1$ м. Найти скорость υ пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha = 10°$.

3.32. Боек свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100$ кг. Найти КПД удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.

3.33. Молот массой m = 10 кг, двигаясь со скоростью υ = 3 м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием M = 110 кг. Считая удар абсолютно неупругим, определить энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия. Чему равен КПД процесса ковки при данных условиях?

3.34. Тело скользит сначала по наклонной плоскости, составляющей угол α = 80° с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти коэффициент трения на всем пути, если известно, что тело проходит по горизонтальной поверхности то же расстояние, что и по наклонной плоскости.

3.35. Тело массой m = 3 кг начинает скользить по наклонной плоскости высотой h = 0,5 м и длиной склона l = 1 м и приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью υ = 2,45 м/с. Найти коэффициент трения μ тела о плоскость и количество теплоты q, выделенное при трении.

3.36. В тело массой m_1 = 1 кг, лежащее на горизонтальной поверхности, попадает пуля массой m_2 = 0,01 кг и застревает в нем. Скорость пули направлена горизонтально и равна υ = 700 м/с. Определить путь, пройденный телом до остановки, и работу по торможению тела, совершенную при этом силами трения. Коэффициент трения между телом и поверхностью μ = 0,05.

3.37. Шар массой m = 1,8 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял η = 0,36 своей кинетической энергии T_1. Определить массу большего шара.

3.38. Для забивки сваи массой m = 100 кг используется копер, подъемная часть которого массой M = 400 кг падает с высоты h = 1,5 м. Найти среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая уходит в землю на глубину s = 0,05 м. Считать удар между сваей и падающим грузом абсолютно неупругим.

3.39. Пуля массой $m = 10^{-2}$ кг, летевшая горизонтально со скоростью υ = 600 м/с, ударилась в свободно подвешенный деревянный брусок массой M = 5 кг и застряла в нем, углубившись на s = 0,1 м. Найти силу сопротивления дерева движению пули.

3.40. Небольшое тело начинает скользить без трения с вершины сферы вниз (рис. 3.16). На какой высоте h над центром сферы тело отделится от поверхности сферы и полетит свободно? Радиус сферы равен R.

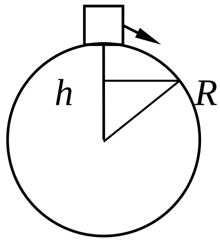


Рис. 3.16

3.41. Математический маятник представляет собой деревянный шар массой m_1, подвешенный на нити длиной l. Пуля массой m_2, летящая горизонтально, попадает в шар и застревает в нем. При какой минимальной скорости пули шар сможет сделать полный оборот в вертикальной плоскости.

3.42. Два небольших тела, отношение масс которых равно $m_1/m_2 = 2$ одновременно начинают соскальзывать без трения с противоположных концов внутрь полусферы радиусом R. Найти высоту, на которую поднимутся тела после абсолютно неупругого соударения.

3.43. Брусок массой $M = 1{,}5$ кг лежит на горизонтальной поверхности. В него попадает пуля, летящая горизонтально, и пробивает его. Масса пули $m = 9$ г, скорость перед ударом $\upsilon_1 = 800$ м/с, а после вылета из бруска $\upsilon_2 = 150$ м/с. Какой путь пройдет брусок до остановки, если коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}2$. Смещением бруска во время удара пренебречь.

3.44. Пуля летит с некоторой начальной скоростью. Она пробивает доску толщиной $d = 3{,}6$ см и продолжает полет со скоростью, составляющей 0,8 начальной. Какой максимальной толщины доску она может пробить?

3.45. Резерфорд наблюдал, что при любом столкновении с ядрами меди α-частица с энергией $E_1 = 5$ МэВ отлетает назад с энергией $E_2 = 3{,}9$ МэВ. Вычислить по этим данным отношение масс ядра меди и α-частицы.

3.46. На горизонтальной поверхности лежат два тела массами m_1 и m_2, соединенные пружиной жесткости k. Определить минимальную горизонтальную постоянную силу, которую надо приложить ко второму телу, чтобы сдвинуть первое тело. Коэффициент трения между телами и горизонтальной поверхностью равен μ.

3.47. Два груза массами m и M связаны невесомой пружиной друг с другом (рис. 3.17). С какой силой F надо надавить на груз m, чтобы в процессе колебаний груз M оторвался от стола.

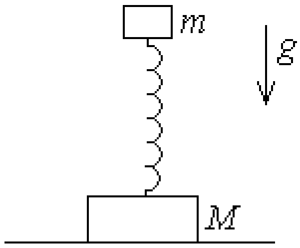


Рис. 3.17

3.48. Тело массой m упало с высоты h на чашу пружинных весов. Массы чаши и пружины пренебрежимо малы, жесткость пружины k. Определить максимальное сжатие пружины.

3.49. Груз массой $m = 1$ кг падает на чашу весов с высоты $h = 10$ см. Каковы показания весов F в момент удара, если после успокоения качаний чаша опускается на $x_0 = 0{,}5$ см?

3.50. С какой скоростью двигался вагон массой $m = 20$ т, если при ударе о стенку каждый буфер сжался на $x_0 = 10$ см? Жесткость пружины каждого буфера $k = 1$ МН/м.

3.51. Акробат прыгает на сетку с высоты $h = 8$ м. На какой предельной высоте над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $x_0 = 0{,}5$ м, если акробат прыгает на нее с высоты $h_1 = 0{,}5$ м.

3.52. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой $m = 20$ г поднялась на высоту $h = 5$ м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на $s = 10$ см. Массой пружины пренебречь.

3.53. Пружина жесткостью $k = 10^4$ Н/м сжата силой $F = 2 \cdot 10^2$ Н. Определить работу внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на $\Delta l = 1$ см.

3.54. Гиря, положенная на верхний конец пружины, сжимает ее на $\Delta l = 2$ мм. На сколько сожмет пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высоты $h = 5$ см?

3.55. Резиновый мяч массой $m = 0{,}1$ кг лежит горизонтально и ударяется о неподвижную вертикальную стенку. За время $\Delta t = 0{,}01$ с мяч сжимается на $\Delta l = 1{,}37$ см, такое же время Δt затрачивается на восстановление первоначальной формы мяча. Найти среднюю силу, действующую на стенку во время удара.

3.56. Тело m падает с высоты H на стоящую вертикально на полу пружину жесткостью k и длиной l. Определить максимальную скорость тела, наибольшую силу давления на пол.

3.57. В детском пистолете шарик кладут на пружину, укрепленную внутри ствола. Пружину сжимают на длину $\Delta l = 5$ см, а потом отпускают, направив ствол вертикально вверх. Шарик взлетает на высоту $H = 0{,}5$ м. Какое максимальное ускорение приобрел шарик? Шарик отрывается от пружины в тот момент, когда она полностью распрямится. Трением, сопротивлением воздуха и массой пружины пренебречь.

3.58. Льдина площадью поперечного сечения $S = 1$ м^2 и высотой $H = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду? Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

3.59. В озере плавает плоская льдина массой $m = 100$ кг и площадью $S = 0{,}2$ м^2. Какую работу надо свершить, чтобы полностью утопить льдину? Плотность льдины $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_{H_2O} = 1000$ кг/м^3.

3.60. Шарик для игры в настольный теннис радиусом $R = 15$ мм и массой $m = 5$ г погружен в воду на глубину $h = 30$ см. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $H = 10$ см. Определить величину механической энергии, перешедшей в тепло.

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Момент инерции

Во вращательном движении мерой инертности служит не только масса как таковая, но и ее распределение относительно оси вращения. Распределение масс относительно оси вращения характеризуется с помощью момента инерции. Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадрат их расстояния до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Единицей измерения момента инерции является килограмм-метр в квадрате ($кг \cdot м^2$).

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу:

$$J = \int r^2\, dm, \qquad (4.1)$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

Момент инерции - величина аддитивная, т.е. момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей. Момент инерции во вращательном движении играет такую же роль, как и масса в поступательном движении. Каждое тело, независимо от того, движется оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится. Так как осей «возможного вращения» бесконечное множество, моментов инерции тоже бесконечное множество.

Момент инерции зависит от распределения масс относительно данной оси вращения. Распределение массы в пределах тела можно охарактеризовать с помощью величины, называемой плотностью. Если тело однородно, т.е. масса распределена равномерно, плотность равна

$$\rho = m/V,$$

если масса распределена неравномерно,

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \qquad dm = \rho dV.$$

Видно, что единицей измерения плотности является килограмм на метр в кубе (кг/м^3).

С учетом этих соотношений момент инерции может быть записан как

$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV\,. \qquad (4.2)$$

В общем случае вычисление моментов инерции весьма трудоемкая задача. Но для некоторых симметричных тел массой m относительно оси, проходящей через центр масс, получено выражение для моментов инерции, например, для:

а) обруча (тонкостенного цилиндра) радиусом R относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча:

$$J_c = mR^2;$$

б) диска (сплошного цилиндра) радиусом R относительно оси, перпендикулярной плоскости диска:

$$J_c = \frac{1}{2} mR^2;$$

в) шара радиусом R относительно оси, проходящей через центр:

$$J_c = \frac{2}{5} mR^2;$$

г) стержня длиной l, относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину:

$$J_c = \frac{1}{12} ml^2.$$

4.2. Теорема Штейнера

Неподвижная ось вращения может проходить как через центр масс, так и вне его. Обеспечить нахождение моментов инерции во многих случаях поможет теорема о параллельном переносе осей. Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера: момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями

$$J = J_C + ma^2. \tag{4.3}$$

Таким образом, с удалением центра масс тела от оси вращения момент инерции тела относительно оси возрастает.

4.3. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия тела T равна сумме кинетических энергий частей, на которые можно разбить тело:

$$T = \sum \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

Когда тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, угловая скорость ω всех точек тела будет одинакова, а линейные скорости точек υ_i – различны, причем $\upsilon_i = \omega r_i$. Поэтому кинетическая энергия вращающегося тела может быть приведена к виду

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i (\omega \upsilon_i)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i r_i^2 = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения.

Из сравнения формул для кинетической энергии тела, движущегося поступательно и вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}, \quad T = \frac{J\omega^2}{2} \tag{4.4}$$

следует, что момент инерции – мера инертности тела при вращательном движении.

Если тело не только вращается, но и движется поступательно (например, цилиндр, скатывающийся с наклонной плоскости), энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}, \tag{4.5}$$

где m – масса катящегося тела, υ_c – скорость центра масс, $J_с$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, ω – угловая скорость тела.

4.4. Момент силы

Вращающее действие силы характеризуют с помощью момента силы.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного к точке приложения силы $\vec{F}$ на эту силу (рис. 4.1):

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

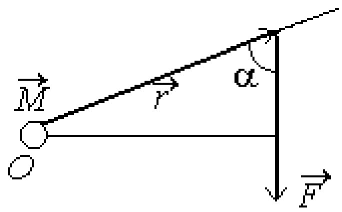


Рис. 4.1

Векторы $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ образуют правую тройку векторов. Модуль момента силы равен произведению

$$M = F \cdot r \sin\alpha = Fl.$$

модуля F приложенной к телу силы на плечо l этой силы относительно данной оси (рис. 4.2). Плечом силы называют длину перпендикуляра от оси вращения до линии действия силы, т.е. кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы. Момент силы измеряется в ньютон-метрах, 1 Н · м = 1 кг · м^2/с^2.

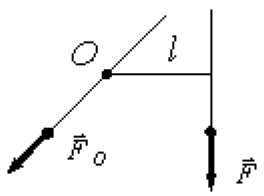


Рис. 4.2

Одна и та же сила способна оказывать разное воздействие на тело в зависимости от расположения линии действия силы (от величины плеча силы). В частности, если линия действия силы проходит через ось вращения, момент этой силы равен нулю. Такая сила не в состоянии привести тело во вращение или изменить существующую скорость вращения тела.

Итак, момент силы характеризует способность этой силы вращать тело вокруг данной оси. При этом малая сила, плечо которой велико и большая сила с малым плечом, создавая одинаковые моменты, приводят к одинаковому воздействию на тело.

Если на тело действует несколько (N) сил $\vec{F}_i$ (обладающих, соответственно, моментами $\vec{M}_i$), результирующее вращение будет определяться результирующим, или главным, моментом $\vec{M}_i$ внешних сил относительно точки O, равным векторной сумме моментов M_i всех внешних сил, приложенных к телу.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \vec{F}_i]. \qquad (4.6)$$

Вращение относительно неподвижной оси (а не точки), не обязательно должно быть охарактеризовано вектором $\vec{M}$, в этом случае достаточно знать проекцию вектора $\vec{M}$ на ось вращения, равную его модулю M. Проекция M главного момента является скалярной величиной, она равна алгебраической сумме проекций M_i. Если ось вращения закреплена, силы могут вращать тело только по и против часовой стрелки, поэтому моменты сил, вращающих тело, берутся со знаком «+», а момент сил, противодействующих вращению со знаком «–».

4.5. Работа при вращении тела

Работа силы $\vec{F}$ по перемещению тела на бесконечно малое расстояние $d\vec{s}$, как известно, определяется соотношением (рис. 4.2).

$$dA = \vec{F} d\vec{s} = F_S ds.$$

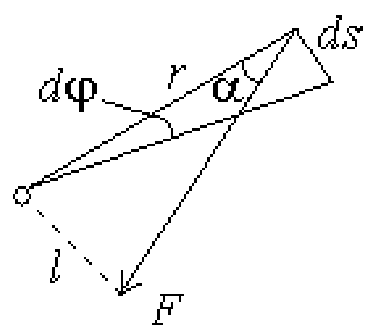


Рис. 4.2

Если тело абсолютно твердое и ось вращения закреплена, работа этой силы равна работе, затрачиваемой на поворот тела на бесконечно малый угол $d\varphi$. При повороте тела точка приложения силы проходит путь $ds = rd\varphi$ и поэтому,

$$dA = F_S r d\varphi = M d\varphi, \qquad (4.7)$$

где $F_S r = Fr \sin\alpha = F l = M$ – модуль момента силы относительно оси вращения. Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

4.6. Уравнение динамики вращательного движения

Работа при вращении тела

$$dA = M_z d\,\varphi$$

идет на увеличение его кинетической энергии dT.

С другой стороны, изменение кинетической энергии тела при вращении определяется соотношением:

$$dT = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\,\omega d\omega.$$

Итак, $Md\,\varphi = J\omega d\omega$; поделив это соотношение на dt и учтя, что $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, $\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon$, получим основной закон динамики вращательного движения в скалярной и векторной формах:

$$M = J\,\varepsilon, \qquad \vec{M} = J\vec{\varepsilon}\,. \tag{4.8}$$

Сравнивая это соотношение с основным законом динамики поступательного движения:

$$\vec{F}_{\Sigma} = m\vec{a}\,,$$

видим, что во вращательном движении аналогом силы $\vec{F}$ является момент силы M, аналогом массы m – момент инерции J, аналогом линейного ускорения $\vec{a}$ – угловое ускорение ε. Аналогом импульса $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ является момент импульса, подробнее рассмотренный в следующем параграфе.

4.7. Определение момента импульса

Моментом импульса (моментом количества движения) относительно точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]. \tag{4.9}$$

Он направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$, и образуют с ними правую тройку векторов (рис. 4.3).

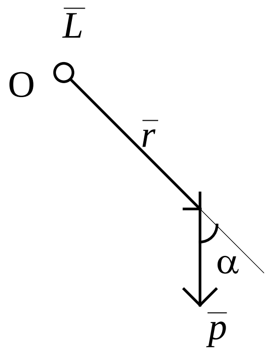


Рис. 4.3

Модуль вектора момента импульса равен

$$L = rp\sin\alpha = rm\upsilon\sin\alpha = p\cdot l,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, l – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O. Измеряется момент импульса в килограмм-метр в квадрате в секунду ($\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$).

При вращении абсолютно твердого тела каждая точка движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью $\upsilon_i = \omega r_i$. Скорость υ_i и импульс $m_i\upsilon_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i\upsilon_i$. Момент импульса отдельной частицы $L_i = m_i\upsilon_i r_i$. Векторы $\vec{L}_i$ у всех частиц направлены в одну сторону, поэтому их модули складываются и тогда результирующий момент импульса находится, как

$$L = \sum m_i\upsilon_i r_i = \sum m_i(\omega r_i)r_i = \omega\sum m_i r_i^2 = J\omega.$$

Итак, имеем

$$L = J\omega.$$

Если ось вращения закреплена, вектора $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадают и поэтому

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (4.10)$$

4.8. Закон сохранения момента импульса

Найденные нами соотношения для момента импульса:

$$L = J\omega, \qquad \bar{L} = J\bar{\omega}$$

могут быть продифференцированы по времени:

$$\frac{dL}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{4.11}$$

– получим еще одну форму записи основного закона динамики вращательного движения,

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M} = 0$, поэтому $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда следует, что

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Это выражение представляет собой <u>закон сохранения момента импульса</u>: момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной точки сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени. Момент импульса остается постоянным и для незамкнутой системы, при условии, что суммарный момент внешних сил равен нулю.

Закон сохранения момента импульса, подобно законам сохранения импульса и энергии, является одним из фундаментальных законов природы. Напомним, что он является следствием изотропии пространства.

4.9. Применение законов динамики твердого тела

Ранее было отмечено, что произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения со скоростью центра масс (инерции) тела и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс тела. Для характеристики произвольного движения тела необходимо рассмотреть оба закона динамики:

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}_{\Sigma}, \\ J\varepsilon = M \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\Sigma} \\ \dfrac{dL}{dt} = M, \end{cases} \tag{4.12}$$

поскольку движение тела определяется как действующими на него силами, так и моментами этих сил.

Соответственно, условия равновесия тела принимают следующий вид:

$$\sum \vec{F} = 0, \quad \sum M = 0, \tag{4.13}$$

причем оба эти условия должны быть соблюдены одновременно.

4.10. Примеры решения задач

Задача 4-1. К ободу однородного сплошного диска радиусом R = 0,5 м приложена постоянная касательная сила F = 100 Н. При вращении диска на него действует момент сил трения Мтр = 2 Н·м. Определить массу m диска, если известно, что его угловое ускорение постоянно и равно ε = 16 рад/с2.

Решение.

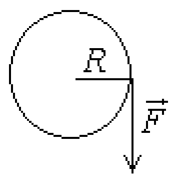


Рис. 4.4

Момент силы *F*, приложенной к ободу диска, равен:

$$M = F \cdot R,$$

поэтому основной закон динамики вращательного движения запишется в виде:

$$FR - M_{\text{тр}} = J\varepsilon.$$

Момент инерции *J* однородного сплошного диска находится по формуле

$$J = \frac{1}{2} mR^2,$$

используя которую, получаем соотношение:

$$\frac{1}{2} mR^2 \cdot \varepsilon = FR - M_{\text{тр}},$$

позволяющее определить массу диска:

$$m = \frac{2(FR - M_{\text{тр}})}{\varepsilon R^2} = 24 \text{ кг.}$$

Задача 4-2. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого J = 1,5 кг·м2, вращаясь при торможении равнозамедленно, за время t = 1 мин уменьшил частоту своего вращения с ν0 = 240 об/мин до ν1 = 120 об/мин. Определить: 1) угловое ускорение ε маховика; 2) момент M силы торможения; 3) работу торможения A.

Решение. Угловое ускорение ε маховика найдем из соотношения:

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{2\pi(\nu_1 - \nu_0)}{t} = -\,0{,}21 \text{ рад/с}^2.$$

Здесь ν_0 = 240 об/мин = 4 об/с, а ν_1 = 120 об/мин = 2 об/с.

Знак «–» указывает на торможение маховика.

Момент силы торможения находится из основного закона динамики вращательного движения:

$$M = J \cdot \varepsilon = 0{,}315 \text{ Н·м.}$$

Работа силы торможения определяется разностью энергий в начальный и конечный моменты времени и равна

$$A = E_2 - E_1 = \frac{J\omega_0^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 J(\nu_0^2 - \nu_1^2) = 360 \text{ Дж.}$$

Задача 4-3. Нить с привязанными к ее концам грузами массой m1 = 60 г и m2 = 100 г перекинута через блок диаметром D = 5 см. Определить момент инерции J блока, если под действием сил тяжести грузов он получил угловое ускорение ε = 2 рад/с2.

Решение.

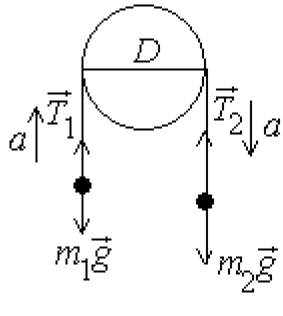


Рис.4.5

В данном случае (рис. 4.5) силы натяжения T_1 и T_2 не равны друг другу, так как только в случае их неравенства блок начинает проворачиваться и приобретать угловое ускорение. Поэтому для решения задачи необходимо совместное решение трех уравнений: для грузов, движущихся поступательно, запишем второй закон Ньютона, а для блока – основной закон динамики вращательного движения:

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \\ M = R(T_2 - T_1) = J\varepsilon. \end{cases}$$

Учитывая, что $R = \frac{D}{2}$, $a = \varepsilon R$, для определения трех неизвестных T_1, T_2, J получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \varepsilon D = 2(T_1 - m_1 g) \\ m_2 \varepsilon D = 2(m_2 g - T_2) \\ 2J\varepsilon = D(T_2 - T_1). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$J = \frac{Dg}{2\varepsilon}(m_2 - m_1) - \frac{D^2}{4}(m_1 + m_2) = 4{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ кг·м}^2.$$

Задача 4-4. Медный шар радиусом R = 10 см вращается со скоростью, соответствующей ν = 2 об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?

Решение. Искомая работа будет равна разности кинетических энергий шара в конечный и начальный моменты времени:

$$A = E_2 - E_1 = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = 2\pi^2 J(\nu_2^2 - \nu_1^2) = 6\pi^2 J\nu^2,$$

причем момент инерции медного (ρ = 8600 кг/м^3) шара относительно оси, проходящей через его центр, найдется, как:

$$J = \frac{2}{5} mR^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot R^2 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Окончательно имеем

$$A = \frac{16}{5}\pi^3 \rho R^5 \nu^2 = 3{,}2\pi^3 \rho R^5 \nu^2 = 34{,}1 \text{ Дж.}$$

Задача 4-5. Карандаш длиной $l = 15$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша, 2) верхний его конец?

Решение. Задача решается с использованием закона сохранения механической энергии. В процессе падения карандаша его потенциальная энергия $mgh = \frac{mgl}{2}$ переходит в кинетическую энергию вращения $\frac{J\omega^2}{2}$ и поэтому угловая скорость ω и линейная $\upsilon = \omega R$ могут быть найдены из уравнения:

$$\frac{mgl}{2} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Здесь необходимо учесть, что момент инерции карандаша рассчитывается относительно оси, проходящей через его конец, а не относительно оси симметрии, когда $J_c = \frac{1}{12} m l^2$. Для нахождения искомого момента инерции используем теорему Штейнера:

$$J = J_c + md^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2.$$

Теперь для нахождения скоростей ω и $\upsilon = \omega l$ конца стержня получаем уравнения:

$$mgl = \frac{1}{3} m l^2 \omega_2^2, \quad mgl = \frac{1}{3} m \upsilon_2^2,$$

из которых находим

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 14 \text{ рад/с}, \qquad \upsilon_2 = \sqrt{3gl} = 2{,}1 \text{ м/с}.$$

Линейная скорость середины стержня в два раза меньше, так как здесь $R = \frac{l}{2}$, $\upsilon = \omega \frac{l}{2}$ и поэтому υ_1=1,05 м/с; угловая скорость вращения такая же, т.к. она одинакова у всех точек вращающегося тела.

Задача 4-6. Горизонтальная платформа массой $m = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $\nu_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_0 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой ν_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

Решение. В силу закона сохранения количества движения имеем

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 и J_2 – моменты инерции платформы с человеком, стоящим на ее краю и в центре, соответственно, ω_1 и ω_2 – угловые скорости платформы в первом и втором положениях человека.

Моменты инерции платформы с человеком на краю и в центре с учетом теоремы Штейнера определяются соотношениями:

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2, \quad J_2 = \frac{mR^2}{2},$$

где R – радиус платформы.

Подставляя эти соотношения в закон сохранения количества движения, и учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, имеем

$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi\nu_1 = 2\pi\nu_2\frac{mR^2}{2},$$

откуда

$$\nu_2 = \nu_1\frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} = \nu_1\frac{m + 2m_0}{m} = 22 \text{ об/мин.}$$

4.11. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

4.1. Что такое момент инерции тела и какова его роль во вращательном движении?

4.2. От чего зависит момент инерции относительно некоторой оси вращения?

4.3. Как может быть рассчитан момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов?

4.4. В каких случаях для расчета момента инерции может быть применена теорема Штейнера?

4.5. Какой вид имеет формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

4.6. Как рассчитывается кинетическая энергия тела, участвующего одновременно в поступательном и вращательном движениях?

4.7. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? Как определяется направление момента силы?

4.8. В каких случаях действие сил не приводит к вращению тела?

4.9. Что такое результирующий момент внешних сил? Как находится результирующий момент, если ось вращения закреплена?

4.10. Как находится работа, совершаемая силой при вращении тела?

4.11. Как выводится основной закон динамики вращательного движения и какой вид он имеет?

4.12. Что такое момент импульса материальной точки? Как определяется направление вектора момента импульса?

4.13. Как формулируется закон сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется?

4.14. К каким выводам можно прийти при сопоставлении основных уравнений динамики поступательного и вращательного движений?

4.15. Какими уравнениями описывается произвольное движение тела? равновесие тела?

4.16. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 150$ кг·м^2, вращается с частотой $\nu = 240$ об/мин. Через время $t = 1$ мин, после того как на маховик стал действовать момент сил торможения, он остановился. Определить: 1) момент M сил торможения; 2) число оборотов маховика от начала торможения до полной остановки; 3) начальные кинетическую энергию и момент импульса.

4.17. Частота вращения маховика, момент инерции которого равен $J = 120$ кг·м^2, составляет $\nu_0 = 240$ об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик, под действием сил трения в подшипниках, остановился за время $t = \pi$ мин. Считая трение в подшипниках постоянным, определить момент M сил трения.

4.18. Маховик массой $m = 5$ кг вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой $\nu = 600$ мин$^{-1}$. Массу маховика можно считать распределенной по его ободу радиусом $R = 30$ см. Через $t = 40$ с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

4.19. К ободу колеса, имеющего форму диска, радиусом $R = 0{,}5$ м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 100$ Н. Найти угловое ускорение колеса, время, прошедшее после начала действия силы до достижения колесом скорости соответствующей $\nu = 100$ об/с, момент импульса колеса в этот момент времени.

4.20. Маховик, момент инерции которого равен $J = 60$ кг·м^2, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 30$ рад/с. Найти кинетическую энергию T маховика, его момент импульса L, а также тормозящий момент M, под действием которого маховик останавливается через время $t = 20$ с.

4.21. Маховое колесо, имеющее момент инерции $J = 245$ кг·м^2, вращается с частотой $\nu = 20$ об/с. Через минуту, после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент его частота вращения уменьшилась в 2 раза. Найти: момент сил трения; число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил; работу, совершенную силами трения за это время.

4.22. Найти момент инерции J и момент импульса L Земного шара относительно оси вращения.

4.23. На барабан массой $M = 9$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

4.24. На барабан радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 10$ кг. Найти момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2{,}04$ м/с^2.

4.25. На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}1$ кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана груз находился на высоте $h = 1$ м над полом. Через какое время груз опустится на пол и какова будет при этом его кинетическая энергия? Трением пренебречь.

4.26. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

4.27. Определить угловое ускорение блока радиусом R с моментом инерции J, через который перекинута нить с грузами массой m1 и m2. Трением пренебречь.

4.28. Блок массой m = 1 кг укреплен на конце стола (рис. 2.9). Блок 1 и 2 одинаковой массы m1 = m2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок.

Гиря 2 находится на поверхности стола, а гиря 1 свешивается со стола. Коэффициент трения гири 2 о стол $\mu = 0{,}1$. Найти ускорение, с которым движутся гири, и силы натяжения T1 и T2 нитей. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь.

4.29. Однородный цилиндр массы M и радиуса R вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием груза массы m, прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр. Найти угол φ поворота цилиндра в зависимости от времени, если при $t = 0$ $\varphi = 0$.

4.30. На краю свободно вращающегося большого горизонтального диска, имеющего радиус R и момент инерции J, стоит человек массой m. Диск совершает ν об/мин. Как изменится скорость вращения диска и энергия системы, если человек перейдет от края диска к центру? Размерами человека по сравнению с радиусом диска пренебречь.

4.31. Диск массой m = 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $\upsilon = 4$ м/с. Найти кинетическую энергию диска.

4.32. Шар диаметром D = 6 см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая $\nu = 4$ об/с. Масса шара m = 0,25 кг. Найти кинетическую энергию шара.

4.33. Шар массой m = 1 кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $\upsilon1 = 10$ см/с, после удара $\upsilon2 = 8$ см/с. Найти количество тепла Q, выделившееся при ударе.

4.34. Найти кинетическую энергию велосипедиста, едущего со скоростью $\upsilon = 9$ км/ч. Масса велосипедиста вместе с велосипедом m = 78 кг, причем на колеса приходится m1 = 3 кг. Колеса велосипедиста считать обручами.

4.35. Мальчик катит обруч по горизонтальной поверхности со скоростью $\upsilon = 7{,}2$ км/ч. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

4.36. По наклонной плоскости, образующей угол φ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный диск. Найти линейное ускорение центра диска.

4.37. С одного уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться сплошной цилиндр и шар одинаковых радиусов. Определить: а) какое тело будет иметь большую скорость на данном уровне и во сколько раз? б) во сколько раз скорость одного будет больше скорости другого в данный момент времени?

4.38. Шар и сплошной цилиндр, двигаясь с одинаковой скоростью, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое из их поднимется выше? Найти отношение высот подъема.

4.39. Обод массой m = 2 кг и внешним радиусом R = 5 см скатывается по наклонной плоскости длиной l = 2 м и углом наклона α = 30°. Определить его момент инерции относительно оси вращения, если скорость в конце наклонной плоскости υ = 3,3 м/с.

4.40. Сплошной шар скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту. Каково ускорение центра масс шара?

4.41. Бревно высоты h = 3 м и массы m = 50 кг начинает падать из вертикального положения на землю. Определить скорость верхнего конца и момент импульса бревна в момент его падения на землю.

4.42. На краю диска, который может вращаться вокруг вертикальной оси стоит человек массой m_1= 65 кг. На какой угол φ повернется скамья, если человек пойдет по краю диска и вернется в исходную точку? Масса диска равна m_2 = 200 кг. Момент инерции J человека рассчитывать, как для материальной точки.

4.43. Однородный стержень длиной l = 1 м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол α надо отклонить стержень, чтобы нижний конец стержня при прохождении положения равновесия имел скорость υ = 5 м/с?

4.44. Шар, подвешенный на тонкой спице длины l, отклонен от положения равновесия на угол 90° и отпущен. Какую скорость будет иметь центр тяжести шара в момент прохождения им положения равновесия, если диаметр шара равен длине спицы?

4.45. Однородный тонкий тяжелый стержень длины l висит на горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Какую начальную угловую скорость надо сообщить стержню, чтобы он повернулся на угол α = 180°?

4.46. Стержень длины l, который может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов, под действием силы тяжести переходит из горизонтального положения в вертикальное. Определить угловую и линейную скорости нижней точки стержня в этот момент.

4.47. Тело массой M подвешено на нити длиной l. В тело попадает пуля массой m и застревает в нем, нить при этом отклоняется на угол α. Найти скорость υ и кинетическую энергию пули. Считать, что вся масса тела M сосредоточена на расстоянии l от точки подвеса.

4.48. Пуля массой $m = 50$ г, двигаясь со скоростью $\upsilon = 100$ м/с, ударяется о выступ покоящегося зубчатого колеса, момент инерции которого $J = 0{,}2$ кг·м^2. Расстояние от точки попадания пули до оси вращения $R = 30$ см. Определить угловую скорость колеса, считая удар неупругим. Пуля двигалась в плоскости вращения колеса.

4.49. В конец стержня, массой M и длиной l, подвешенного за один из его концов, попадает пуля массой m, летящая со скоростью υ, и застревает в нем. Определить угловую скорость вращения стержня.

4.50. Обруч, вся масса которого сосредоточена в ободе, раскрутили до угловой скорости ω и поставили на шероховатую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Найти время, в течение которого обруч будет подниматься вверх по плоскости. Радиус обруча R.

5. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

5.1. Давление в жидкости и газе

Свойства жидкостей и газов во многом отличаются, однако в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому в гидромеханике – разделе физики, изучающем равновесие и движение жидкостей и газов, а также взаимодействие жидкостей и газов с твердыми телами, – используют единый подход к рассмотрению жидкостей и газов. Конкретное строение жидкости или газа в гидромеханике не учитывается, и они рассматриваются как сплошные среды, непрерывно распределенные в пространстве. К сильно разряженным газам модель сплошной среды неприменима.

Отличительной особенностью жидкостей и газов является их текучесть, которая связана с малостью сил трения при относительном движении соприкасающихся слоев. При бесконечном уменьшении скорости относительного движения слоев, силы трения между ними стремятся к нулю. Этим объясняется отсутствие сил трения покоя в жидкостях и газах.

В отличие от твердых тел, жидкости и газы не сохраняют своей формы, а принимают форму того сосуда, в который они заключены. Жидкости от газов отличаются наличием поверхностного слоя, большей плотностью при одних и тех же условиях и характером зависимости плотности от давления (практическая несжимаемость жидкостей и заметная сжимаемость газов). В гидроаэромеханике для жидкостей и газов обычно пользуются единым термином «жидкость», а в тех случаях, когда плотность жидкости или газа всюду одинакова и не изменяется со временем – несжимаемая жидкость.

Изменению объема сплошной среды препятствуют силы упругости. Поскольку взаимодействия жидкостей с твердыми телами осуществляются не в отдельных точках, а по площади, причем силы упругости всегда перпендикулярны к рассмотренным площадям, эти взаимодействия в гидроаэромеханике характеризуются давлением. Давление p жидкости определяется нормальной (перпендикулярной) силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{5.1}$$

Давление – скалярная величина, не зависящая от ориентации площадки ΔS. Единица давления – паскаль (Па): 1 Па = 1 Н/м^2.

При отсутствии объемных сил в состоянии равновесия давление подчиняется закону Паскаля: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям ($p = \text{const}$), причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

При наличии объемных сил, таких, как сила тяжести, за счет веса вышележащих слоев жидкости появляется зависимость давления от высоты. В этом случае давление по горизонтали, т.е. во всех точках жидкости, лежащих на одном уровне, имеет одинаковую величину. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. По вертикали давление изменяется линейно с высотой, причем

$$p - p_0 = \rho g h,$$

где ρ – плотность жидкости; p_0 – давление на верхнем (внешнем) уровне ($h = 0$); p – давление на уровне, имеющем глубину h. Давление $\rho g h$ называют гидростатическим давлением.

Поскольку сила давления в нижних слоях жидкости больше, чем в верхних, на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила Архимеда:

$$F_A = \rho V g, \tag{5.2}$$

где ρ – плотность жидкости; V – объем погруженной в жидкость части тела. Выталкивающая сила численно равна весу жидкости, вытесненной телом, и приложена в центре тяжести объема погруженной части тела.

5.2. Уравнение неразрывности

Движение (течение) жидкости называется стационарным, если в заданных точках пространства скорость жидкости не зависит от времени. При этом в разных точках пространства скорости жидкости могут быть неодинаковыми. Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства. Линии тока проводятся так, чтобы их густота была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. При стационарном течении жидкости линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют трубкой тока. Жидкость, протекающую по всей совокупности трубок тока, называют потоком. При стационарном течении жидкости трубки тока со временем не изменяются по форме, и частицы жидкости при движении не выходят за пределы определенных трубок тока.

При стационарном течении масса жидкости, проходящей через любое поперечное сечение трубки тока за единицу времени, остается неизменной. Жидкость не скапливается в отдельных частях трубки тока, не образует пустот и не переходит в соседние трубки тока. Это позволяет написать уравнение неразрывности для стационарного течения жидкости:

$$\rho \upsilon S = \mathrm{const}; \quad \rho_1 \upsilon_1 S_1 = \rho_2 \upsilon_2 S_2, \tag{5.3}$$

где ρ – плотность жидкости; υ – модуль скорости жидкости в произвольном поперечном сечении трубки тока площадью S.

Если жидкость несжимаема, то плотность ρ во всех сечениях трубки тока одна и та же ($\rho = \mathrm{const}$) и уравнение неразрывности струи принимает вид:

$$\upsilon S = \mathrm{const}; \quad \upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2.$$

Следовательно, при установившемся течении поток жидкости сквозь поперечное сечение струи не зависит от местоположения этого сечения.

5.3. Уравнение Бернулли

Если перемещение одних частей жидкости относительно других не связано с возникновением сил внутреннего трения, т.е. вязкость отсутствует, жидкость называется идеальной. Следствием закона сохранения механической энергии для стационарного течения несжимаемой невязкой жидкости по трубе тока является уравнение Бернулли:

$$p + \rho g h + \frac{\rho \upsilon^2}{2} = \text{const}, \qquad (5.4)$$

где ρ – плотность жидкости; υ – модуль скорости течения жидкости в сечении трубки тока, находящемся на высоте *h* от условно выбранного уровня; *p* – давление в том же сечении трубки тока.

Это уравнение играет фундаментальную роль в гидродинамических исследованиях, оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина *p* в уравнении Бернулли называется статическим давлением, величина $\rho\upsilon^2/2$ – динамическим давлением (скоростным напором), а величина $\rho g h$ представляет собой гидростатическое давление.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$) выражение принимает вид

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + p = \text{const}.$$

Из этого уравнения следует, что в тех сечениях трубки тока, где скорость жидкости больше, статическое давление меньше, а в тех сечениях, где скорость жидкости уменьшается, статическое давление возрастает. Это явление, в частности, положено в основу работы водоструйного насоса.

С помощью уравнения Бернулли и уравнения неразрывности можно рассчитать скорость истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Если площадь отверстия мала, скорость истечения находится по формуле Торричелли:

$$\upsilon = \sqrt{2gh},$$

где *h* – расстояние от отверстия до поверхности жидкости.

5.4. Вязкость

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Сила внутреннего трения F тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя S, и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, перпендикулярно скорости течения слоев. Величина $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоев, и называется градиентом скорости. Таким образом, модуль силы внутреннего трения равен

$$F = \eta \left| \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \right| S, \tag{5.5}$$

где коэффициент пропорциональности η, зависящий от природы жидкости, называется динамической вязкостью (или просто вязкостью). Единицей измерения динамической вязкости является паскаль-секунда ($\text{Па} \cdot \text{с}$), $1\ \text{Па} \cdot \text{с} = 1\ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$.

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

5.5. Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется ламинарным (слоистым), если, вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и турбулентным (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При ламинарном движении объем жидкости (газа), протекающий за время t через капиллярную трубку радиусом r и длиной l под действием разности давлений Δp на концах трубки определяется формулой Пуазейля:

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta}, \tag{5.6}$$

Это соотношение может быть использовано для нахождения динамической вязкости η.

Другой метод изменения вязкости основан на определении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы. Установленная Стоксом формула

$$F = 6\pi\eta\upsilon r \tag{5.7}$$

позволяет рассчитать силу сопротивления, которую испытывает равномерно падающий со скоростью υ в вязкой жидкости (газе) шарик радиусом r. Учет этой силы наряду с силой тяжести и силой Архимеда позволяет для случаев ламинарного движения рассчитать вязкость η.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, их скорости в различных слоях внутри мало различаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Профиль усредненной скорости при турбулентном течении в трубах отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения. Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\upsilon D}{\eta} = \frac{\upsilon D}{\nu}, \tag{5.8}$$

где $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – кинематическая вязкость, измеряемая в квадратных метрах в секунду (м^2/с); ρ – плотность жидкости; η – динамическая вязкость;

υ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; D – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($Re < 1000$) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области $1000 > Re > 2000$, а при $Re = 2300$ (для гладких труб) течение – турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

5.6. Движение тел в жидкостях и газах

На тело, движущееся в жидкости или газе, действуют две силы (равнодействующую их обозначим $\boldsymbol{R}$), одна из которых ($\boldsymbol{Q}$) направлена в сторону, противоположную движению тела (в сторону потока), – это лобовое сопротивление, а вторая ($\boldsymbol{P}$) перпендикулярна этому направлению – подъемная сила (рис. 5.1)

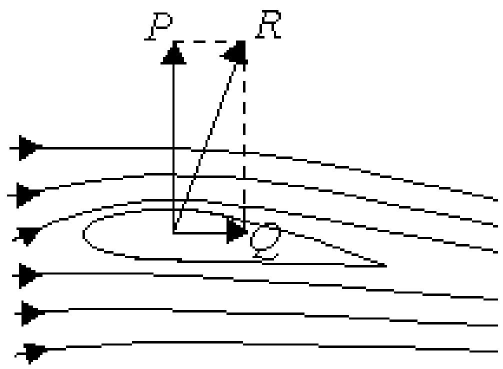


Рис. 5.1

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то на него действует только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае равна нулю. Можно доказать, что в идеальной жидкости равномерное движение происходит без лобового сопротивления.

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости (особенно при увеличении скорости обтекания). Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к поверхности тела, образуется пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы (нет плавно утончающейся хвостовой части), то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности. За телом возникает течение жидкости (газа), направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны.

Вихри уносятся потоком и постепенно затухают вследствие трения; при этом энергия вихрей расходуется на нагревание жидкости. Давление в образующейся за телом вихревой области оказывается пониженным, поэтому результирующая сил давления будет отлична от нуля, в свою очередь обуславливая лобовое сопротивление.

Таким образом, лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется значением числа Рейнольдса (5.8). При малых Re (т.е. при малых υ и l) основную роль играет сопротивление трения, а сопротивлением давления можно пренебречь, причем с ростом вязкости относительная роль сил трения возрастает. По мере увеличения Re роль сопротивления давления возрастает. При больших значениях Re в лобовом сопротивлении преобладают силы давления.

При данных поперечных размерах тела сопротивление давления сильно зависит от формы тела. По этой причине его называют также сопротивлением формы. Наименьшим сопротивлением давления обладают тела хорошо обтекаемой каплевидной формы. Такую форму стремятся придать фюзеляжу и крыльям самолетов, кузову автомобилей и т.п.

Для возникновения подъемной силы вязкость жидкости не имеет существенного значения. На рис. 5.2 показаны линии тока при обтекании идеальной жидкостью полуцилиндра. Вследствие полного обтекания линии тока будут симметричны относительно прямой *CD*. Однако относительно прямой *AB* картина будет несимметричной. Линии тока сгущаются вблизи точки *C*, поэтому давление здесь будет меньше, чем вблизи точки *D*, и возникает подъемная сила *P*. Аналогичным образом возникает подъемная сила и в вязкой жидкости.

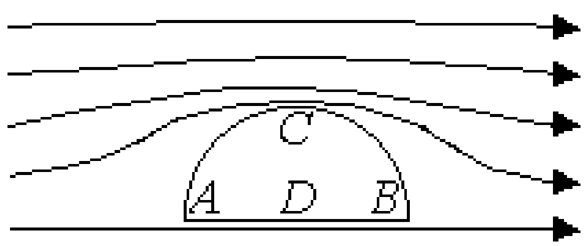


Рис. 5.2

Силой, поддерживающей самолет в воздухе, служит подъемная сила, действующая на его крылья. Лобовое сопротивление играет при полете самолета вредную роль. Поэтому крыльям самолета и его фюзеляжу придают хорошо обтекаемую форму. Профиль крыла должен вместе с тем обеспечить достаточную по величине подъемную силу.

5.7. Примеры решения задач

Задача 5-1. Для определения плотности неизвестной жидкости однородное тело подвесили на динамометре в этой жидкости, а затем в вакууме и в воде. Оказалось, что тело, находясь в жидкости, растягивает пружину динамометра с силой $T_ж$ = 1,66 Н, в вакууме – с силой T = 1,8 Н, а в воде – с силой T_0 = 1,6 Н. Найти плотности жидкости $\rho_ж$ и тела $\rho_т$.

Решение.

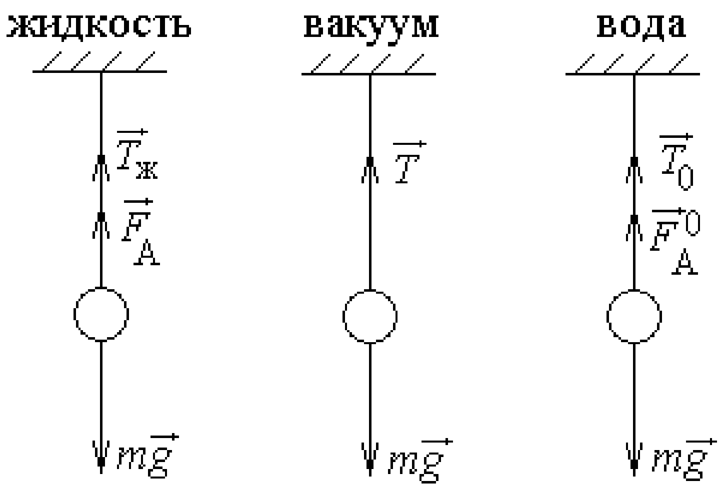


Рис. 5.3

Силы, действующие на подвешенное тело, указаны на рис. 5.3, причем силы Архимеда, действующие только в жидкости $F_А$ и в воде $F_А^0$, определяются соотношениями:

$$F_А = \rho_ж V g, \quad F_А^0 = \rho_0 V g,$$

где $\rho_ж$ и ρ_0 – плотности жидкости и воды, V – объем подвешенного тела. Условия равновесия тела во всех трех средах приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} T_ж + \rho_ж V g = \rho_т V g, \\ T = \rho_т V g, \\ T_0 + \rho_0 V g = \rho_т V g. \end{cases}$$

Здесь учтено, что масса тела связана с его плотностью соотношением $m = \rho_т V$.

Искомое решение имеет вид

$$\rho_ж = \frac{(T - T_ж)\rho_0}{T - T_0} = 0{,}7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_т = \frac{T\rho_0}{T - T_0} = 9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 5-2. В дне цилиндрического сосуда имеется круглое отверстие диаметром d = 1 см. Диаметр сосуда D = 0,5 м. Найти зависимость скорости υ понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найти численное значение этой скорости для высоты h = 0,2 м.

Решение. Обозначим $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ – площадь поперечного сечения сосуда и υ – скорость течения воды в нем (искомая скорость понижения уровня воды в сосуде); $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения отверстия и u – скорость вытекания воды из отверстия. Используя уравнение Бернулли

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho u^2}{2},$$

получаем соотношение, связывающее скорости и высоту:

$$\upsilon^2 + 2gh = u^2.$$

В силу уравнения неразрывности

$$\upsilon S_1 = u S_2$$

скорость u можно заменить соотношением $u = \upsilon S_1 / S_2 = \upsilon D^2 / d^2$, и тогда

$$\upsilon^2 + 2gh = \frac{\upsilon^2 D^4}{d^4}.$$

Решая полученное уравнение, для скорости υ имеем

$$\upsilon = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

При h = 0,2 м численное значение скорости равно $\upsilon = 8 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Задача 5-3. Пробковый шарик радиуса r = 5 мм всплывает в сосуде, заполненном касторовым маслом. Плотность пробки $\rho_П = 0{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность касторового масла $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Чему равны динамическая и кинематическая вязкости касторового масла в условиях опыта, если шарик всплывает с постоянной скоростью υ = 3,5 см/с?

Решение. При равномерном движении шарика вверх сила Архимеда $F_А$, также направленная вверх, уравновешивается силой тяжести mg и силой сопротивления Стокса F, причем

$$F_А = \rho V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad F = 6\pi\eta\upsilon r.$$

Итак, имеем соотношение

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta\upsilon r + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_П g,$$

из которого находим динамическую вязкость:

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_n) g r^2}{9\upsilon} = 1{,}09 \text{ Па·с},$$

а затем и кинематическую вязкость:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = 1{,}21 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2\text{/с}.$$

Задача 5-4. В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом R = 2 см вставлен горизонтальный капилляр внутренним радиусом r = 1 мм и длиной l = 2 см. В сосуд налито касторовое масло, имеющее динамическую вязкость η = 1,2 Па·с и плотность ρ = 0,9·103 кг/м3. Найти зависимость скорости υ понижения уровня касторового масла в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром. Определить численное значение этой скорости при h = 26 см.

Решение. Скорость понижения уровня касторового масла в сосуде зависит от скорости протекания масла через капилляр. Объем масла, протекающего за время t через капилляр, определяется формулой Пуазейля:

$$V = \frac{\pi r^4 t\Delta p}{8l\eta}.$$

Разность давлений на концах капилляра в данном случае обусловлена гидростатическим давлением слоя жидкости, а именно

$$\Delta p = \rho g h.$$

С другой стороны, указанный объем связан со скоростью протекания υ_1 масла через капилляр:

$$V = \pi r^2 \upsilon_1 t.$$

Сравнивая эти соотношения, для скорости υ_1 имеем:

$$\upsilon_1 = \frac{r^2 \rho g h}{8l\eta}.$$

Из уравнения неразрывности струи следует:

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon S, \quad \upsilon_1 r^2 = \upsilon R^2,$$

поэтому окончательное выражение для скорости υ понижения уровня в сосуде имеет вид:

$$\upsilon = \frac{r^4 \rho g h}{8l\eta R^2}.$$

Численное значение υ при h = 26 см равно

$$\upsilon = 3\cdot10^{-5} \text{ м/с}.$$

Задача 5-5. Стальной шарик ($\rho_с = 7{,}7\cdot10^3$ кг/м^3) падает в широком сосуде, заполненном трансформаторным маслом ($\eta = 0{,}8$ Па·с, $\rho_м = 0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3).Считая, что закон Стокса имеет место при $Re \leq 0{,}5$, найти предельное значение диаметра шарика.

Решение. Число Рейнольдса определяется соотношением:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{\text{м}} \upsilon D}{\eta},$$

где D – характерный линейный размер, в качестве которого в данном случае может быть взят диаметр шарика d, т.е. $d = D$. Для нахождения предельного значения диаметра шарика необходимо рассчитать установившуюся скорость υ шарика. Следуя задаче 5-3, для расчета скорости υ может быть получено соотношение:

$$\upsilon = \frac{2(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{м}}) g r^2}{9\eta}.$$

Учитывая, что $r = d/2$, окончательно получим:

$$d^3 = \frac{18\,\mathrm{Re}\,\eta^2}{\rho_{\text{т}}(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{м}})g}, \quad d = \sqrt[3]{\frac{18\,\mathrm{Re}\,\eta^2}{\rho_{\text{т}}(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{м}})g}} = 4{,}6 \text{ мм}.$$

5.8. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

5.1. Какие вопросы изучаются в гидромеханике? Какими моделями пользуются в этом разделе?

5.2. Что такое давление? Как формулируется закон Паскаля?

5.3. Что является причиной возникновения выталкивающей силы Архимеда? Как она находится?

5.4. Что называют линией тока? трубкой тока?

5.5. Каков физический смысл уравнения неразрывности для стационарного течения несжимаемой жидкости?

5.6. Как записывается уравнение Бернулли и следствием чего оно является?

5.7. Как находится статическое давление? динамическое давление? гидростатическое давление?

5.8. К чему приводит наличие вязкости у реальных жидкостей?

5.9. Как определяются динамическая и кинематическая вязкости и что они характеризуют?

5.10. Как зависит вязкость от температуры?

5.11. Чем отличается ламинарное течение жидкости от турбулентного?

5.12. Что характеризует число Рейнольдса и как оно определяется?

5.13. Какие соотношения и каким образом могут быть использованы для расчета вязкости?

5.14. Каковы причины возникновения лобового сопротивления?

5.15. Как объясняется возникновение подъемной силы?

5.16. До какой высоты h нужно налить однородную жидкость в цилиндрический сосуд, чтобы сила, с которой жидкость будет давить на боковую поверхность сосуда, была равна силе давления на дно сосуда?

5.17. Вес тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

5.18. В сосуд с водой вставлена трубка с площадью поперечного сечения $S = 2$ см^2. В трубку налили $m = 72$ г масла. Плотность масла $\rho_м = 900$ кг/м^3. Найти разность уровней масла и воды.

5.19. Полый шар, наружный объем которого равен V, плавает наполовину погруженный в воду. Плотность воды равна ρ_0, плотность материала шара $\rho_ш$. Найти объем полости шара. $V_п$.

5.20. Динамометр, к которому подвешен кусок сплава, состоящий из меди и серебра показывает в воздухе $T_1 = 2{,}71$ Н, а в воде $T_2 = 2{,}41$ Н. Определить массу меди $m_м$ и серебра $m_с$ в этом куске. Плотность меди $\rho_м = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, серебра $\rho_с = 10{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

5.21. Полый шар из алюминия, находясь в воде, растягивает пружину динамометра с силой $T_1 = 0{,}25$ Н, а в бензине – с силой $T_2 = 0{,}33$ Н. Найти объем полости, если плотность алюминия $\rho_А = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, бензина $\rho_б = 0{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3.

5.22. Какое давление создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вытекает из него со скоростью $\upsilon = 25$ м/с? Плотность краски $\rho = 800$ кг/м^3.

5.23. В бочку заливается вода со скоростью $Q = 200$ см^3/с. На дне бочки образовалось отверстие площадью поперечного сечения $S = 0{,}8$ см^2. Пренебрегая вязкостью воды, определить уровень воды в бочке.

5.24. Бак цилиндрической формы площадью основания $S_0 = 10$ м^2 и объемом $V = 100$ м^3 заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время, необходимое для полного опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью $s = 8$ см^2.

5.25. Определить работу, которая затрачивается на преодоление трения при перемещении воды объемом $V = 1{,}5$ м^3 в горизонтальной трубе от сечения с давлением $p_1 = 40$ кПа до сечения с давлением $p_2 = 20$ кПа.

5.26. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром $d = 0{,}3$ мм, если динамическая вязкость воздуха равна $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Па·с?

5.27. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в четыре раза больше плотности материала шарика. Определить отношение силы трения, действующей на всплывающий шарик, к его весу.

5.28. Смесь свинцовых дробинок (плотность $\rho_с = 11{,}3\cdot10^3$ кг/м^3) диаметром 4 и 2 мм одновременно опускают в широкий сосуд глубиной $h = 1{,}5$ м с глицерином ($\rho_г = 1{,}26\cdot10^3$ кг/м^3, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па·с). Определить, на сколько больше времени потребуется дробинкам меньшего размера, чтобы достичь дна сосуда.

5.29. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр внутренним диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 1{,}2$ см. Через капилляр вытекает касторовое масло ($\rho = 960$ кг/м^3, динамическая вязкость $\eta = 0{,}99$ Па·с), уровень которого в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 30$ см выше капилляра. Определить время, которое требуется для протекания через капилляр $V = 10$ см^3 масла.

5.30. С мостика, переброшенного через канал, по которому течет вода, опущена узкая изогнутая трубка, обращенная открытым концом навстречу течению. Вода в трубке поднимается на высоту $h = 150$ мм над уровнем воды в канале. Определить скорость υ течения воды.

5.31. Какова скорость υ истечения жидкости из отверстия в стенке сосуда, если высота уровня жидкости над отверстием $h = 4{,}9$ м? Вязкость жидкости не учитывать.

5.32. Цистерна наполнена водой ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3) и нефтью ($\rho_н = 0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3). Какова будет вначале скорость υ истечения воды из отверстия в дне, если высота слоя воды $h_1 = 1$ м, а слоя нефти $h_2 = 4$ м? Вязкостью пренебречь.

5.33. Широкий сосуд с небольшим отверстием в дне заполнен водой ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3) и керосином ($\rho_к = 0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3). Пренебрегая вязкостью, найти скорость вытекания воды, если толщина слоя воды $h_1 = 30$ см, а слоя керосина $h_2 = 20$ см.

5.34. Найти скорость течения по трубе углекислого газа, если известно, что за полчаса через поперечное сечение трубы протекает $m = 0{,}51$ кг газа. Плотность газа принять равной $\rho = 7{,}5$ кг/м^3. Диаметр трубы равен $d = 2$ см.

5.35. Считая, что ламинарность движения жидкости (или газа) в цилиндрической трубе сохраняется при $\mathrm{Re} \le 3000$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр трубы), показать, что условия задачи 5.34 соответствуют ламинарному движению. Кинематическую вязкость газа принять равной $\nu = 1{,}33\cdot10^{-6}$ м^2/с. Газ считать идеальной несжимаемой жидкостью.

6. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6.1. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

В классической механике справедлив механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Для его доказательства рассматривают две инерциальные системы отсчета – неподвижную систему K (с координатными осями x, y, z) и движущуюся относительно нее равномерно и прямолинейно с некоторой скоростью $\upsilon_0 = \text{const}$ систему K' (с координатными осями x', y', z'). Отсчет времени начинают с момента, когда начала координат обеих систем совпадают (см. рис. 6.1).

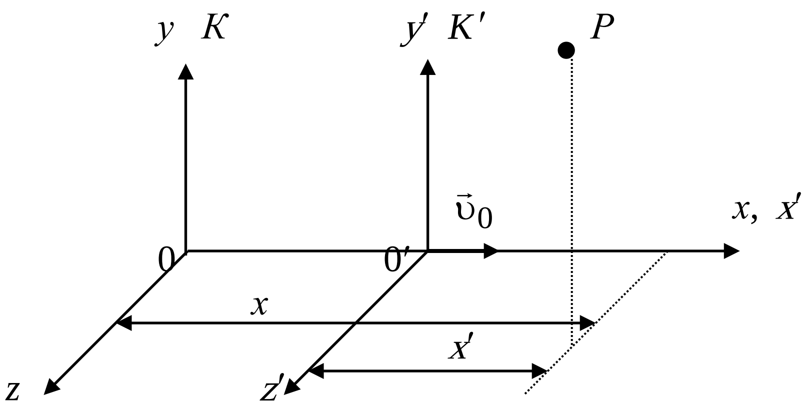


Рис. 6.1

Положение некоторой произвольной точки P может быть определено как по отношению к системе K, так и по отношению с системе K', причем между координатами x, y, z и x', y', z' рассматриваемой точки имеется связь:

$$x = x' + \upsilon_0 t, \qquad y = y', \qquad z = z'.$$

В классической механике предполагается, что время в обеих системах течет одинаковым образом, т.е. $t = t'$. Совокупность четырех уравнений:

$$x = x' + \upsilon_0 t, \quad z = z',$$
$$y = y', \qquad t = t'. \tag{6.1}$$

называется преобразованиями Галилея. Эти соотношения справедливы лишь в рамках классической механики, т.е. при скоростях, много меньших скорости света ($\upsilon_0 << c$).

Для нахождения скоростей, с которыми движется точка P в обеих системах координат, преобразования Галилея дифференцируют по времени, и тогда

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + \upsilon_0, \qquad \upsilon_y = \upsilon'_y, \quad \upsilon_z = \upsilon'_z,$$

что эквивалентно векторному соотношению

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0, \tag{6.2}$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость относительно неподвижной системы отсчета, $\vec{\upsilon}'$ – относительно движущейся.

Это уравнение представляет собой правило сложения скоростей в классической механике; оно справедливо при любом выборе взаимных направлений координатных осей.

Продифференцировав последнее соотношение по времени, найдем связь ускорений $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ относительно обеих систем. Если, как предполагалось, $\vec{\upsilon}_0 = \text{const}$, то

$$\vec{a} = \vec{a}', \tag{6.3}$$

т.е. ускорение в двух произвольно выбранных инерциальных системах отсчета одинаково. Следовательно, силы, действующие на тело, в силу второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ в обеих системах отсчета будут одинаковыми. Отсюда вытекает механический принцип относительности: уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, т.е. они являются инвариантными по отношению к преобразованиям координат. С механической точки зрения все инерциальные системы совершенно эквивалентны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другой. Практически это проявляется в том, что никакими механическими опытами нельзя установить, находится ли система отсчета в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения.

6.2. Постулаты специальной теории относительности

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макротел, движущихся с малыми скоростями ($\upsilon \ll c$). Однако в конце XIX века выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным. Из экспериментов также следовало, что скорости света, измеренные в двух движущихся друг относительно друга системах, равны, что противоречило правилу сложения скоростей классической механики.

Возникли затруднения и при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Было показано, что классическая теория противоречит уравнениям Максвелла, лежащим в основе понимания света как электромагнитной волны.

Создать новую теорию, названную специальной теорией относительности, содержащую классическую механику как предельный случай для малых скоростей ($\upsilon \ll c$) удалось А. Эйнштейну в 1905 году. Основу этой теории образуют два постулата, которые носят названия принципа относительности Эйнштейна и принципа постоянства скорости света.

Принцип относительности Эйнштейна является распространением механического принципа относительности Галилея на все физические явления. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, а значит, все физические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково. Уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой.

Принцип постоянства скорости света утверждает, что скорость света в пустоте одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света. Постоянство скорости света – фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт.

Скорость света *c* – скорость распространения электромагнитного излучения любой частоты в вакууме – является предельной скоростью; никаким способом нельзя передать сигнал со скоростью, большей *c*. Величина скорости света не зависит от того, относительно какой системы отсчета она определяется. Скорость света в вакууме равна

$$c = 2{,}997925 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

даже если системы отсчета движутся друг относительно друга (например, навстречу). Кроме того, скорость света c – одна из основных физических постоянных, так как входит в уравнения теории поля Максвелла.

Из сформулированных выше постулатов вытекает ряд важных выводов, касающихся свойств пространства и времени. В классической механике пространство и время рассматривались независимо друг от друга. Ньютон считал, что существует абсолютное пространство – безотносительное к чему-либо вместилище вещей, всегда одинаковое и неподвижное. Абсолютное время существует само по себе, течет равномерно, безотносительно к чему-либо внешнему.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречили принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установили новый взгляд на мир и новые пространственно-временные представления. Следствия из релятивистской теории Эйнштейна находят надежное экспериментальное подтверждение, являясь тем самым обоснованием специальной теории относительности.

6.3. Относительность одновременности

В классической механике считалось совершенно очевидным, что два события, одновременные в какой-либо системе отсчета, будут одновременными и во всех остальных системах отсчета. Однако это утверждение находится в противоречии с принципом постоянства скорости света. В этом можно убедиться, рассмотрев процесс распространения светового сигнала в двух инерциальных системах отсчета, одна из которых (K) – неподвижная, а другая (K') движется относительно нее с некоторой скоростью $\vec{\upsilon}_0$ (см. рис. 6.2)

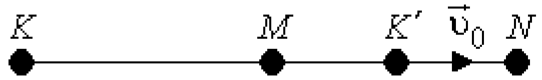


Рис. 6.2

Рассмотрим в обеих системах один и тот же процесс – испускание из K' светового сигнала и его попадание в точки M и N, жестко связанные с движущейся системой K' и находящиеся от K' на одинаковом расстоянии. Так как скорость света во всех направлениях одинакова, в системе K' свет достигнет точек *M* и *N* одновременно. В неподвижной системе *К* свет также распространяется со скоростью *с*, но точка *M* движется навстречу, а точка *N* – в ту же сторону, что и световой сигнал. Поэтому точки *M* сигнал достигнет раньше, чем точки *N*. Итак, события, которые в системе K' были одновременными, в системе *К* оказываются неодновременными. Отсюда вытекает, что время в разных системах отсчета течет неодинаковым образом (т.е. $t \neq t'$).

Постоянство скорости света приводит к тому, что пространство и время оказываются взаимосвязанными, образуя единое пространство – время. Эта взаимосвязь может быть представлена с помощью четырехмерного пространства, по трем осям которого откладываются пространственные координаты *x*, *y*, *z*, а по четвертой оси – время *t* (точнее пропорциональная *t* временная координата *ct*, имеющая размерность пространственной координаты).

6.4. Преобразования Лоренца

В классической механике переход от одной инерциальной системе к другой (см. рис. 6.1) осуществляется с помощью преобразований Галилея:

$$K \to K' \qquad\qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x' = x - \upsilon_0 t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = x' + \upsilon_0 t, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases} \tag{6.4}$$

из которых, как было показано в п.6.1, вытекает правило сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\upsilon}_0 .$$

Это правило находится в противоречии с принципом постоянства скорости света, так как если $\upsilon_0 = c$, $\upsilon = c + \upsilon' > c$. Поэтому в теории относительности эти преобразования должны быть заменены другими, которые не будут противоречить принципу постоянства скорости света, а в классическом случае $\upsilon << c$ совпадут с преобразованиями Галилея.

Такие преобразования, найденные Лоренцем, имеют вид

$$K \to K' \qquad\qquad\qquad\qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \upsilon_0 x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \upsilon_0 x' / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\beta = \frac{\upsilon_0}{c}.$$

В этих преобразованиях пространственные и временные координаты оказываются взаимосвязанными, что приводит к парадоксальным с классической точки зрения следствиям.

6.5. Одновременность событий в разных системах отсчета

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в момент времени t_0 одновременно происходят два события. В системе K' этим событиям будут соответствовать моменты времени:

$$t_1' = \frac{t_0 - (\beta / c)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2' = \frac{t_0 - (\beta / c)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Итак, если события пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), в системе K' они не будут одновременными ($t_1' \neq t_2'$). Знак разности $t_2' - t_1'$ определяется знаком выражения $(\beta / c)(x_1 - x_2)$. В разных системах K' эта разность будет различна по величине и отличаться по знаку. Это означает, что в одних системах событие 1 будет предшествовать событию 2, а в других наоборот. Причинно связанные события (например, бросание камня и падение его на землю) ни в одной из систем отсчета не будут одновременными, и во всех системах отсчета событие, являющееся причиной, будет предшествовать следствию.

6.6. Длина тел в разных системах отсчета (сокращение длины)

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K'. Его длина в этой системе равна

$$l_0 = x_2' - x_1'.$$

Относительно системы K стержень двигается со скоростью υ_0. Для определения его длины в этой системе $l_0 = x_2 - x_1$ находят координаты его концов в один и тот же момент времени t_0 и тогда,

$$l_0 = \frac{x_2 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Следовательно,

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2},$$

т.е. длина стержня l, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины l_0, измеренной в системе, относительно которой он покоится, т.е. наблюдается так называемое лоренцево сокращение длины. Максимальную длину стержень имеет в той инерциальной системе отсчета, относительно которой он покоится. В направлениях y и z размеры стержня одинаковы во всех системах отсчета.

Итак, у движущихся тел их размеры в направлении движения сокращаются тем больше, чем больше скорость движения.

6.7. Длительность событий в разных системах отсчета (замедление времени)

Пусть в некоторой точке (с координатой x), покоящейся относительно системы K, происходит событие, длительность которого $\tau = t_2 - t_1$. Длительность этого же события в движущейся системе K' равна

$$\tau' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда вытекает, что $\tau' > \tau$, т.е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов.

Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем. Собственное время всегда меньше, чем время, отсчитанное по часам, движущимся относительно тела.

6.8. Релятивистский закон сложения скоростей

Правило сложения скоростей классической механики:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0$$

противоречит, как было указано ранее, принципу постоянства скорости света. Для нахождения релятивистского закона сложения скоростей используют преобразования Лоренца. Общий вид соотношения оказывается достаточно громоздким и потому здесь не приводится.

В частном случае, когда точка движется параллельно оси *x*, релятивистский закон сложения скоростей принимает вид:

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + \upsilon_0}{1 + \upsilon_0 \upsilon' / c^2},$$

где υ – скорость относительно неподвижной системы отсчета, υ' – относительно движущейся. В предельном случае малых скоростей $(\upsilon_0, \upsilon' << c)$ знаменатель превращается в единицу и релятивистский закон, как и следовало ожидать, переходит в классический.

Релятивистский закон сложения скоростей находится в согласии с постулатами Эйнштейна. Действительно, если $\upsilon' = c$, формула для скорости примет вид

$$\upsilon = \frac{c + \upsilon_0}{1 + \upsilon_0 c / c^2} = c,$$

т.е. скорость света в обеих системах одна и та же. Даже, если система движется со скоростью *c*, т.е. $\upsilon' = c$ и $\upsilon_0 = c$, скорость света в другой системе также равна *c*: $\upsilon = c$. Итак, скорость света в вакууме – это предельная скорость, которую невозможно превысить.

6.9. Интервал между событиями

Относительность длин и промежутков времени в теории Эйнштейна означает относительность отдельных компонентов некоторой физической величины, не зависящей от системы отсчета, т.е. являющейся инвариантной по отношению к преобразованиям координат (преобразованиям Лоренца). В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами x, y, z, ct, такой физической величиной является интервал между двумя событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}, \quad (6.7)$$

где l_{12} – расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли, t_{12} – соответствующий временной промежуток. В релятивистской механике ни l_{12}, ни t_{12}, сами по себе инвариантами не являются, инвариантом будет только интервал s_{12}.

Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность длин и промежутков времени, течение событий носит объективный характер и не зависит от системы отсчета. Кроме того, инвариантность интервала свидетельствует о том, что пространство и время органически связаны между собой и образуют единую форму существования материи – пространство – время.

6.10. Релятивистское выражение для импульса

На простейшем примере столкновения двух одинаковых шаров массой m_0, движущихся навстречу друг другу с одинаковой скоростью $\vec{\upsilon}$, можно показать, что закон сохранения импульса (где импульс $\vec{p}$ определяется классической формулой $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$) не является инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца. Поэтому должно быть найдено такое выражение для релятивистского импульса, чтобы в случае малых скоростей он переходил бы в обычный классический импульс $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$, и в то же время закон сохранения релятивистского импульса обязательно мог бы выполняться, т.к. в его основе лежит однородность пространства.

Этим условиям соответствует следующее выражение для релятивистского импульса:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} = m(\upsilon)\vec{\upsilon} = m\vec{\upsilon}. \tag{6.8}$$

Оно переходит в обычное выражение для импульса при скорости $\upsilon << c$.

Это соотношение можно рассматривать, как обычный классический импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$, в котором, однако, масса зависит от скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \tag{6.9}$$

где m_0 – масса покоя частицы, т.е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое; m – масса частицы в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью υ. Следовательно, масса одной и той же частицы различна в разных инерциальных системах отсчета.

В силу однородности пространства в релятивистской механике выполняется закон сохранения релятивистского импульса: релятивистский импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени.

6.11. Основной закон релятивистской динамики

Вспомним, что наиболее общая форма основного закона классической динамики (второго закона Ньютона) имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{6.10}$$

Если под импульсом $\vec{p}$ понимать релятивистский импульс:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}},$$

этот закон оказывается инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца.

Итак, основной закон релятивистской динамики, описывающий движение релятивистской частицы имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}\right).$$

Следует также отметить, что соотношение $m\vec{a} = \vec{F}$ в релятивистской динамике неприменимо.

6.12. Закон взаимосвязи массы и энергии

Релятивистское выражение для кинетической энергии частицы можно найти, рассматривая работу силы по перемещению частицы и ее связь с приращением кинетической энергии. В результате получается формула:

$$T = (m - m_0)c^2, \quad (6.11)$$

абсолютно непохожая на классическую формулу $T = m_0\upsilon^2/2$. Учитывая явный вид зависимости массы движения m от скорости, эту формулу можно записать в виде:

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - 1 \right). \quad (6.12)$$

Отметим, что при малых скоростях ($\upsilon << c$) может быть использовано разложение в ряд $\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)^{-1/2} \approx 1 + \upsilon^2/2c^2$ и тогда это выражение для кинетической энергии, как и следовало ожидать, переходит в обычное классическое соотношение $T = m_0\upsilon^2/2$.

Введем полную энергию частицы:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \quad (6.13)$$

тогда,

$$E = m_0 c^2 + T = E_0 + T.$$

Здесь E_0 – энергия частицы при $\upsilon = 0$, ее называют энергией покоя частицы. Эта энергия представляет собой внутреннюю энергию частицы, не связанную с движением частицы как целого. В классической механике энергию покоя не учитывают, считая, что при $\upsilon = 0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

Из приведенных выше формул может быть найдено еще одно соотношение, связывающее полную энергию и релятивистский импульс частицы:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} . \qquad (6.14)$$

В случае $p << mc$

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} = E_0 + \frac{p^2}{2m_0} .$$

Полученное выражение для полной энергии отличается от ньютоновского выражения для кинетической энергии $T = p^2 \big/ (2m_0)$ слагаемым $m_0 c^2$, т.е. наличием энергии покоя.

В силу однородности времени в релятивистской механике, как и в классической, выполняется закон сохранения энергии: полная энергия замкнутой системы не изменяется с течением времени.

Отметим, что в механических процессах в релятивистской теории в качестве энергии движения рассматривается именно полная энергия:

$$E = mc^2, \qquad (6.15)$$

включающая в себя энергию покоя, а не кинетическая энергия; только тогда закон сохранения энергии выполняется во всех инерциальных системах отсчета. Последнее соотношение, называемое формулой Эйнштейна, также позволяет утверждать, что с энергией, какой бы формы она ни была, связана масса $m = E / c^2$, и наоборот, со всякой массой связана энергия.

Следовательно, всякое изменение энергии тела ΔE сопровождается изменением релятивистской массы тела $\Delta m = \Delta E / c^2$ и, наоборот, всякое изменение релятивистской массы сопровождается изменением энергии тела:

$$\Delta E = \Delta mc^2 . \qquad (6.16)$$

Это утверждение носит название <u>закона взаимосвязи релятивистской массы и энергии.</u>

Пропорциональность между релятивистской массой и энергией приводит к тому, что утверждение о сохранении суммарной релятивистской массы частиц представляет собой сказанное иными словами утверждение о сохранении суммарной полной энергии. В связи с этим не говорят о законе сохранения релятивистской массы как об отдельном законе.

В противоположность релятивистской массе суммарная масса покоя системы взаимодействующих частиц не сохраняется.

Закон взаимосвязи массы и энергии подтверждается экспериментами в области ядерной физики. Он широко используется для расчетов энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

6.13. Примеры решения задач

Задача 6-1. Какую продольную скорость υ нужно сообщить стержню для того, чтобы его длина стала равной половине длины, которую он имеет в состоянии покоя?

Решение. В движущейся системе координат длина стержня l сокращается согласно формуле:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,.$$

По условию, $l = \frac{1}{2}l_0$, следовательно, выполняется соотношение

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{1}{2},$$

$$1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{1}{4},$$

а значит, для квадрата скорости имеем

$$\upsilon^2 = \frac{3}{4}c^2.$$

Окончательно скорость рассчитывается, как

$$\upsilon = \frac{c\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ \ \text{с}.$$

Задача 6-2. С какой скоростью υ должна лететь частица относительно системы отсчета К для того, чтобы промежуток собственного времени $\Delta t'$ был в 10 раз меньше промежутка Δt, отсчитанного по часам системы K?

Решение. Поскольку в теории относительности выводится, что

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

имеем $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0{,}1$ и, следовательно,

$$\upsilon = \sqrt{0{,}99}\ \text{c} = 0{,}995\ \text{c}.$$

Задача 6.3. Тело, масса покоя которого m_0 = 2 кг, движется со скоростью $\upsilon_0 = 2 \cdot 10^8$ м/с в системе K', перемещающейся относительно системы K со скоростью $\upsilon' = 2 \cdot 10^8$ м/с. Определить скорость тела υ относительно системы K и его массу m в этой системе.

Решение. Согласно правилу сложения скоростей скорость тела υ относительно системы K находится по формуле:

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + \upsilon_0}{1+\frac{\upsilon_0\upsilon'}{c^2}} = 2{,}77\ \text{м/с}.$$

Зная эту скорость, можно рассчитать искомую массу:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = 5{,}2\ \text{кг}.$$

Задача 6-4. Определить скорость, полученную электроном, если он прошел ускоряющую разность потенциалов 1,2 МэВ.

Решение. Сформулированное таким образом условие задачи говорит о том, что кинетическая энергия электрона после ускорения увеличилась на ΔE = 1,2 МэВ = $1{,}92 \cdot 10^{-13}$ Дж. Поскольку первоначальная кинетическая энергия может считаться равной нулю, справедливо соотношение:

$$T = \Delta E.$$

В теории относительности кинетическая энергия T определяется по формуле:

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} - 1 \right),$$

следовательно, исходная скорость может быть найдена из условия

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} - 1 \right) = \Delta E .$$

Решив полученное уравнение, получаем

$$\upsilon = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{\Delta E}{m_0 c^2} \right)^{-2}} = 2{,}86 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

6.14. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

6.1. В чем физическая сущность механического принципа относительности?

6.2. Каковы причины возникновения специальной теории относительности? В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?

6.3. Как записываются преобразования Лоренца? При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?

6.4. Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?

6.5. Одновременны ли события в системе K', если в системе K они происходят в одной точке и одновременны; если в системе K события разобщены, но одновременны? Почему?

6.6. Какие следствия вытекают из теории относительности для размеров тел в разных системах отсчета?

6.7. Какие следствия вытекают из теории относительности для длительности событий в разных системах отсчета?

6.8. Как записывается правило сложения скоростей в релятивистской механике? При каких условиях это соотношение переходит в классическое правило сложения скоростей?

6.9. Как определяется интервал между событиями? Что означает тот факт, что интервал является величиной, инвариантной по отношению к преобразованиям Лоренца?

6.10. Как определяется релятивистский импульс? Как может быть записан закон сохранения релятивистского импульса?

6.11. Как находится масса движущегося тела? Может ли частица, обладающая массой покоя, быть разогнана до скорости света?

6.12. Как формулируется основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона классической механики?

6.13. Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?

6.14. Что такое полная энергия частицы? Из каких частей она состоит?

6.15. Как записывается закон взаимосвязи массы и энергии? В чем его физическая сущность?

6.16. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью υ относительно инерциальной системы отсчета. При каком значении скорости υ длина стержня в этой системе отсчета будет на η = 0,5 % меньше его собственной длины?

6.17. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит η = 25 %?

6.18. Определить длину стержня l относительно неподвижной системы отсчета, если собственная длина стержня в системе, движущейся со скоростью $\upsilon = 0{,}7$ с равна $l_0 = 1$ м.

6.19. С какой скоростью двигались в K – системе отсчета часы, если за время $t = 5{,}0$ с (в K – системе) они отстали от часов этой системы на $\Delta t = 0{,}1$ с?

6.20. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в K – системе отсчета. Время пролета в K – системе равно $\Delta t = 20$ нс. В системе отсчета, связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

6.21. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $\upsilon_1 = 0{,}5\,c$ и $\upsilon_2 = 0{,}75\,c$ по отношению к лабораторной системе отсчета. Найти их относительную скорость.

6.22. Тело движется с некоторой скоростью υ относительно движущейся со скоростью c системы отсчета. Рассчитать его скорость относительно неподвижной системы отсчета.

6.23. Тело движется с некоторой скоростью $\upsilon = 0{,}9\,c$ относительно системы отсчета, движущейся со скоростью $\upsilon' = 0{,}9\,c$. Найти его скорость относительно неподвижной системы отсчета.

6.24. Во сколько раз релятивистская масса частицы, скорость которой отличается от скорости света на $\eta = 0{,}01$ %, превышает ее массу покоя?

6.25. Найти скорость движения тела, при которой ее масса увеличивается в 10 раз.

6.26. Тело, имеющее массу покоя $m_0 = 1$ кг движется со скоростью $\upsilon' = 0{,}5\,c$ в системе K', перемещающейся относительно системы K со скоростью $\upsilon_0 = 0{,}2\,c$. Определить импульс тела в обеих системах.

6.27. Определить скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в три раза.

6.28. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$ до $\upsilon_2 = 0{,}8\,c$?

6.29. Найти скорость, при которой кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя.

6.30. Найти скорость протона, обладающего кинетической энергией 500 МэВ.

ЧАСТЬ II

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

7. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

7.1. Статистический и термодинамический методы исследования

Молекулярной физикой называют раздел физики, занимающийся изучением зависимости физических свойств и агрегатных состояний от их внутреннего строения, сил взаимодействия между частицами, образующими тела, и характера их движения.

В настоящее время доказано, что все тела в природе состоят из мельчайших частиц (атомов и молекул), которые находятся в непрерывном хаотическом тепловом движении. Теория строения вещества, базирующаяся на этом положении, называется молекулярно-кинетической.

В обычных условиях в 1 см^3 газов содержатся порядка 10^{25} молекул, а в жидкостях и в твердых телах – 10^{28} молекул. В силу такого большого числа частиц обычными методами классической механики воспользоваться невозможно. Необходимо перейти к рассмотрению усредненных величин. Такой подход можно осуществить двумя способами.

Термодинамический метод состоит в изучении физических свойств макроскопических систем путем анализа условий и количественных превращений энергии в рассматриваемых системах. Термодинамика базируется на двух экспериментально установленных законах – первом и втором законах (началах) термодинамики, а также на принципе Нернста, применение которого необходимо лишь для решения сравнительно небольшого числа задач. С помощью термодинамики можно получить многие сведения о физических свойствах тел в различных условиях, не интересуясь при этом какими-либо представлениями о внутреннем строении исследуемых тел и характеристиками движения образующих их частиц. В силу того, что начала термодинамики получены на основании обобщения большой совокупности опытных фактов, выводы термодинамики имеют весьма общий характер.

Статистический метод исходит из молекулярно-кинетических представлений о строении вещества, используя при этом законы статистики и теории вероятностей. В молекулярно-кинетической теории (статистической физике) все свойства макроскопической системы, которые наблюдаются на опыте (давление, температура и т.п.) в конечном счете связываются со свойствами частиц системы, особенностями их движения и средними значениями их скоростей, энергий и других динамических характеристик.

Подходя к изменению состояний вещества с различных точек зрения (и отличаясь друг от друга различными методами исследования), термодинамика и молекулярно-кинетическая теория взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое.

7.2. Параметры состояния вещества

Физические величины, служащие для характеристики состояния термодинамической системы называют термодинамическим параметрами или параметрами состояния. Состояние данной массы конкретного газа определяется тремя основными термодинамическими параметрами: давлением, объемом, температурой.

Давление p – физическая величина, численно равная силе, действующей на единицу площади поверхности тела по направлению нормали к этой поверхности:

$$p = \frac{F}{s}, \quad \left(p = \frac{dF_n}{ds} \right).$$

Давление измеряется в паскалях (1 Па = 1 Н/м^2 = 1 $\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$). Нормальному атмосферному давлению соответствует 10^5 Па. Напомним, что объем V измеряется в кубических метрах (м^3); объем не может получиться отрицательным.

Температура T – важнейший термодинамический параметр, обязанный своему существованию закону больших чисел. Он регулирует ход тепловых явлений и обуславливает особый вид равновесия - тепловое равновесие. Понятие температуры имеет смысл только для равновесных состояний. С точки зрения молекулярно-кинетической теории температура характеризует интенсивность теплового движения частиц, образующих систему. Разность температур – мера отклонения тел от состояния теплового равновесия друг с другом. Термодинамическая (абсолютная) температура T (измеряемая в кельвинах (К)) и обычная практическая температура t (измеряемая в градусах Цельсия (°С)) связаны соотношением:

$$T = 273{,}15 + t.$$

Градус Цельсия равен кельвину, смещена только точка отсчета с температуры замерзания воды (при $t = 0$) на абсолютный нуль ($T = 0$). Следует отметить, что абсолютный нуль недостижим, хотя сколь угодно близкое приближение к нему возможно.

Так как вещество состоит из атомов и молекул, вводятся величины, характеризующие их массы. Это относительная атомная масса элемента и относительная молекулярная масса вещества. Количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов или молекул), равное числу атомов в 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C называется молем (моль).

Число частиц, содержащихся в моле любого вещества, одинаково и называется числом Авогадро:

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Массу моля называют молярной массой μ, кг/моль:

$$\mu = N_A \cdot m_0,$$

где m_0 – масса одной молекулы данного вещества.

Масса одного моля вещества μ численно равна его относительной молекулярной массе.

Определить число молей ν, содержащихся в данной массе вещества можно с помощью соотношения:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A},$$

где N – число молекул, содержащихся в данной массе m вещества.

7.3. Уравнение состояния идеального газа

Простейшим объектом исследований являются идеальные газы. Идеальным газом называют газ, молекулы которого имеют пренебрежимо малый собственный объем и не взаимодействуют друг с другом на расстоянии. Столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда считаются абсолютно упругими. Реальные газы в условиях, близких к нормальным, а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному.

На основе экспериментально установленных законов Б. Клапейрон вывел уравнение состояния идеального газа в форме:

$$\frac{pV}{T} = \text{const.}$$

Русский ученый Д.И. Менделеев объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро (при одинаковых p и T моли всех газов занимают одинаковый молярный объем) и получил уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT, \tag{7.1}$$

где R = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

Отметим, что для смеси газов в качестве ν берется полное количество вещества в смеси:

$$\nu = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \ldots$$

Уравнение состояния для смеси имеет тот же вид, как и для химически однородного газа и мы не можем решить имеем ли мы дело с химически однородным газом или с механической смесью этих газов.

Для плотности газа $\rho = \dfrac{m}{V}$ уравнение Менделеева-Клапейрона может быть записано в виде:

$$p\mu = \rho RT.$$

Часто пользуются несколько иной формой уравнения состояния идеального газа, вводя постоянную Больцмана:

$$k = \frac{R}{N_\text{А}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

В этом случае уравнение может быть записано в виде:

$$pV = kN_\text{А} \frac{m}{\mu} T = NkT\ .$$

Разделив его на V, получим:

$$p = nkT, \tag{7.2}$$

где $n = N/V$ – число молекул в единице объема (концентрация молекул).
Следствиями уравнения Менделеева-Клапейрона являются все полученные ранее частные газовые законы.

1. Соотношения, описывающие поведение неизменной массы (m = const) идеального газа в изопроцессах:

а) закон Бойля-Мариотта:

$$pV = \text{const при } T = \text{const};$$

б) закон Гей-Люссака:

$$V/T = \text{const при } p = \text{const};$$

в) закон Шарля:

$$p/T = \text{const при V} = \text{const}.$$

2. Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен

$$V_m = RT/p = 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

3. Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots,$$

входящих в нее газов. Парциальным давлением p_i называется давление газа, которое производил бы этот газ, если бы только он один находился в рассматриваемом сосуде.

7.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассматриваются соударения молекул идеального одноатомного газа со стенками сосуда. В этом случае давление газа на стенку связывается с суммарным импульсом, переданным стенке молекулами газа во время столкновения и зависящим от средней скорости хаотического движения молекул. В результате имеем основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов:

$$pV = \frac{1}{3} N\, m_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{2}{3} NE_{\text{к}} = \frac{2}{3} U_{\text{к}},$$

где $E_{\text{к}}$ – кинетическая энергия одной молекулы, $U_{\text{к}}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа. Скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение некоторой величины, в данном случае скорости.

Сравнение этого уравнения с уравнением Менделеева-Клапейрона позволяет определить <u>среднюю квадратичную скорость</u> хаотического движения молекул газа:

$$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \qquad (7.3)$$

Заметим, что она определяется только температурой газа.

Соответственно, выражение для средней кинетической энергии одной молекулы приобретает вид:

$$E_{\text{к}} = m_0 \frac{\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT .$$

Суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа находится по формуле:

$$U_{\text{к}} = NE_{\text{к}} = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{3}{2} pV .$$

Из этих уравнений следует, что при $T = 0$, т.е. при абсолютном нуле прекращается поступательное движение молекул газа, а следовательно, его давление равно нулю. Таким образом, термодинамическая (абсолютная) температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа. В этом заключается молекулярно-кинетическое толкование температуры.

7.5. Закон Максвелла о распределении по скоростям теплового движения

Молекулы идеального газа находятся в беспорядочном, хаотическом, не имеющем какого-либо преимущественного направления движении. Однако, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул в газе, находящемся в состоянии теплового равновесия при некоторой постоянной температуре, остается постоянной. Это означает, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон был установлен Максвеллом. Распределение Максвелла молекул по скоростям теплового движения имеет вид:

$$dn = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \cdot 4\pi\upsilon^2 d\upsilon. \tag{7.4}$$

Это соотношение позволяет определить, какое число молекул dn из общего количества n_0 молекул идеального химически однородного газа в единице объема обладает при данной температуре скоростями, лежащими в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$. Соответствующий график представлен на рис. 7.1.

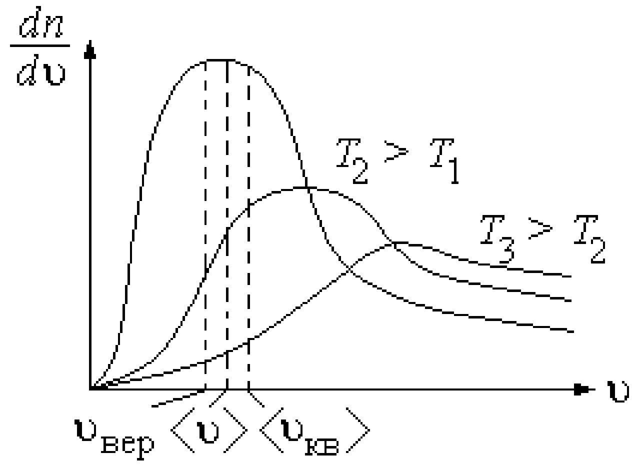


Рис. 7.1

График имеет ярко выраженный максимум при некоторой скорости $\upsilon_{вер}$, называемой наиболее вероятной скоростью. Она определяется из экстремума функции $\frac{dn}{d\upsilon}$:

$$\upsilon_{вер}=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \qquad (7.5)$$

Средняя арифметическая скорость движения молекул имеет вид:

$$\langle\upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \qquad (7.6)$$

Таким образом, состояние газа характеризуется тремя скоростями, имеющими близкие значения:

$$\upsilon_{вер}:\langle\upsilon\rangle:\langle\upsilon_{кв}\rangle=\sqrt{2}:\sqrt{\frac{8}{\pi}}:\sqrt{3}=1:1,13:1,22.$$

Для оценки теплового движения можно брать любую из них.

При повышении температуры величина наиболее вероятной скорости возрастает. Это означает, что максимум функции распределения сместится вправо. Площадь, ограниченная кривой, должна оставаться неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

Закон распределения Максвелла – статистический закон, т.е. чем больше число молекул n_0, тем он точнее.

7.6. Барометрическая формула

До сих пор предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно распределены по объему. Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Если бы его не было, молекулы равномерно распределились бы по всему объему сосуда. Если бы, наоборот, не было теплового движения, под действием силы притяжения все молекулы упали бы на Землю. Тяготение и тепловое движение приводят газ в состояние, при котором его концентрация (а значит, и давление) убывает с высотой. Если учесть, что атмосферное давление p на каждой высоте обусловлено весом только вышележащих слоев газа, можно получить барометрическую формулу:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right),$$

связывающую давление p на некоторой высоте h с давлением p_0 на поверхности Земли. Из этого соотношения следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ (больше μ) и ниже температура T.

7.7. Распределение Больцмана

Барометрическую формулу, учитывая, что

$$p = nkT, \qquad \frac{\mu}{R} = \frac{m_0 N_\mathrm{A}}{kN_\mathrm{A}} = \frac{m_0}{k},$$

можно преобразовать и получить распределение молекул по высоте в виде соотношения:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right). \tag{7.8}$$

Здесь n, n_0 – концентрации молекул на высоте h и $h = 0$, соответственно.

Заметим, что mgh – это потенциальная энергия E_p молекул в поле тяготения. Поэтому распределение молекул по высоте является их распределением по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right). \tag{7.9}$$

Это выражение называется распределением Больцмана для внешнего потенциального поля. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Больцман показал, что такое распределение справедливо в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

7.8. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

В действительности молекулы имеют конечные размеры и непрерывно соударяются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями они движутся прямолинейно и равномерно, проходя при этом расстояние λ, называемое длиной свободного пробега. Поскольку эти расстояния могут быть различны, вводится понятие средней длины свободного пробега $\langle\lambda\rangle$.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы d (рис. 7.2). Он имеет порядок 10^{-10} м, зависит от химической природы газа и в некоторой степени уменьшается с ростом температуры (с увеличением скоростей сталкивающихся молекул).

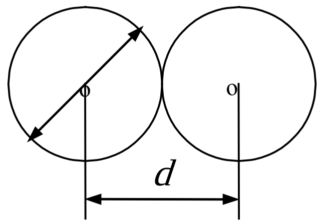


Рис. 7.2

Подсчитаем среднее число столкновений $\langle z\rangle$, которое испытывает молекула при своем движении в однородном газе за единицу времени. Предположим, что все молекулы неподвижны, а Δрассматриваемая молекула движется со скоростью $\langle\upsilon\rangle$. При своем движении она сталкивается со всеми молекулами газа, центры которых отстоят от траектории движения ее центра на расстояние, меньшее или равное d. За время Δt она столкнется со всеми частицами, центры которых лежат внутри цилиндра объемом V с высотой $\langle\upsilon\rangle\Delta t$ и радиусом, равным d. Таких молекул:

$$N = nV = n\langle\upsilon\rangle\Delta t\pi d^2.$$

Поэтому за единицу времени среднее число соударений будет равно $\langle z\rangle = \pi d^2 n\langle\upsilon\rangle$.

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул:

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\,\pi d^2 n\langle\upsilon\rangle. \tag{7.10}$$

При нормальных условиях $\langle z\rangle \sim 10^9$ с$^{-1}$.

Средний путь, проходимый молекулой за время Δt, равен $\langle \upsilon\rangle\Delta t$. Разделив его на среднее число столкновений $\langle z\rangle\cdot\Delta t$, произошедшее за это время, получим среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle = \langle\upsilon\rangle/\langle z\rangle$:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \tag{7.11}$$

Средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна концентрации молекул, а значит, и давлению p. При нормальных условиях $\lambda/d \sim 10^5$.

7.9. Явления переноса в газах

<u>В термодинамически неравновесных системах в результате нарушения полной хаотичности движения молекул возникают особые необратимые процессы, называемые явлениями переноса. Эти нарушения вызваны направленным воздействием на газ: в случае диффузии должна быть создана неоднородность плотности (происходит пространственный перенос массы), в случае теплопроводности – неоднородность температуры (перенос энергии), в случае внутреннего трения – упорядоченность движений молекул газа со скоростями, неодинаковыми в разных его слоях (перенос импульса).</u>

<u>Диффузия</u> – обусловленное тепловым движением молекул самопроизвольное выравнивание концентраций в смеси нескольких веществ. В химически чистых газах диффузия возникает вследствие неодинаковой плотности в различных частях объема газа. Диффузия продолжается, пока существует градиент плотности.

Экспериментально установлено, что перенос массы вещества при явлении диффузии подчиняется закону Фика:

$$\Delta M = \frac{dM}{d\tau} = -D\frac{d\tau}{dz}dS, \tag{7.12}$$

где $\dfrac{dM}{d\tau}$ – масса вещества, переносимого в единицу времени через площадку dS; D – коэффициент диффузии, м^2/с; $\dfrac{d\rho}{dz}$ – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины в направлении переноса.

Знак «–» указывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности. В молекулярно-кинетической теории газов показывается, что

$$D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle.$$

Теплопроводность. Явление теплопроводности возникает, если различные слои газа имеют разную температуру T. В этом случае происходит направленный перенос внутренней энергии в форме теплоты. Он подчиняется закону Фурье:

$$\Delta Q = \frac{dQ}{d\tau} = -x\frac{dT}{dz}dS, \tag{7.13}$$

где $\frac{dQ}{d\tau}$ – теплота, переносимая в единицу времени через площадку dS; x – коэффициент теплопроводности, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$; $\frac{dT}{dz}$ – градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины в направлении переноса. Знак «–» указывает, что перенос энергии происходит в сторону убывания температуры. Можно показать, что

$$x = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho c_V,$$

где ρ – плотность газа; c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Внутреннее трение (вязкость) связано с возникновением сил трения между слоями, перемещающимися параллельно друг другу с различными скоростями. За счет хаотического движения молекулы переходят из слоя в слой. Явление внутреннего трения подчиняется закону Ньютона:

$$\Delta F = \frac{dp}{d\tau} = -\eta\frac{d\upsilon}{dz}dS, \tag{7.14}$$

где ΔF – сила внутреннего трения, действующего на рассматриваемый элемент поверхности; η – коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость). Знак «–» указывает, что импульс течет в направлении убывания скорости. Можно показать, что

$$\eta = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho.$$

Из сопоставления приведенных формул, описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Это обусловлено общностью лежащего в основе явлений молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Коэффициенты переноса D, χ, η, связанные с характеристиками теплового движения молекул, между собой также связаны соотношениями:

$$\eta = \rho D,$$

$$\chi / (\eta c_V) = 1.$$

Используя эти формулы можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

7.10. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Законам идеальных газов с достаточной степенью точности подчиняются только реальные газы при низких давлениях и достаточно высоких температурах, так как только в этом случае объем молекул можно считать пренебрежимо малым, а межмолекулярное взаимодействие – отсутствующим. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами, поэтому необходимо учитывать как объем молекул, так и взаимодействие между ними.

Силы межмолекулярного взаимодействия проявляются на расстояниях $r \le 10^{-9}$м и быстро убывают при увеличении расстояния между молекулами. Существенно, что между молекулами вещества одновременно действуют как силы притяжения (обратно пропорциональные r^7), так и силы отталкивания (обратно пропорциональные r^n, $n \ge 9$). Именно это приводит к возможности существования равновесных расстояний между молекулами.

В первом приближении молекулы реального газа можно уподобить абсолютно твердым шарикам с диаметром d, между которыми действуют только силы взаимного притяжения. Такое рассмотрение приводит к косвенному учету сил отталкивания ввиду существования конечного размера молекул.

Голландский физик Ван-дер-Ваальс вывел уравнение состояния реального газа, введя в уравнение Менделеева-Клапейрона $pV_m = RT$ (для моля газа) две поправки.

1. Учет собственного объема молекул. Молекулы реального газа из-за существования собственного объема движутся в сосуде менее свободно. Следовательно, из общего объема V_m (для моля газа) необходимо вычесть поправку b, характеризующую ту часть объема, которая недоступна для движения молекул. Расчеты показывают, что она равна учетверенному собственному объему молекул.

2. Учет притяжения молекул. Действие сил притяжения приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого внутренним давлением. Эта поправка обратно пропорциональна квадрату молярного объема, т.е. давление p должно быть заменено на $p+\frac{a}{V_m^2}$. Здесь a – постоянная, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

С учетом этих поправок уравнение Ван-дер-Ваальса для моля газа имеет вид:

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)\left(V_m-b\right)=RT. \qquad (7.15)$$

Постоянные a и b для разных газов различны. Чтобы перейти к уравнению для произвольной массы, умножим его на число молей $\nu=\frac{m}{\mu}$. Учитывая, что $\frac{m}{\mu}V_m=V$, имеем

$$\left(p+\frac{m^2}{\mu^2}\cdot\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT. \qquad (7.16)$$

Это уравнение лучше согласуется с результатами опытов, чем уравнение Менделеева-Клапейрона, однако для сильно сжатых газов является недостаточно точным.

7.11. Изотермы реальных газов и их сравнения с теоретическими

Для изотерм реального газа (см. рис. 7.3) характерно следующее. При температурах меньших T_K на каждой изотерме имеется горизонтальный участок BC, вдоль которого постоянна не только температура, но и давление, а молярный объем может принимать любые значения от V_B до V_C.

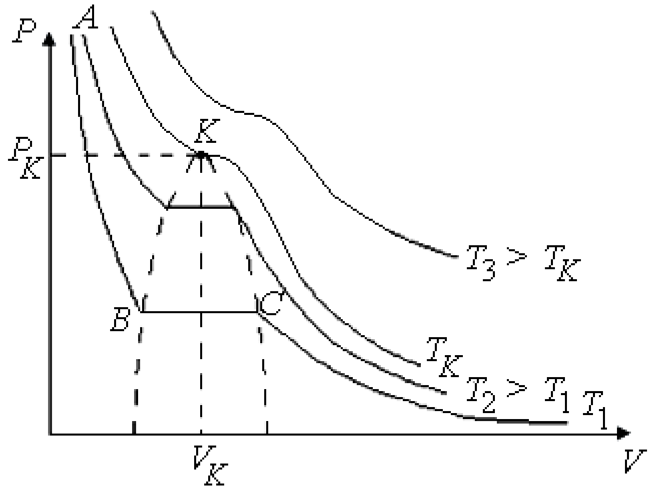


Рис. 7.3

Разность объемов $V_C - V_B$ в конечных точках горизонтальных участков изотерм возрастает с понижением температуры T. При приближении к температуре T_K эта разность объемов стремится к нулю. При $T = T_K$ точки B и C сливаются в одну точку K, называемую критической точкой. Соответствующие ей значения p_K и V_K также называются критическими. Критическая точка является точкой перегиба изотермы $T = T_K$, причем касательная к изотерме в этой точке параллельна оси V.

Любую докритическую изотерму ($T < T_K$) можно разбить на три характерных участка TC, CB, BA. Вдоль первого и третьего участков давление монотонно возрастает при уменьшении молярного объема. Участок TC соответствует газообразному состоянию исследуемого вещества, а участок BA – жидкому. Малая сжимаемость жидкостей приводит к тому, что участок изотермы BA представляют собой почти вертикальную прямую.

На участке CB исследуемое вещество одновременно находится в двух агрегатных состояниях жидком и газообразном. Точка B соответствует состоянию кипящей жидкости, а точка C – состоянию сухого насыщенного пара. Внутри области BC вещество представляет собой смесь кипящей жидкости и сухого насыщенного пара. Такая смесь называется влажным паром.

Для анализа состояния неоднородных систем, подобных влажному пару, в термодинамике вводится понятие о фазе – совокупности всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом и находящихся в одинаковом состоянии. Влажный пар является двухфазной системой, одна фаза которой – кипящая жидкость, а другая – сухой насыщенный пар. На рис. 7.3 пунктирная кривая, проведенная через крайние точки горизонтальных участков изотерм, ограничивает область двухфазных состояний вещества.

При давлениях, больших критического, область двухфазного состояния отсутствует. Вещество находится либо в жидком, либо в газообразном состоянии. Границей между ними является критическая изотерма. Следовательно, газ, температура которого выше критической, нельзя перевести в жидкое состояние путем изотермического сжатия.

Критическая точка замечательна тем, что при приближении к ней стирается различие между жидким и газообразным состояниями вещества. В критическом состоянии обращаются в нуль разность молярных объемов кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, удельная теплота парообразования и коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Изотермы Ван-дер-Ваальса в значительной степени соответствуют изотермам реального газа. Можно убедиться, что уравнение Ван-дер-Ваальса (7.15) является уравнением третьей степени относительно объема, а значит оно может иметь либо один, либо три действительных корня. Вид изотерм Ван-дер-Ваальса представлен на рис. 7.4. При температурах $T < T_K$ имеется область состояний, где каждому значению давления соответствует три точки изотермы (на изотерме имеется волнообразный изгиб).

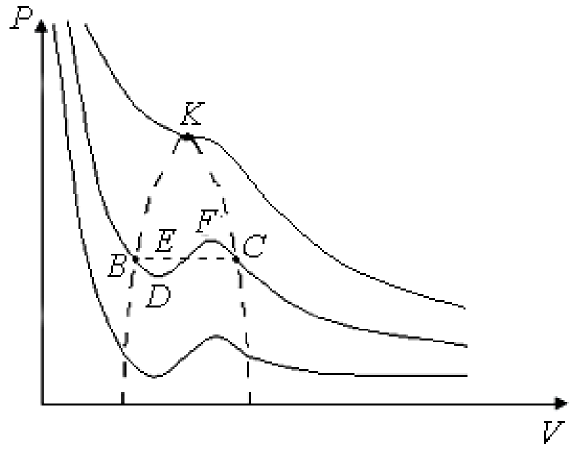


Рис. 7.4

По мере повышения температуры эти точки сближаются и при $T = T_K$ сливаются в критическую точку K, которая является точкой перегиба изотермы. Значения критических параметров p_K, V_K, T_K, найденные из уравнения Ван-дер-Ваальса, имеют вид

$$p_K = \frac{a}{27b^2},\ V_K = 3b,\ T_K = \frac{8a}{27bR}.$$

При $T > T_K$ изотермы Ван-дер-Ваальса близки к изотермам идеального газа (которые представляют собой семейство гипербол).

Изотермы Ван-дер-Ваальса в отличии от изотерм идеального газа охватывают не только область газообразного состояния вещества, но также области двухфазного и жидкого состояний.

Волнообразные участки относятся к двухфазному состоянию вещества. Они сильно отличаются от соответствующих горизонтальных участков экспериментальных изотерм. Тем не менее, некоторые состояния, описываемые уравнением Ван-дер-Ваальса, практически осуществимы. Например, можно задержать кипение жидкости, тщательно удалив из нее механические примеси и нагрев ее в сосуде с гладкими стенками. При этом получается перегретая жидкость, состояние которой характеризуется точками кривой *BD*. Аналогично, при медленном изотермическом сжатии газа, не содержащего пылинок, ионов и других центров конденсации, можно получить пересыщенный пар, соответствующий участку изотермы *CF*. При введении в пересыщенный пар пылинок или ионов происходит быстрая конденсация пара. Участок изотермы *DEF* практически неосуществим.

7.12. Примеры решения задач

Задача 7-1. В смеси газов находится 30 % кислорода и 70 % гелия. Определить плотность газа при температуре $T = 320$ К и давлении $p = 0{,}2$ МПа.

Решение. Уравнение Менделеева-Клапейрона для смеси газов имеет вид

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT .$$

Если общую массу газа обозначить m, то справедливо соотношение

$$pV = \left(\frac{0{,}3m}{\mu_1} + \frac{0{,}7m}{\mu_2}\right)RT ,$$

из которого масса m находится, как:

$$m = \frac{pV}{\left(\frac{0{,}3}{\mu_1} + \frac{0{,}7}{\mu_2}\right)RT} .$$

Отсюда для плотности $\rho = \frac{m}{V}$ имеем

$$\rho = \frac{p}{\left(\frac{0{,}3}{\mu_1} + \frac{0{,}7}{\mu_2}\right)RT} = 0{,}4 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 7-2. Открытый сосуд нагрет до температуры $t_2 = 450$ °C. Какая часть массы воздуха осталась в нем по сравнению с тем количеством, какое было при $t_1 = 27$ °C?

Решение. Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$p_0 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1,$$

$$p_0 V = \frac{m_2}{\mu} RT_2.$$

Здесь учтено, что давление неизменно и равно давлению атмосферы p_0, объем сосуда V. Поделив эти соотношения друг на друга, получим:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2} = 0{,}41.$$

Задача 7-3. В баллоне находилась масса $m_1 = 10$ кг газа при давлении $p_1 = 10$ МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным $p_2 = 2{,}5$ МПа? Температуру газа считать постоянной.

Решение. Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT,$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT,$$

где V – объем баллона. Поделив эти соотношения друг на друга, и учитывая тот факт, что $m_1 - m_2 = \Delta m$, получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_1 - \Delta m}.$$

Из этого соотношения может быть найдена масса газа, взятого из баллона

$$\Delta m = \frac{m_1(p_1 - p_2)}{p_1} = 7{,}5 \text{ кг}.$$

Задача 7-4. В сосуде объемом $V = 2$ л находится масса $m_1 = 6$ г углекислого газа (CO_2) и масса $m_2 = 4$ г закиси азота (N_2O) при температуре $t = 127$ °С. Найти давление p смеси в сосуде.

Решение. Давление смеси в сосуде найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}.$$

Рассчитав молярные массы углекислого газа $\mu_1 = 0{,}044$ кг/моль и закиси азота $\mu_2 = 0{,}044$ кг/моль, найдем давление смеси в сосуде

$$p = 3{,}8 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Задача 7-5. Давление газа, занимающего объем $V = 5$ л, равно $p = 1{,}5$ МПа, концентрация его молекул составляет $n = 2 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$. Определить: 1) температуру газа; 2) среднюю кинетическую энергию $U_к$ поступательного движения его молекул.

Решение. Используя уравнение состояния идеального газа, найдем температуру газа:

$$T = \frac{p}{nk} = 500 \text{ K}.$$

Подставив это значение в формулу для расчета средней кинетической энергии $U_к$ поступательного движения молекул газа

$$U_к = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{3}{2}pV$$

найдем численное значение искомой величины

$$U_к = 1{,}125 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Задача 7-6. Какое число молекул N двухатомного газа содержит объем $V = 10$ см^3 при давлении $p = 5{,}3$ кПа и температуре $t = 27$ °С? Какой кинетической энергией поступательного движения обладают эти молекулы?

Решение. Поскольку уравнение состояния идеального газа может быть записано в виде:

$$pV = NkT,$$

число молекул N может быть найдено по формуле

$$N = \frac{pV}{kT} = 1{,}28 \cdot 10^{19}.$$

Кинетическая энергия поступательного движения молекул определяется соотношением:

$$U_к = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{3}{2}pV = 0{,}8 \text{ Дж.}$$

Задача 7-7. Плотность некоторого газа равна $\rho = 0{,}082$ кг/м^3 при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 17$ °С. Найти среднюю квадратичную скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ молекул газа. Какова молярная масса μ этого газа?

Решение. Уравнение Менделеева-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

может быть записано через плотность газа $\rho = \frac{m}{V}$ следующим образом:

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT.$$

Написанное соотношение позволяет найти значение молярной массы, рассматриваемого газа

$$\mu = \frac{\rho RT}{p} = 1{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Расчет показывает, что $\mu = 1{,}97 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Средняя квадратичная скорость молекул газа определяется соотношением:

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 2{\cdot}10^3 \text{ м/с.}$$

Задача 7-8. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна t = 10 °С.

Решение. Барометрическая формула, дающая закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести, имеет вид:

$$p_h = p_0 \exp\left(\frac{-\mu g h}{RT}\right).$$

По условию задачи $p_h = 0{,}6 p_0$ и поэтому,

$$\ln 0{,}6 = \frac{-\mu g h}{RT}.$$

Учитывая, что средняя молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль, найдем искомую высоту:

$$h = \frac{0{,}51RT}{\mu g} = 4{,}2 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Задача 7-9. Найти среднюю длину свободного пробега молекул газообразного азота, находящегося: 1) при нормальных условиях; 2) при температуре t = 0 °С и давлении p = 1,0 нПа (такое давление позволяют получать современные вакуумные насосы).

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул газа определяется соотношением:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Поскольку эффективной диаметр молекулы азота $d = 3{\cdot}10^{-10}$ м – величина табличная, средняя длина свободного пробега молекул газа $\langle \lambda \rangle$ зависит от числа молекул в единице объема:

$$n = \frac{p}{kT},$$

а, значит, от величины давления.

При нормальных условиях $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К и поэтому,

$$\langle \lambda_0 \rangle = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi d^2 p_0} = 10^{-7} \text{ м},$$

а при давлении $p = 10^{-9}$ Па и температуре $T = 273$ К:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 10^7 \text{ м}.$$

7.13. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

7.1. Почему термодинамический и статистический методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?

7.2. Что такое термодинамические параметры? Какими основными параметрами определяется состояние данной массы конкретного газа?

7.3. Как записывается уравнение Менделеева-Клапейрона для однородного газа? Для смеси газов?

7.4. Как из уравнения Менделеева-Клапейрона могут быть получены уравнения изопроцессов? Какими графиками могут быть представлены изопроцессы в координатах (p, V), (V, T), (p, T)?

7.5. Каков физический смысл числа Авогадро? Как может быть найдено число молекул в сосуде? Концентрация молекул в сосуде?

7.6. Какой вид имеет основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов? В чем заключается молекулярно-кинетическое объяснение понятия температуры?

7.7. Как записывается закон Максвелла, определяющий распределение молекул по скоростям теплового движения? Какой вид имеет соответствующий график?

7.8. Как определяются и что характеризуют средняя квадратичная, наиболее вероятная и средняя арифметическая скорости движения молекул?

7.9. Что позволяет рассчитать барометрическая формула?

7.10. В чем суть распределения Больцмана?

7.11. Что характеризует и как находится средняя длина свободного пробега молекул?

7.12. Как рассчитывается среднее число столкновений, испытываемых молекулой в единицу времени?

7.13. Что такое диффузия и вследствие чего она возникает? Какому закону подчиняется это явление?

7.14. Когда наблюдается явление теплопроводности? Каким законом оно описывается?

7.15. Что такое внутреннее трение? Какой закон описывает это явление?

7.16. Найти молярную массу воздуха, считая, что он состоит по массе из одной части кислорода и трех частей азота.

7.17. В закрытом сосуде вместимостью $V = 20$ л находится водород массой $m_1 = 6$ г и гелий массой $m_2 = 12$ г. Определить давление и молярную массу газовой смеси в сосуде, если температура смеси $T = 300$ К.

7.18. Определить плотность смеси газов водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г при температуре $T = 290$ К при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Газы считать идеальными.

7.19. В сосуде находится масса $m_1 = 14$ г азота и масса $m_2 = 9$ г водорода при температуре $t = 10$ °C и давлении $p = 1$ МПа. Найти молярную массу μ смеси и объем V сосуда.

7.20. В сосуде емкостью V = 50 л находится азот при температуре t = 20 °C. Вследствие утечки газа давление уменьшилось на p0 = 60 кПа. Определить массу m0 газа, вышедшего из баллона. Температуру считать неизменной.

7.21. В цилиндре площадью поперечного сечения $S = 2 \cdot 10^{-3}$ м^2 под поршнем массой $m = 6$ кг находится воздух. Какой груз m^* надо положить на поршень, чтобы объем воздуха в цилиндре уменьшился в два раза? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

7.22. При изобарическом нагревании газа на $\Delta T = 1$ °C его объем увеличился в два раза. В каком интервале температур происходило нагревание?

7.23. Открытую пробирку с воздухом, находящимся при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па, медленно нагрели до некоторой температуры, затем герметически закрыли и охладили до $t = 10$ °C. Давление при этом упало до $p = 0{,}7 \cdot 10^5$ Па. До какой температуры была нагрета пробирка?

7.24. Газ нагрет от температуры $t_1 = 27$ °C до $t_2 = 39$ °C. На сколько процентов увеличился объем газа, если давление осталось неизменным?

7.25. В цилиндре под поршнем находится воздух под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па и при температуре $t_1 = 27$ °С. Какой груз надо положить на поршень после нагревания воздуха до температуры $t_2 = 50$ °С, чтобы объем воздуха в цилиндре был равен первоначальному? Площадь поршня $S = 3 \cdot 10^{-3}$ м^2.

7.26. Некоторый газ, имеющий массу $m = 0{,}012$ кг, находится в объеме $V_1 = 0{,}004$ м^3 при температуре $t_1 = 7$ °С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho_2 = 0{,}6$ кг/м^3. До какой температуры нагрели газ?

7.27. Кислород массой $m = 0{,}01$ кг находится под давлением $p = 3 \cdot 10^5$ Па при температуре $t_1 = 10$ °С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем $V = 10$ л. Найти: 1) объем газа до расширения; 2) температуру газа после расширения; 3) плотность газа до расширения; 4) плотность газа после расширения.

7.28. Два сосуда с объемами $V_1 = 0{,}04$ м^3 и $V_2 = 0{,}02$ м^3 содержат газ, имеющий одинаковую температуру, но разные давления $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па и $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Па, соответственно. Определить давление, которое установится после соединения сосудов.

7.29. Баллон содержит сжатый газ при температуре $t_1 = 279$ °С и давлении $p_1 = 2 \cdot 10^6$ Па. Каково будет давление, когда из баллона будет выпущено 30 % массы газа, а температура понизится на $\Delta T = 12$ °С?

7.30. Какова должна быть масса оболочки детского шарика диаметром d = 25 см, наполненного водородом, чтобы результирующая подъемная сила шарика была равна нулю, т.е. чтобы шарик находился во взвешенном состоянии? Воздух и водород находятся при нормальных условиях (р = 105 Па, Т = 273 К). Давление внутри шарика равно внешнему давлению. Молярная масса воздуха $\mu_в = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

7.31. В сосуде емкостью $V = 0{,}04$ м^3 находится $m = 0{,}01$ кг водорода. Какое число молекул находится в единице объема сосуда и во всем сосуде?

7.32. Определить давление, оказываемое на стенки сосуда, если его плотность $\rho = 0{,}01$ кг/м^3, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет $\upsilon = 480$ м/с.

7.33. Определить наиболее вероятную скорость $\upsilon_{вер}$ молекул газа, плотность которого при давлении $p = 40$ кПа составляет $\rho = 0{,}35$ кг/м^3.

7.34. Определить среднюю кинетическую энергию $U_к$ поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением $p = 0{,}1$ Па. Концентрация молекул газа $n = 10^{13}$ см$^{-3}$.

7.35. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа при температуре $t = 6000$ °С равна $U_к = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ Дж. Какова эта энергия при температурах $t_1 = -200$ °С и $t_2 = 2000$ °С?

7.36. Суммарная энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объемом $V = 20$ л, равна $U_к = 5$ кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу азота в баллоне и давление, под которым он находится.

7.37. В колбе вместимостью $V = 100$ см^3 содержится некоторый газ при температуре $T = 300$ К. На сколько понизится давление p газа в колбе, если вследствие утечки из колбы выйдет $N = 10^{23}$ молекул?

7.38. Определить среднее значение кинетической энергии $E_к$ одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре $T = 400$ К, а также их средние квадратичные скорости при этой температуре.

7.39. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях $\langle \upsilon кв \rangle = 461$ м/с. Какое число молекул содержит единица массы этого газа?

7.40. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 450$ м/с. Давление газа $p = 50$ кПа. Найти плотность ρ газа при этих условиях.

7.41. При какой температуре T средняя квадратичная скорость атомов гелия $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ станет равной второй космической скорости $\upsilon_2 = 11{,}2$ км/с?

7.42. При какой температуре T молекулы кислорода имеют такую же среднюю квадратичную скорость $\left\langle \upsilon_{кв} \right\rangle$, как молекулы водорода при температуре $T_0 = 100$ К?

7.43. Определить среднюю арифметическую скорость $\left\langle \upsilon \right\rangle$ молекул газа, если их средняя квадратичная скорость $\left\langle \upsilon_{кв} \right\rangle = 1$ км/с.

7.44. Во сколько раз средняя квадратичная скорость $\left\langle \upsilon_{кв} \right\rangle$ молекул кислорода больше средней квадратичной скорости пылинки массой $m = 10^{-8}$ г, находящейся среди молекул кислорода?

7.45. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m = 10^{-8}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10$ м? Температура воздуха $T = 300$ К.

7.46. Каково давление воздуха в шахте на глубине $h = 1$ км, если считать, что температура по всей высоте постоянная и равна $t = 22$ °C, а ускорение свободного падения не зависит от высоты? Давление воздуха у поверхности Земли $p_0 = 100$ кПа.

7.47. Определить отношение давления воздуха на высоте $h = 1$ км к давлению на дне скважины глубиной $H = 1$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

7.48. На какой высоте плотность воздуха в e раз (e – основание натуральных логарифмов) меньше по сравнению с плотностью воздуха на уровне земли. Ускорение свободного падения считать не зависящими от высоты.

7.49. Найти плотность ρ воздуха: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 4$ км от поверхности Земли. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0$ °C. Давление воздуха у поверхности Земли $p_0 = 100$ кПа.

7.50. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул водорода диаметром $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м при давлении $p = 0{,}1$ Па и температуре $T = 100$ К.

7.51. Баллон вместимостью $V = 10$ л содержит водород массой $m = 1$ г. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул. Диаметр молекулы водорода $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

7.52. Найти среднее число $\langle z\rangle$ столкновений, испытываемых молекулой кислорода диаметром $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м при нормальных условиях в течение $t = 1$ с.

7.53. Идеальный газ совершил процесс, в результате которого его давление возросло в q раз. Как и во сколько раз изменились средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени, если процесс: 1) изохорический; 2) изотермический?

7.54. Определить коэффициент теплопроводности χ кислорода при давлении $p = 0{,}1$ МПа и температуре $T = 350$ К, если коэффициент диффузии в этих условиях равен $D = 0{,}3$ см^2/с.

7.55. В результате некоторого процесса коэффициент вязкости η идеального газа увеличился в 2 раза, а коэффициент диффузии D в 4 раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

7.56. Коэффициент теплопроводности χ гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найти отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия.

7.57. В сосуде объемом $V = 2$ л находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Теплопроводность газа $\chi = 14$ мВт/(м·К). Найти коэффициент диффузии D газа.

7.58. Углекислый газ и азот находятся при одинаковых температурах и давлениях. Найти для этих газов отношение: а) коэффициентов диффузии; б) вязкостей; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

7.59. Средняя длина свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях $\langle\lambda\rangle$ = 180 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия.

7.60. Коэффициент диффузии кислорода при температуре t = 0 °C равен D = 0,19 см^2/с. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул кислорода.

8. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1. Внутренняя энергия системы

Полная энергия любой термодинамической системы складывается из: а) кинетической энергии системы как целого или ее механических частей; б) потенциальной энергии системы во внешнем силовом поле; в) внутренней энергии, зависящей только от внутреннего состояния системы. В термодинамике обычно считается, что система неподвижна и внешние поля отсутствуют; в качестве полной энергии рассматривается только внутренняя энергия, в состав которой входят кинетическая энергия хаотического движения молекул, потенциальная энергия взаимодействия между молекулами и внутримолекулярная энергия.

Внутренняя энергия является однозначной функцией термодинамического состояния системы. Это означает, что когда система оказывается в данном состоянии, ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение независимо от предыстории системы. Следовательно, изменение внутренней энергии при переходе системы из одного состояния в другое будет всегда равно разности значений внутренних энергий в этих состояниях, независимо от пути, по которому совершался переход, т.е. независимо от процесса или совокупности процессов, приведших к переходу системы из одного состояния в другое. Внутренняя энергия системы тел равна сумме внутренних энергий каждого из тел в отдельности, т.е. внутренняя энергия является аддитивной величиной.

Внутренняя энергия идеального газа представляет собой только кинетическую энергию хаотического теплового движения молекул.

Поскольку у одноатомного газа кинетическая энергия теплового движения одной молекулы определяется соотношением:

$$E_k = \frac{3}{2}kT,$$

то внутренняя энергия одноатомного газа, состоящего из N молекул, будет равна

$$U = NE_k = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

Отметим, что у одноатомного газа молекулы движутся только поступательно. У таких молекул имеются только 3 степени свободы (i = 3), соответствующие поступательному движению, на каждую из которых приходится энергия, равная $kT/2$. Возможность вращения у двух- и многоатомных молекул приводит к появлению дополнительных степеней свободы: у двухатомных молекул с жесткой связью между молекулами пять степеней свободы (i = 5), у трех- и многоатомных – шесть (i = 6). Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. У молекул с нежесткой связью имеются также колебательные степени свободы, но этот случай рассматриваться не будет.

Согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $kT/2$, т.е. каждая молекула обладает энергией $ikT/2$, где i – полное число степеней свободы молекулы. Соответственно, внутренняя энергия идеального газа U, состоящего из N молекул, будет равна

$$U = N\frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT. \qquad (8.1)$$

Ранее было отмечено, что внутренняя энергия является однозначной функцией термодинамического состояния системы. Внутренняя энергия данной массы идеального газа определяется только абсолютной температурой T.

8.2. Теплота и работа

Возможны две формы передачи энергии от одного тела к другому. Первая из них сводится к тому, что энергия упорядоченного движения одного тела переходит в энергию упорядоченного движения другого тела или его частей. Такую форму передачи энергии в термодинамике называют работой (например, газ двигает поршень).

Вторая форма передачи энергии осуществляется при теплообмене между хаотически движущимися частицами взаимодействующих тел. При этом за счет переданной телу энергии усиливается неупорядоченное движение его частиц, т.е. увеличивается внутренняя энергия тела. Такой способ изменения энергии в термодинамике называют передачей теплоты, а энергию, переданную телом в результате теплообмена – количеством теплоты.

Теплота, подобно работе, является формой передачи энергии, а отнюдь не видом энергии. В отличие от внутренней энергии, теплота и работа не являются функциями состояния системы. Работа и теплота существуют лишь в процессе передачи энергии, а их численные значения существенным образом зависят от вида этого процесса. Так же как и энергия, теплота и работа измеряются в джоулях (Дж).

Существует качественное различие между этими двумя способами обмена энергиями между макроскопическими телами: работа может привести к изменению любого вида энергии, а теплообмен направлен исключительно на изменение внутренней энергии системы.

Во всех происходящих в системе процессах соблюдается закон сохранения и превращения энергии. Применительно к термодинамическим процессам этим законом является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных.

8.3. Работа газа при его расширении

Найдем общий вид формулы для расчета работы газа при изменении его объема. Рассмотрим газ, заключенный в цилиндрический сосуд с поршнем площадью S. Если по каким-либо причинам газ станет расширяться, он будет перемещать поршень и совершать над ним работу. При перемещении на бесконечно малое расстояние dl совершаемая газом работа равна

$$\delta A = Fdl = pSdl = pdV. \qquad (8.2)$$

Здесь $Sdl = dV$ – изменение объема системы.

Полная работа A, совершаемая газом при изменении его объема от V_1 до V_2, находится через интеграл:

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (8.3)$$

Конкретный результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное выражение справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

Полученные формулы относятся только к работе газа A по расширению. При нахождении работы над газом A' необходимо учитывать, что в силу третьего закона Ньютона (силы, возникающие при взаимодействии, равны по величине и противоположны по направлению) указанные работы различаются по знаку, т.е.

$$A' = -A.$$

Произведенную в некотором процессе работу можно изобразить графически, используя кривую процесса в координатах p, V. Пусть изменение давления газа при его расширении изображается кривой $p(V)$ (см. рис. 8.1). При увеличении объема на dV совершаемая газом работа равна pdV, т.е. определяется площадью полоски, заштрихованной на рисунке. Поэтому полная работа, совершаемая газом при расширении от объема V_1 до объема V_2, определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $p(V)$ и прямыми V_1 и V_2. Работа берется со знаком «+», если газ расширяется и «–», если сжимается.

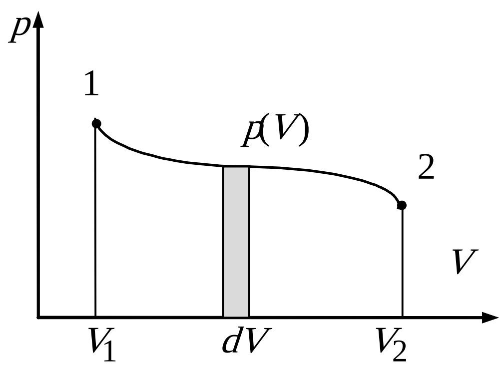


Рис. 8.1

Работа, совершаемая при круговом процессе, численно равна площади, охватываемой кривой (рис. 8.2).

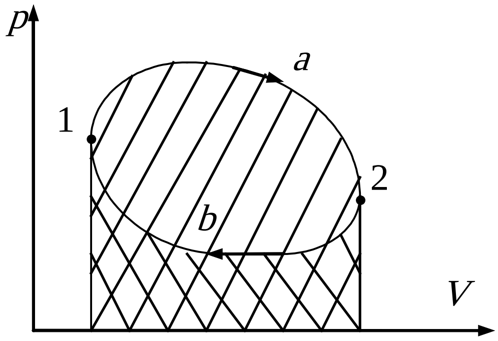


Рис. 8.2

Этот результат получается, если учесть, что работа, совершаемая газом на участке $1a2$, положительная и равна всей заштрихованной площади, а работа, совершаемая на участке $2b1$, отрицательна и равна дважды заштрихованной площади. Для процессов, идущих против часовой стрелки, работа за цикл в целом получается отрицательной.

8.4. Первое начало термодинамики и его применение к изопроцессам

Первое начало термодинамики является выражением закона сохранения и превращения энергии. Количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A. \tag{8.4}$$

В дифференциальной форме это выражение имеет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{8.5}$$

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии $\Delta U = 0$. Тогда, согласно первому началу термодинамики,

$$A = Q,$$

т.е. вечный двигатель первого рода – периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия, – невозможен (одна из формулировок первого начала термодинамики).

Чтобы рассмотреть применение первого начала термодинамики к изопроцессам более подробно, вспомним соотношения, определяющие U и A идеальных газов.

Итак,

$$Q = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T + \int_{V_1}^{V_2} pdV\,, \qquad (8.6)$$

или в дифференциальной форме:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RdT + pdV. \qquad (8.7)$$

Изохорический процесс ($V = \text{const}$). Этот процесс, изображенный на рис.8.3, описывается уравнением:

$$\frac{p}{T} = \text{const}\,, \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

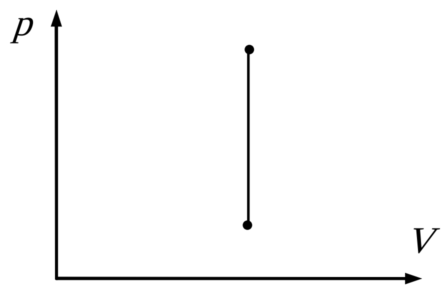


Рис. 8.3

Здесь газ не расширяется, а следовательно, не совершает работы над внешними телами, т.е. $A=0$. Вся теплота, сообщенная газу в изохорическом процессе, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$Q = \Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}V(p_2 - p_1).$$

Изобарический процесс ($p=\text{const}$). Этот процесс, изображенный на рис. 8.4, описывается уравнением:

$$\frac{V}{T} = \text{const}\,, \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

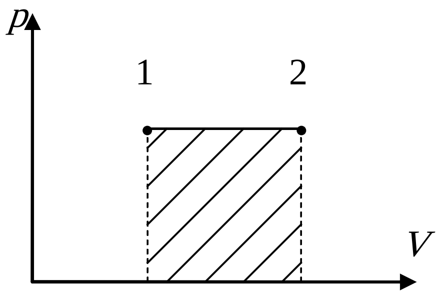


Рис. 8.4

В изобарном процессе работа газа при увеличении объема от V_1 до V_2 равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Изменение внутренней энергии определяется формулой:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2} p\,(V_2 - V_1),$$

поэтому первое начало термодинамики примет вид:

$$Q = \Delta U + A = \left(\frac{i}{2} + 1\right)\frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \left(\frac{i}{2} + 1\right) p\,(V_2 - V_1).$$

<u>Изотермический процесс</u> (T=const). Этот процесс, изображенный на рис. 8.5, описывается уравнением:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

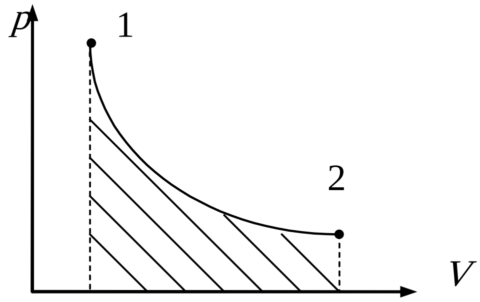


Рис. 8.5

Работа изотермического расширения газа равна

$$A=\int_{V_1}^{V_2} pdV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}dV=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

В этом процессе $T=\text{const}$, $\Delta U=0$ – внутренняя энергия идеального газа не изменяется. Все количество теплоты, сообщенное газу, идет на совершение им работы против внешних сил:

$$Q=A=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

<u>Адиабатический процесс</u> – это процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой ($Q=0$). Этот процесс, изображенный на рис. 8.6, описывается уравнением Пуассона:

$$pV^{\gamma}=\text{const} \quad \text{или} \quad p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma},$$

где γ – показатель адиабаты, причем $\gamma=(i+2)/i$.

Уравнение Пуассона может быть записано и через другие термодинамические параметры:

$$TV^{\gamma-1}=\text{const} \;\; \text{или} \;\; Tp^{(1-\gamma)/\gamma}=\text{const}.$$

Из первого начала термодинамики для адиабатического процесса следует, что

$$\Delta U+A=0,\; A=-\Delta U,\; A'=\Delta U,$$

т.е. работа, совершаемая над газом внешними силами, идет на увеличение его внутренней энергии. Заметим также, что

$$A=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_1-T_2),$$

поэтому при адиабатическом расширении ($A>0$) газ охлаждается ($T_2<T_1$). Работа, совершаемая в адиабатическом процессе, также может быть найдена по формулам:

$$A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)=\frac{p_1V_1(T_1-T_2)}{(\gamma-1)T_1}.$$

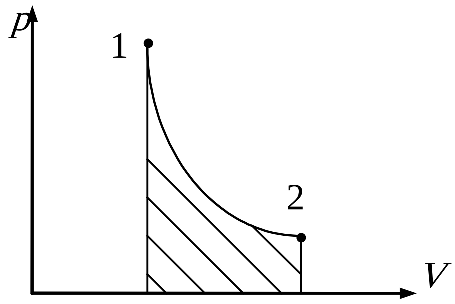


Рис. 8.6

8.5. Теплоемкость идеального газа

Теплоемкостью какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин. По определению теплоемкость тела равна

$$C_{\text{тела}}=\frac{\delta Q}{dT}.$$

Она измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

Удельная теплоемкость вещества c – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К,

$$c=\frac{\delta Q}{mdT}. \tag{8.8}$$

Она измеряется в джоулях на килограмм-кельвин (Дж/(кг · К)).

Молярная теплоемкость C – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К,

$$C=\frac{\delta Q}{\nu dT},\quad \nu=\frac{m}{\mu}. \tag{8.9}$$

Она измеряется в джоулях на моль-кельвин (Дж/(моль · К)).

Удельная теплоемкость связана с молярной соотношением:

$$C=c\mu.$$

Различают теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным. Из первого начала термодинамики для одного моля газа:

$$\delta Q = \frac{i}{2} RdT + pdV = CdT$$

следует, что при постоянном объеме, когда $dV = 0$,

$$\delta Q = C_V dT = \frac{i}{2} RdT, \quad C_V = \frac{i}{2} R,$$

а при постоянном давлении, когда $pdV = RdT$,

$$\delta Q = C_p dT = \left(\frac{i}{2} + 1\right) RdT, \quad C_p = \left(\frac{i}{2} + 1\right) R.$$

Обе теплоемкости связаны между собой уравнением Майера:

$$C_p = C_V + R. \tag{8.10}$$

Теплоемкость C_p всегда больше теплоемкости C_V из-за того, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение газом работы расширения.

При рассмотрении термодинамических процессов также важно знать характерное для каждого газа отношение C_p к C_V:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \tag{8.11}$$

Коэффициент γ уже появлялся ранее в уравнении Пуассона для адиабатического процесса.

Отметим также, что для изотермического процесса $C = \infty$, так как $\delta Q \neq 0$, а $dT = 0$; для адиабатического процесса $C = 0$, поскольку $\delta Q = 0$, а $dT \neq 0$.

Все четыре рассмотренные выше процесса имеют одну особенность – они происходят при постоянной теплоемкости. Процессы, в которых теплоемкость остается постоянной, называются политропными.

Уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const} \tag{8.12}$$

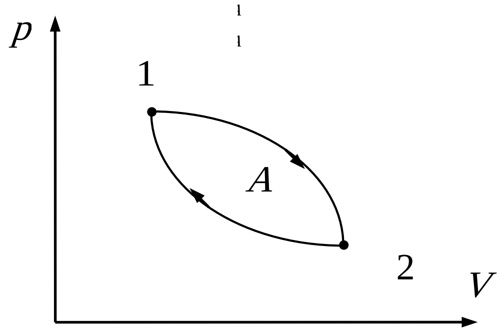
выводится из условия $C = \text{const}$. Показатель политропы равен

$$n = (C - C_p)/(C - C_V).$$

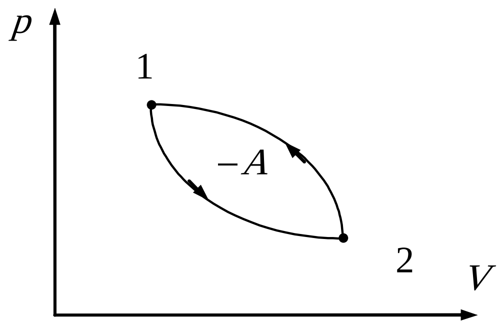
Все рассмотренные процессы являются частными случаями политропного процесса. Так, при $C = 0$, $n = \gamma$ имеем уравнение адиабаты; при $C = \infty$, $n = 1$ – уравнение изотермы; при $C = C_p$, $n = 0$ – уравнение изобары, при $C = C_V$, $n = \pm\,\infty$ – уравнение изохоры.

8.6. Круговой процесс (цикл)

Круговым процессом (циклом) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На графике цикл изображается замкнутой кривой. Работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой кривой. Если за цикл совершается положительная работа (цикл протекает по часовой стрелке, рис. 8.7а), то он называется прямым. Если за цикл совершается отрицательная работа (цикл протекает против часовой стрелки, рис. 8.7б), то он называется обратным.



а)



б)

Рис. 8.7

Прямой цикл используется в тепловых двигателях – периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в холодильных машинах – периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики для кругового процесса примет вид:

$$Q = \Delta U + A = A,$$

т.е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Поскольку в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, то

$$A = Q = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой.

Из этого соотношения следует, что не все получаемое извне тепло Q_1 используется для получения полезной работы. Для того, чтобы двигатель работал циклами, часть тепла, равная Q_2, должна быть возвращена во внешнюю среду и, следовательно, не используется для совершения полезной работы. Очевидно, что чем полнее превращает тепловой двигатель получаемое извне тепло Q_1 в полезную работу A, тем этот двигатель выгоднее. Поэтому двигатель принято характеризовать <u>термическим коэффициентом полезного действия</u> (КПД) η:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (8.13)$$

Из определения КПД следует, что он не может быть больше единицы.

В холодильной машине теплота Q_2 подводится к газу, а от него отбирается теплота $Q_1 > Q_2$. Работа, совершаемая газом за цикл, отрицательна. Это означает, что при совершении рабочим телом обратного цикла можно переносить энергию в форме теплоты от холодного тела к горячему за счет совершения внешними силами соответствующей работы. Этот метод применяется в холодильной технике.

Эффективность холодильной машины характеризуют ее <u>холодильным коэффициентом</u>, который определяют как отношение отнятого от охлаждаемого тела тепла Q_2 к работе A, которая затрачивается на приведение машины в действие:

$$\eta = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (8.14)$$

Отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому без совершения работы нельзя – это утверждение было сформулировано Клаузиусом.

8.7. Обратимые и необратимые процессы

Процесс называется обратимым, если при совершении его системой сначала в прямом, а затем в обратном направлении в исходные состояния возвращаются как сама система, так и все внешние тела, с которыми система взаимодействовала. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является необратимым. Применительно к идеальному газу обратимыми могут быть изотермический и адиабатический процессы. Все необратимые процессы в одном направлении протекают самопроизвольно, а для совершения каждого из этих процессов в обратном направлении необходимо, чтобы параллельно происходил какой-то другой, компенсирующий процесс. Все процессы, сопровождающиеся трением, являются необратимыми. Процессы теплообмена при конечной разности температур, растворения и диффузии также необратимы.

В термодинамике доказывается, что необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность. Равновесный процесс состоит из непрерывной последовательности равновесных состояний, поэтому равновесным может быть только бесконечно медленный процесс. При достаточно медленном протекании реальные процессы могут приближаться к равновесному сколь угодно близко.

Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов. Их рассмотрение важно по двум причинам: 1) многие процессы в природе и технике практически обратимы; 2) обратимые процессы являются наиболее экономичными, имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет найти пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

8.8. Цикл Карно

Для работы теплового двигателя необходимо наличие двух тепловых резервуаров. От одного из них, имеющего более высокую температуру T_1 и называемого нагревателем, двигатель получает количество теплоты Q_1. Второму, имеющему более низкую температуру T_2 и называемому холодильником, двигатель отдает количество теплоты Q_2.

Обратимый цикл, совершаемый телом, вступающим в теплообмен с двумя тепловыми резервуарами, может состоять только из двух изотерм и двух адиабат. Впервые он был введен в рассмотрение французским инженером Сади Карно. Цикл Карно по определению обратимый. Он состоит из четырех последовательных процессов (рис. 8.8):

1-1′ – изотермическое расширение при температуре T_1;

1′-2 – адиабатическое расширение;

2-2′ – изотермическое сжатие при температуре T_2;

2′-1 – адиабатическое сжатие.

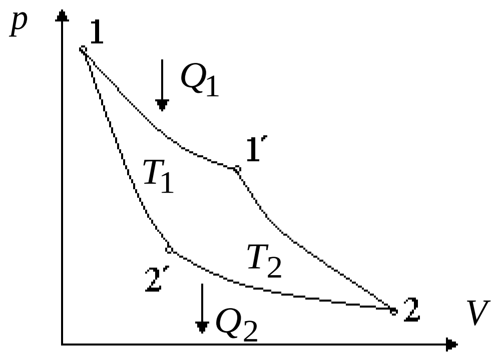


Рис. 8.8

Можно показать, что работа A, совершаемая идеальным газом в прямом равновесном цикле Карно, равна

$$A = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2) \ln \frac{p_1}{p_2},$$

при этом полученная за цикл теплота Q_1 находится по формуле:

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Таким образом, полезная работа меньше энергии, получаемой от нагревателя – часть ее бесполезно отдается холодильнику. Однако без наличия холодильника двигатель работать не может.

Термический коэффициент полезного действия идеального цикла Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1 \qquad (8.15)$$

зависит только от температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2. КПД реальных тепловых двигателей сравнивают с полученным КПД, так как именно он характеризует степень совершенства и экологичности теплового двигателя. Это было доказано в теореме Карно: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины. При этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами), а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

Итак, КПД необратимой тепловой машины всегда меньше, чем КПД обратимой, работающей в тех же условиях (при тех же максимальной и минимальной температурах рабочего тела).

8.9. Энтропия

Строгий теоретический анализ показывает, что для любого обратимого кругового процесса справедливо соотношение:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Это соотношение говорит о том, что подынтегральное выражение $\frac{\delta Q}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Функция состояния S, дифференциалом dS которой является $\frac{\delta Q}{T}$, называется энтропией. Итак,

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \qquad (8.16)$$

Единицей измерения энтропии является джоуль на кельвин (Дж / К).

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, изменение энтропии равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \qquad (8.17)$$

Эта формула определяет энтропию с точностью до аддитивной постоянной.

Поскольку для обратимых процессов:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

изменение энтропии за цикл:

$$\Delta S = 0.$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей необратимый цикл, возрастает, т.е.

$$\Delta S > 0.$$

Оба эти соотношения можно представить в виде неравенства Клаузиуса:

$$\Delta S \geq 0,$$

т.е. энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов). Отметим, что если система обменивается теплотой с внешней средой, ее энтропия может вести себя любым образом. В случае адиабатического обратимого процесса, когда $\delta Q = 0$, энтропия остается постоянной.

Энтропия, так же как и масса, объем, внутренняя энергия, обладает свойством аддитивности: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему (температура и давление таким свойством не обладают).

Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике: энтропия связывается со статистическими характеристиками состояния системы. Число микроскопических способов, которыми термодинамическое состояние может быть осуществлено, является количественной характеристикой теплового состояния системы, описывающей его стремление переходить в другое состояние. Это число называют статистическим весом состояния W ($W \geq 1$). Термодинамическая система, предоставленная самой себе, стремится перейти в состояние с большим статистическим весом. Согласно Больцману, энтропия связана с логарифмом W соотношением:

$$S = k\ln W, \tag{8.18}$$

где k – постоянная Больцмана.

Эта формула позволяет дать энтропии следующее статистическое толкование: энтропия является мерой неупорядоченности системы. Наибольший статистический вес имеют равновесные состояния, поэтому равновесное состояние является наиболее вероятным, а его энтропия максимальна.

Будучи предоставлена самой себе, система переходит в более вероятные состояния. В этом процессе энтропия системы возрастает.

8.10. Второе начало термодинамики

Для описания термодинамических процессов одного первого начала термодинамики недостаточно. Выражая закон сохранения и превращения энергии, первое начало не позволяет определить направление протекания процессов. В самом деле, процесс самопроизвольной передачи энергии в форме теплоты не противоречит первому началу термодинамики, если только уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым. Однако при опускании куска железа в холодную воду никогда не наблюдается явление дальнейшего нагревания железа за счет соответствующего охлаждения воды. Можно представить много процессов, в которых энергия сохраняется, но которые не осуществляются.

Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов. Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса $\Delta S \geq 0$, второе начало термодинамики можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах и сохранения энтропии при обратимых процессах: в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.

С точки зрения статистической физики (формулы Больцмана (8.18)), возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах означает переход системы из менее вероятных в более вероятные состояния. Второе начало термодинамики, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

Используя определение энтропии для обратимых процессов:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

и соответствующее неравенство для необратимых процессов:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T},$$

можно найти количество теплоты, сообщенное телу, при бесконечно малом изменении его состояния:

$$\delta Q \leq TdS.$$

Это соотношение является количественным выражением второго начала термодинамики. С учетом первого начала термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

оба начала можно объединить в одно соотношение:

$$TdS \geq dU + \delta A.$$

Первые два начала термодинамики дают недостаточное количество сведений о поведении термодинамических систем при $T \to 0$. Они дополняются третьим началом термодинамики, или теоремой Нернста: энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина:

$$\lim_{T \to 0} S = 0.$$

Энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной. Теорема Нернста приравнивает при $T = 0$ эту постоянную нулю.

8.11. Примеры решения задач

Задача 8-1. Кислород массой $m = 32$ кг находится в закрытом сосуде под давлением $p = 0{,}1$ МПа при температуре $T = 290$ К. После нагревания давление в сосуде повысились в 4 раза. Определить: 1) объем сосуда; 2) температуру, до которой газ нагрели; 3) количество теплоты, сообщенное газу.

Решение. Объем сосуда может быть найден из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$V = \frac{mRT}{\mu p} = 30 \text{ м}^3.$$

Поскольку процесс изохорический, температура, до которой нагрели газ, равна

$$T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1} = 4T_1 = 1160 \text{ К}.$$

Количество теплоты, сообщенное газу, рассчитывается по I началу термодинамики, причем число степеней свободы молекул кислорода $i = 5$

$$Q = \Delta U + A = \Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) = 1{,}75 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Здесь учтено, что в изохорическом процессе работа $A = 0$.

Задача 8-2. Определить количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа.

Решение. В изохорном процессе работа расширения газа равна нулю, поэтому количество теплоты, сообщенное газу при нагревании определяется только изменением его внутренней энергии. Следовательно,

$$Q = \frac{m}{\mu}\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}V(p_2 - p_1) = \frac{5}{2}V\Delta p = 5 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Задача 8-3. Один литр гелия, находящегося при нормальных условиях, изотермически расширяется за счет полученного извне тепла до объема два литра. Найти: 1) работу, совершенную газом при расширении, 2) количество сообщенного газу тепла.

Решение. Работа, совершенная газом при изотермическом расширении, равна

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = p_0 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 69 \text{ Дж}.$$

Так как в изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется:

$$Q = \Delta U + A = A = 69 \text{ Дж.}$$

Задача 8-4. При адиабатическом сжатии одного моля двухатомного газа была совершена работа A = 146 Дж. На сколько увеличилась температура газа при сжатии?

Решение. Адиабатическое сжатие производится без теплообмена с внешней средой, поэтому работа, совершенная над газом, равна

$$A = +\Delta U = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T\ .$$

Отсюда можно рассчитать увеличение температуры газа при сжатии:

$$\Delta T = \frac{2\mu A}{5mR} = 7 \text{ К.}$$

Задача 8-5. Кислород, занимающий при давлении p_1= 1 МПа объем V_1= 5 л, расширяется в n = 3 раза. Определить конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотреть следующие процессы: 1) изобарный; 2) изотермический; 3) адиабатический.

Решение. В изобарном процессе давление остается неизменным (p_1 = p_2 = 1 МПа), а работа расширения находится по формуле:

$$A = p_1(V_2 - V_1) = 2p_1V_1 = 10^4 \text{ Дж.}$$

В изотермическом процессе:

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

поэтому конечное давление равно

$$p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2} = \frac{p_1}{n} = 3{,}3\cdot 10^5 \text{ Па,}$$

а работа, совершенная газом при расширении:

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln n = p_1V_1\ln n = 5{,}5\cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

В адиабатическом процессе изменения давления и объема подчиняются уравнению Пуассона:

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma},$$

где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V} = 1,4$ для двухатомного газа. Поэтому конечное давление равно

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_1}{3^{3,14}} = 2,15\cdot10^5 \text{ Па.}$$

Работа расширения, совершенная газом в этом процессе, может быть найдена по формуле:

$$A = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = 4,5\cdot10^3 \text{ Дж.}$$

Задача 8-6. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70 % количества теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты получаемое от нагревателя, равно $Q_1 = 5$ кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле.

Решение. КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - 0,7Q_1}{Q_1} = 0,3 = 30\%.$$

Работа, совершенная при полном цикле:

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_1 - 0,7Q_1 = 0,3Q_1 = 1500 \text{ Дж.}$$

Задача 8-7. Идеальный газ в количестве $\nu = 1$ кмоль совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от $V_1 = 25$ м^3 до $V_2 = 50$ м^3 и давление изменяется от $p_1 = 100$ кПа до $p_2 = 200$ кПа. Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличился в 2 раза?

Решение. Работа, совершаемая в первом цикле:

$$A_1 = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Наибольшей и наименьшей температурам цикла Карно соответствуют:

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{R}, \quad T_1 = \frac{p_1 V_1}{R}.$$

Работа, совершаемая в цикле Карно, находится как

$$A_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 V_2 \ln 2 - p_1 V_1 \ln 2,$$

и поэтому искомое отношение равно

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\ln 2 (p_2 V_2 - p_1 V_1)}{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)} = 2{,}1.$$

Задача 8-8. Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы m = 1 г воды (t = 0°) в пар ($t_п$ = 100°).

Решение. Изменение энтропии определяется формулой:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Рассматриваемый процесс осуществляется в два этапа. При нагревании воды ее теплоемкость c_0 = 4,2 кДж/кг·К, поэтому,

$$dQ = m c_0 dT.$$

Изменение энтропии в этом процессе:

$$\Delta S_1 = m c_0 \ln \frac{T_n}{T_0} = 0{,}126 \text{ Дж/К}.$$

В дальнейшем, при превращении воды в пар температура не увеличивается, а вся подводимая теплота идет на парообразование (удельная теплота парообразования r = 2,26 мДж/кг), и поэтому

$$\Delta S_2 = \frac{mr}{T_n} = 6{,}06 \text{ Дж/К}.$$

Общее изменение энтропии:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 6{,}186 \text{ Дж/К}.$$

Задача 8-9. Масса $m = 10$ г кислорода нагревается от температуры $t_1 = 50°$ до температуры $t_2 = 150°$. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

Решение. Изменение энтропии в этих процессах равно

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 mc\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_2}{T_1},$$

причем в изохорическом процессе $c = c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, а в изобарическом процессе $c = c_p = \frac{(i+2)R}{2\mu}$. Подставив численные значения, получим:

$V = \text{const}$ $\qquad$ $\Delta S = 1{,}76$ Дж/К,

$p = \text{const}$ $\qquad$ $\Delta S = 2{,}46$ Дж/К.

8.12. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

8.1. Что такое внутренняя энергия идеального газа и какими свойствами она обладает? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?

8.2. Как находится число степеней свободы молекул? В чем суть закона Больцмана о равном распределении энергии по степеням свободы молекул?

8.3. Как рассчитывается работа газа при изменении его объема? Как может быть графически найдена работа газа по расширению? Чему равна работа, совершаемая при круговом процессе?

8.4. Как записывается первое начало термодинамики применительно к изохорическому и изобарическому процессам? Почему нагревание газа при постоянном давлении требует большего количества теплоты, чем его нагревание при постоянном объеме?

8.5. Как записывается первое начало термодинамики применительно к изотермическому и адиабатическому процессам? Как меняется температура газа в результате его изотермического и адиабатического расширения?

8.6. Что такое теплоемкость газа? Почему различают теплоемкость газа при постоянном объеме и при постоянном давлении? Каким соотношением они связаны между собой?

8.7. Какой процесс называют адиабатическим? политропическим? Какими уравнениями они описываются? Какое понятие является более общим и почему?

8.8. Какие термодинамические процессы называют циклическими? Какие из них могут быть использованы в тепловых двигателях, а какие – в холодильных машинах? Как может быть найден коэффициент полезного действия (холодильный коэффициент) этих устройств?

8.9. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу? Почему?

8.10. Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?

8.11. Из каких процессов состоит цикл Карно? Является ли он обратимым? Как находится термический коэффициент полезного действия идеального цикла Карно и как он связан с КПД реальных тепловых машин, работающих в тех же условиях?

8.12. Как определяется энтропия? С какими характеристиками состояния системы она связана? Как трактуется статистическое понятие энтропии?

8.13. Почему энтропия замкнутой системы может либо возрастать, либо оставаться постоянной? Как может меняться энтропия, если система не является замкнутой?

8.14. Как формулируется и что определяет второе начало термодинамики? Каким образом второе начало термодинамики связано со статистическими закономерностями?

8.15. К какому значению стремится энтропия тел системы по мере приближения ее температуры к абсолютному нулю? Какова роль теоремы Нернста в термодинамике?

8.16. Масса $m = 1$ кг двухатомного газа находится под давлением $p = 80$ кПа и имеет плотность $\rho = 4$ кг/м^3. Найти энергию теплового движения U молекул газа при этих условиях.

8.17. Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях $\rho = 1{,}43$ кг/м^3. Найти удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа.

8.18. Молярная масса некоторого газа $\mu = 0{,}03$ кг/моль, отношение $c_p/c_V = 1{,}4$. Найти удельные теплоемкости c_p и c_V этого газа.

8.19. Определить показатель адиабаты γ идеального газа, который при температуре $T = 350$ К и давлении $p = 0{,}4$ МПа занимает объем $V = 300$ л и имеет теплоемкость $C_{газа} = 857$ Дж/К.

8.20. Определить молярную массу μ газа, если разность его удельных теплоемкостей $c_p - c_V = 2{,}08$ кДж/(кг·К).

8.21. В сосуде объемом $V = 6$ л находится при нормальных условиях двухатомный газ. Определить теплоемкость $C_{газа}$ этого газа при постоянном объеме.

8.22. Определить молярные теплоемкости газа, если его удельные теплоемкости c_V = 10,4 кДж/(кг·К) и c_p = 14,6 кДж/(кг·К).

8.23. Найти удельные c_V и ср и молярные C_V и C_p теплоемкости азота и гелия.

8.24. Трехатомный газ под давлением p = 240 кПа и температуре t = 20 °С занимает объем V = 10 л. Определить теплоемкость $C_{газа}$ этого газа при постоянном давлении.

8.25. Одноатомный газ при нормальных условиях занимает объем V = 5 л. Вычислить теплоемкость $C_{газа}$ этого газа при постоянном объеме.

8.26. Определить молярные теплоемкости C_V и C_p смеси двух газов – одноатомного и двухатомного. Количества газов соответственно равны ν_1 = 0,4 моль и $\nu_2 = 0{,}2$ моль.

8.27. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p водорода, в котором половина молекул распалась на атомы.

8.28. В сосуде находится смесь двух газов – кислорода массой m_1 = 6 г и азота массой m_2 = 3 г. Определить удельные теплоемкости c_V и c_p такой смеси.

8.29. Одноатомный газ, количество вещества которого ν_1 = 2 моль смешан с трехатомным газом, количество вещества которого ν_2 = 2 моль. Определить молярные теплоемкости C_V и C_p этой смеси.

8.30. Смесь газов состоит из гелия массой m_1 = 5 г и водорода массой m_2 = 2 г. Найти отношение теплоемкостей C_p/C_V этой смеси.

8.31. Двухатомный газ (ν = 2 моль) нагревают при постоянном объеме до температуры T_2 = 289 К. Определить количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление в n = 3 раза.

8.32. При изобарном нагревании некоторого идеального газа (ν = 0,8 моль) на ΔT = 90 К ему было сообщено количество теплоты Q = 2,1 кДж. Определить: 1) работу, совершаемую газом; 2) изменение внутренней энергии газа; 3) величину $\gamma = C_p / C_V$.

8.33. Азот массой m = 280 г расширяется в результате изобарного процесса при давлении p = 1 МПа. Определить: 1) работу расширения; 2) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота Q = 5 кДж, а начальная температура азота T_1 = 290 К.

8.34. Кислород объемом V = 1 л находится под давлением p = 1 МПа. Определить, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса?

8.35. Некоторый газ массой $m = 5$ г расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Работа расширения $A = 1$ кДж. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа.

8.36. Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты.

8.37. Давление азота, находящегося в сосуде объемом $V = 3{\cdot}10^{-3}$ м^3, после нагревания возросло на $\Delta p = 2{,}2{\cdot}10^5$ Па. Определить количество теплоты, сообщенное газу.

8.38. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет А = 2 кДж. Определить количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

8.39. При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление изменяется от $p_1 = 0{,}1$ МПа до $p_2 = 3{,}5$ МПа. Начальная температура воздуха $t_1 = 40$ °С. Найти температуру t_2 воздуха в конце сжатия.

8.40. Двухатомный газ, находящийся при давлении $p_1 = 2$ МПа и температуре $t_1 = 27$ °С, сжимается адиабатически от объема V_1 до объема $V_2 = 0{,}5V_1$. Найти температуру t_2 и давление p_2 газа после сжатия.

8.41. Двухатомный газ занимает объем $V_1 = 0{,}5$ л при давлении $p_1 = 50$ кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема V_2 и давления p_2 и затем при постоянном объеме V_2 охлаждается до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p_0 = 100$ кПа. Начертить график этого процесса. Найти объем V_2 и давление p_2.

8.42. На сколько градусов нужно изобарно нагреть $V = 4$ м^3 воздуха, находящегося в цилиндре при $t = 0$ °С, чтобы при поднятии поршня была совершена работа $A = 10^5$ Дж? Воздух находится под давлением $p = 1{,}5{\cdot}10^5$ Па.

8.43. Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от $p_1 = 200$ кПа до $p_2 = 100$ кПа. Затем он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p = 122$ кПа. Найти отношение C_p/C_v для этого газа.

8.44. Масса $m = 10$ г кислорода, находящегося при нормальных условиях, сжимается до объема $V_2 = 1{,}4$ л. Найти давление p_2 и температуру

t_2 кислорода после сжатия, если кислород сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найти работу A сжатия в каждом из этих случаев.

8.45. Азот массой $m = 28$ г, находящийся при температуре $t_1 = 40$ °С и давлении $p_1 = 100$ кПа, сжимается до объема $V_2 = 13$ л. Найти температуру t_2 и давление p_2 азота после сжатия, если азот сжимается: а) изотермически, б) адиабатически. Найти работу A сжатия в каждом из этих случаев.

8.46. Идеальный газ работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, холодильника $T_2 = 300$ К. Работа изотермического расширения газа составляет $A = 2$ кДж. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии холодильнику.

8.47. Многоатомный идеальный газ работает по циклу Карно, при этом в процессе адиабатического расширения объем газа увеличился в $n = 4$ раза. Определить термический КПД цикла.

8.48. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает работу $A = 73{,}5$ кДж. Температура нагревателя $t_1 = 100$ °С, температура холодильника $t_2 = 0$ °С. Найти КПД η цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отдаваемое за один цикл холодильнику.

8.49. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % количества теплоты, получаемое от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6{,}28$ кДж. Найти КПД η цикла и работу A, совершаемую за один цикл.

8.50. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_2 = 0$ °С кипятильнику с водой при температуре $t_1 = 100$ °С. Какую массу m_2 воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар массу $m_1 = 1$ кг воды в кипятильнике?

8.51. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 4$ кДж. Определить работу A газа при протекании цикла, если его термический КПД $\eta = 0{,}1$.

8.52. Идеальный многоатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД η цикла.

8.53. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 2/3 количества теплоты Q_1, полученного от нагревателя, отдает охладителю. Температура T_2 охладителя равна 280 К. Определить температуру T_1 нагревателя.

8.54. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находящийся под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К, нагревают при постоянном объеме до давления $p_2 = 0{,}2$ МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем изобарически был сжат до начального объема V_1. Построить график цикла. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его термический КПД η цикла.

8.55. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в четыре раза выше температуры T_2 охладителя. Какую долю ν количества теплоты, получаемого за один цикл от нагревателя, газ отдает охладителю?

8.56. Определить работу A_2 изотермического сжатия газа совершающего цикл Карно, КПД которого $\eta = 0{,}4$, если работа изотермического расширения равна $A_1 = 8$ Дж.

8.57. Газ, совершающий цикл Карно, отдал охладителю теплоту $Q_2 = 14$ кДж. Определить температуру T_1 нагревателя, если при температуре охладителя $T_2 = 280$ К работа цикла $A = 6$ кДж.

8.58. Газ, являясь рабочим веществом в цикле Карно, получил от нагревателя теплоту $Q_1 = 4{,}38$ кДж и совершил работу $A = 2{,}4$ кДж. Определить температуру нагревателя, если температура охладителя $T_2 = 273$ К.

8.59. Газ, совершающий цикл Карно, отдал охладителю 67 % теплоты, полученной от нагревателя. Определить температуру T_2 охладителя, если температура нагревателя $T_1 = 430$ К.

8.60. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя равна $T_1 = 500$ К, температура охладителя $T_2 = 250$ К. Определить термический КПД η цикла, а также работу A_1, совершенную рабочим веществом при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа $A_2 = 70$ Дж.

8.61. Найти изменение ΔS энтропии при плавлении массы $m = 1$ кг льда ($t = 0$ °С).

8.62. Массу $m = 640$ г расплавленного свинца при температуре плавления $t_{пл}$ вылили на лед ($t = 0$ °С). Найти изменение ΔS энтропии в этом процессе.

8.63. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы m = 8 г гелия от объема V_1 = 10 л до объема V_2 = 25 л.

8.64. Масса m = 10,5 г азота изотермически расширяется от объема V_1 = 2 л до объема V_2 = 5 л. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

8.65. При нагревании количества ν = 1 моль двухатомного газа его термодинамическая температура увеличивается от T_1 до $T_2 = 1{,}5T_1$. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

8.66. В результате нагревания массы m = 22 г азота его термодинамическая температура увеличилась от T_1 до $T_2 = 1{,}2T_1$, а энтропия увеличилась на ΔS = 4,19 Дж/К. При каких условиях производилось нагревание азота (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

8.67. Объем V_1 = 1 м^3 воздуха, находящегося при температуре t_1 = 0 °С и давлении p_1 = 98 кПа, изотермически расширяется до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

8.68. Смешали воду массой m_1 = 5 кг при температуре T_1 = 280 К с водой массой m_2 = 8 кг при температуре T_2 = 350 К. Найти: 1) температуру смеси; 2) изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании.

8.69. В результате изохорического нагревания водорода массой m = 1 г давление газа увеличилось в два раза. Определить изменение ΔS энтропии газа.

8.70. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой m = 4 г от объема V_1 = 5 л до объема V_2 = 9 л.

8.71. Кусок льда массой m = 200 г, взятый при температуре t_1 = –10 °С, был нагрет до температуры t_2 = 0 °С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры t = 10 °С. Определить изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

8.72. Лед массой m_1 = 2 кг при температуре t_1 = 0 °С был превращен в воду той же температуры с помощью пара, имеющего температуру t = 100 °С. Определить массу m_2 израсходованного пара. Каково изменение ΔS энтропии системы лед-пар?

8.73. Кислород массой m = 2 кг увеличил свой объем в n = 5 раз один раз изотермически, другой – адиабатически. Найти изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

8.74. Водород массой m = 100 г был изобарически нагрет так, что объем его увеличился в n = 3 раза, затем водород был изохорически охлажден так, что давление его уменьшилось в $n = 3$ раза. Найти изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

8.75. Температура в комнате объемом $V = 50$ м^3 поднялась от $t_1 = 15$ °C до $t_2 = 20$ °C. Определить приращение энтропии ΔS воздуха, содержащегося в комнате. Атмосферное давление предполагается неизменно равным $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па.

ОТВЕТЫ

1. Кинематика материальной точки

1.16. $\upsilon_{ср} = 7$ м/с; $a_{ср} = 4$ м/с^2.

1.17. $\upsilon_{ср1} = 3$ м/с^2; $\upsilon_{ср2} = 5$ м/с^2; $\upsilon_{ср3} = 7$ м/с^2; $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ м/с^2.

1.18. $t = 10$ с; $a_{ср} = 1{,}1$ м/с^2.

1.19. $\vec{\upsilon} = 4t\vec{i} + \vec{j}$; $\upsilon = 8{,}06$ м/с; $\vec{a} = 4\vec{i}$; $a = 4$ м/с^2.

1.20. $\vec{\upsilon} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\upsilon = 5{,}4$ м/с; $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{i} + 4\vec{k}$; $a = 5{,}4$ м/с^2.

1.21. α=45°.

1.22. $h = \upsilon_0^2 / 2g = 7{,}4$ м.

1.23. $\alpha = 60^\circ$; $S = 34{,}6$ м.

1.24. $t_n = 3{,}4$ с; $\upsilon = -20$ м/с.

1.25. $t = 3{,}16$ с; $S = 41{,}1$ м; $\upsilon = 26{,}7$ м/с; $\varphi = 61^\circ$.

1.26. $a_n = 9{,}15$ м/с^2; $a_\tau = 3{,}52$ м/с^2.

1.27. $R = 6{,}3$ м.

1.28. $\upsilon_0 = 9{,}4$ м/с^2; $\alpha = 55°$.

1.29. $t_1 = 1{,}4$ с; $t_2 = 58{,}6$ с; $\upsilon = 593$ м/с.

1.30. $t = 0{,}64$ с; $\upsilon_1 = \upsilon_2 = -3{,}14$ м/с.

1.31. $t = 5$ с; $S = 6{,}25$ см.

1.32. $r = 0{,}47$ м.

1.33. $a_n = 0{,}04$ м/с^2.

1.34. $\omega = 3{,}14$ рад/с; $\upsilon = 0{,}314$ м/с; $a_\tau = 0{,}314$ м/с^2; $a_n = 0{,}986$ м/с^2;
$a = 1{,}03$ м/с^2; $a = 1{,}03$ м/с^2; $\alpha = 18^\circ$.

1.35. $\varepsilon = 0{,}43$ рад/с^2.

1.36. $a = 12$ м/с^2; $N = 1{,}91$.

1.37. $a = 8{,}94$ м/с^2; $\alpha = 12^\circ$.

1.38. $t = 3{,}51$ с.

1.39. $a_\tau = 0{,}06$ м/с^2; $a_n = 4{,}5$ м/с^2.

1.40. $\omega = 14$ рад/с; $\upsilon = 1{,}4$ м/с; $\varepsilon = 12$ рад/с^2; $a_\tau = 1{,}2$ м/с^2; $a_n = 19{,}6$ м/с^2.

1.41. $R = 1{,}2$ м.

1.42. $\upsilon = 4$ м/с; $a_\tau = 2$ м/с^2; $a_n = 2$ м/с^2; $a = 2{,}83$ м/с^2.

1.43. $\upsilon = 5$ м/с; $a_\tau = -1$ м/с^2; $a_n = 0{,}5$ м/с^2; $a = 1{,}12$ м/с^2.

1.44. $a_\tau = 1{,}4$ м/с^2; $a_n = 28{,}9$ м/с^2; $a = 28{,}93$ м/с^2.

1.45. $a = 4{,}31$ м/с^2.

2. Динамика материальной точки

2.16. $a = 13{,}8$ м/с^2.

2.17. $F_1 = 10^3$ Н; $F_2 = 3 \cdot 10^3$ Н.

2.18. $F = 289$ Н.

2.19. $t = 163$ с.

2.20. $N = 2{,}5$ Н.

2.21. $a = 0{,}39$ м/с^2; $t = 22{,}7$ с; $\upsilon = 8{,}85$ м/с.

2.22. $\mu = 0{,}58$; $a = 4{,}9$ м/с^2.

2.23. $P_1 = 50$ кВт, $P_2 = 8{,}8$ кВт.

2.24. $\mu = 1/3$.

2.25. $F_1 = 7{,}5$ Н; $F_2 = 15$ Н.

2.26. $T = 8{,}4$ Н; $N = 4{,}2$ Н; $a = 1{,}4$ м/с^2.

2.27. $a_1 = 2{,}45$ м/с^2; $T = 7{,}35$ Н; $a_2 = 2{,}02$ м/с^2; $T_2 = 7{,}77$ Н.

2.28. $a_2 = 0{,}5$ м/с^2; $T = 37{,}2$ Н.

2.29. $a_1 = 1{,}02$ м/с^2; $T_1 = 5{,}9$ Н; $a_2 = 0{,}244$ м/с^2; $T_2 = 6{,}0$ Н.

2.30. $a_1 = 2$ м/с^2; $T_1 = 0{,}6$ Н; $a_2 = 1{,}2$ м/с^2; $T_2 = 0{,}66$ Н.

2.31. $\upsilon = 2{,}43$ м/с; $T_{\text{в}} = 0$; $T_{\text{н}} = 39{,}2$ Н.

2.32. $\nu = 2{,}1$ с$^{-1}$.

2.33. $m = 0{,}5$ кг.

2.34. $R = 1594$ м; $R = 709$ м.

2.35. $\alpha = 22^\circ$.

2.36. $N_1 = 9{,}8 \cdot 10^4$ Н; $N_2 = 9{,}13 \cdot 10^4$ Н; $N_3 = 10{,}47 \cdot 10^4$ Н.

2.37. $R = 0{,}2$ м.

2.38. $T_{\text{в}} = -0{,}59$ Н (стержень сжат); $T_{\text{н}} = 1{,}37$ Н (стержень растянут).

2.39. $\upsilon = 2{,}71$ м/с; $T = 9{,}8$ Н.

2.40. $T = 9{,}8$ Н; $\omega = 6{,}14$ рад/с.

2.41. $\alpha = 60^\circ$.

2.42. $T = 30$ Н.

2.43. $T = 23{,}7$ час.

2.44. $T = 2{,}56 \cdot 10^6$ с $\approx 27{,}3$ суток.

2.45. $T = 2\pi\sqrt{R^3 / GM}$.

3. Работа и энергия. Законы сохранения

3.16. $T = \dfrac{m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2}{2(m_1 + m_2)}$.

3.17. $Q = 4{,}3$ Дж.

3.18. $T = 3{,}33$ Дж.

3.19. $Q = 120$ Дж.

3.20. $u = 8$ м/с; $Q = 2 \cdot 10^3$ Дж.

3.21. $\upsilon = 825$ м/с; $\alpha = 14^\circ$.

3.22. $\upsilon_2 = 866$ м/с; $\alpha = 0^\circ$.

3.23. $\upsilon_2 = 471$ м/с; $\alpha = 45^\circ$.

3.24. $\alpha = \mathrm{arctg}\left[\dfrac{1}{2\upsilon}\left(\dfrac{h}{t} - \dfrac{gt}{2}\right)\right]$; $\upsilon_2 = \sqrt{4\upsilon^2 + \left(\dfrac{h}{t} - \dfrac{gt}{2}\right)^2}$.

3.25. $E_1 - E_2 = 3p^2 / 16m$.

3.26. $\eta = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.

3.27. $\upsilon_B = \upsilon_C = 2\sqrt{3}\upsilon_0 / 5$; $\upsilon_A = -\upsilon_0 / 5$.

3.28. $u = m\upsilon_0 / \sqrt{M(M + m)}$.

3.29. $\upsilon = \sqrt{2mgh / (m_1 + m_2)}$.

3.30. $u_2 = 2m_1\upsilon / (m_1 + m_2)$; $\eta = 4m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$.

3.31. $\upsilon = 546$ м/с.

3.32. $\eta = 0{,}167$.

3.33. $E = 41{,}25$ Дж; $\eta = 0{,}92$.

3.34. $\mu = 0{,}84$.

3.35. $\mu = 0{,}225$; $q = 5{,}7$ Дж.

3.36. $S = 100$ м, $A = 24{,}5$ Дж.

3.37. $M = 16{,}2$ кг.

3.38. $F_c = 23520$ Н.

3.39. $F_c = 3{,}6 \cdot 10^4$ Н.

3.40. $h = R / 3$.

3.41. $\upsilon = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2}\sqrt{5gl}$.

3.42. $h = R / 9$.

3.43. $S = 3{,}88$ м.
3.44. $D = 10$ см.
3.45. $M / m \approx 16$.
3.46. $F_{\min} = \mu g\left(\dfrac{m_1}{2} + m_2\right)$.
3.47. $F = (M + m)g$.
3.48. $a = \sqrt{\dfrac{2mgh}{R} + \left(\dfrac{mg}{R}\right)^2 + \dfrac{mg}{k}}$.
3.49. $F = 72{,}5$ Н.
3.50. $\upsilon = 3{,}6$ км/ч.
3.51. $h = 1{,}23$ м.
3.52. $k = 196$ Н/м.
3.53. $A = 2{,}5$ Дж.
3.54. $a = 16$ мм.
3.55. $F = 13{,}7$ Н.
3.56. $\upsilon_{\max} = \sqrt{2g(H - l) + mg^2 / k}$; $F_{\max} = mg\left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{2k}{mg}(H - l)}\right]$.
3.57. $a = 186{,}2$ м/с^2.
3.58. $A = 7{,}84$ Дж.
3.59. $A = 3{,}02$ Дж.
3.60. $Q = 21{,}9 \cdot 10^{-3}$ Дж.

4. Динамика вращательного движения

4.16. $M = 62{,}8$ Н · м; $N = 120$ об; $T = 47{,}3$ кДж; $L = 3768$ кг · м^2/с.
4.17. $M = 16$ Н · м.
4.18. $M = 0{,}71$ Н · м; $N = 200$ об.
4.19. $\varepsilon = 8$ рад/с^2; $t = 79$ с; $L = 3925$ кг · м^2/с.
4.20. $T = 27$ кДж; $L = 1800$ кг · м^2/с; $M = 90$ Н · м.
4.21. $M = 256{,}4$ Н · м; $N = 90$ об; $A = 1{,}45 \cdot 10^6$ Дж.
4.22. $J = 10^{38}$ кг · м^2; $L = 7 \cdot 10^{33}$ кг · м^2/с.
4.23. $a = 3$ м/с^2.
4.24. $J = 9{,}51$ кг/м^2.
4.25. $t = 1{,}11$ с; $T = 0{,}81$ Дж.
4.26. $a = 2{,}8$ м/с^2, $T_1 = 14$ Н; $T_2 = 12{,}6$ Н.

4.27. $\varepsilon = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{R\left(m_1 + m_2 + \dfrac{J}{R^2}\right)}$.

4.28. $a = 3{,}53$ м/с^2; $T_1 = 6{,}3$ Н; $T_2 = 4{,}5$ Н.

4.29. $\varphi = \dfrac{mgt^2}{2R\left(m + \dfrac{M}{2}\right)}$.

4.30. $\nu' = \nu\left(1 + \dfrac{mR^2}{J}\right)$.

4.31. $T = 24$ Дж.

4.32. $T = 0{,}1$ Дж.

4.33. $Q = 2{,}52 \cdot 10^{-3}$ Дж.

4.34. $T = 253$ Дж.

4.35. $S = 4{,}1$ м.

4.36. $a = 3{,}27$ м/с^2.

4.37. а) $\upsilon_1 / \upsilon_2 = 0{,}966$; б) $\upsilon_1 / \upsilon_2 = 0{,}933$.

4.38. $\dfrac{h_1}{h_2} = 0{,}933$.

4.39. $J = 1{,}3$ кг/м^2.

4.40. $a = 3{,}5$ м/с^2.

4.41. $\upsilon = 9{,}4$ м/с^2; $L = 470$ кг · м^2/с.

4.42. $\varphi = 240^\circ$.

4.43. $\alpha = 81{,}4^\circ$.

4.44. $\upsilon = 5{,}3\sqrt{l}$.

4.45. $\omega = \dfrac{7{,}7}{\sqrt{l}}$.

4.46. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$; $\upsilon = \sqrt{3gl}$.

4.47. $\upsilon = \dfrac{M + m}{m}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$; $E = \dfrac{gl}{m}(1 - \cos\alpha)(M + m)^2$.

4.48. $\omega = 7{,}34$ рад/с.

4.49. $\omega = 3m\upsilon / \left[l\left(\dfrac{1}{3}M + m\right)\right]$.

4.50. $t = \dfrac{3}{2}\dfrac{\omega R}{g\sin\alpha}$.

5. Элементы механики жидкостей и газов

5.16. $h = R$.

5.17. $\rho_т = \dfrac{3}{2}\rho_0 = 1{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

5.18. $\Delta h = 4$ см.

5.19. $V_n = V\left(1 - \rho_0 / 2\rho_ш\right)$.

5.20. $m_м = 0{,}245$ кг; $m_c = 0{,}026$ кг.

5.21. $V_n = 6{,}1 \cdot 10^{-5}$ м^3.

5.22. $p = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па.

5.23. $h = 0{,}32$ м.

5.24. $t = 178$ с.

5.25. $A = 30$ кДж.

5.26. $\upsilon = 4.1$ м/с.

5.27. $x = 3$.

5.28. $\Delta t = 75$ с.

5.29. $t = 107$ с.

5.30. $\upsilon = 1{,}71$ м/с.

5.31. $\upsilon = 9{,}8$ м/с

5.32. $\upsilon = 9{,}5$ м/с.

5.33. $\upsilon = 3$ м/с.

5.34. $\upsilon = 0{,}12$ м/с.

5.35. $\mathrm{Re} = 1800 < 3000$.

6. Элементы специальной теории относительности

6.16. $\upsilon = 0{,}1c = 3 \cdot 10^7$ м/с.

6.17. $\upsilon = 0{,}661c = 2 \cdot 10^8$ м/с.

6.18. $l = 0{,}714$ м.

6.19. $\upsilon = 6 \cdot 10^7$ м/с.

6.20. $l = 4{,}5$ м.

6.21. $\upsilon = 0{,}91c = 2{,}73 \cdot 10^8$ м/с.

6.22. $\upsilon = c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

6.23. $\upsilon = 0{,}994c = 2{,}982 \cdot 10^8$ м/с.

6.24. $\eta = 70{,}7$.

6.25. $\upsilon = 0{,}995c = 2{,}985 \cdot 10^8$ м/с.

6.26. $p' = 1{,}73 \cdot 10^8$ кг · м/с; $p = 2{,}48 \cdot 10^8$ кг · м/с.

6.27. $\upsilon = 0{,}943c = 2{,}83 \cdot 10^8$ м/с.

6.28. $A = 0{,}417 m_0 c^2$.

6.29. $\upsilon = 0{,}866c$.

6.30. $\upsilon = 0{,}76c = 2{,}27 \cdot 10^8$ м/с.

7. Основы молекулярной физики

7.16. $\mu = 0{,}0289$ кг/моль.

7.17. $p = 7{,}48 \cdot 10^5$ Па; $\mu = 0{,}003$ кг/моль.

7.18. $\rho = 0{,}51$ кг/м^3.

7.19. $\mu = 0{,}0046$ кг/м^3; $V = 0{,}0118$ м^3.

7.20. $m_0 = 34{,}5$ г.

7.21. $m^* = 26$ кг.

7.22. $T_1 = 1$ К; $T_2 = 2$ К.

7.23. $T_1 = 404$ К = 131 °С.

7.24. $\eta = 4\,\%$.

7.25. $m = 2{,}6$ кг.

7.26. $T_2 = 1400$ К.

7.27. $V_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3; $T_2 = 1170$ К; $\rho_1 = 4{,}14$ кг/м^3; $\rho_2 = 1$ кг/м^3.

7.28. $p = 3{,}67 \cdot 10^5$ Па.

7.29. $p_2 = 1{,}37 \cdot 10^6$ Па.

7.30. $m = 9{,}7$ кг.

7.31. $n = 7{,}53 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$; $N = 30{,}1 \cdot 10^{26}$.

7.32. $p = 768$ Па.

7.33. $\upsilon_{\text{вер}} = 478$ м/с.

7.34. $U_{\text{к}} = 1{,}5 \cdot 10^{-20}$ Дж.

7.35. $U_{\text{к}1} = 1{,}86 \cdot 10^{-5}$ Дж; $U_{\text{к}2} = 0{,}58 \cdot 10^{-3}$ Дж.

7.36. $m = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг; $p = 1{,}67 \cdot 10^5$ Па.

7.37. $p_1 - p_2 = 4{,}14 \cdot 10^6$.

7.38. $E_{\text{к}} = 8{,}28 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\langle \upsilon_{\text{квHe}} \rangle = 1579$ м/с; $\langle \upsilon_{\text{квO}_2} \rangle = 558$ м/с;

$\langle \upsilon_{\text{квH}_2\text{O}} \rangle = 774$ м/с.

7.39. $N = 1{,}88 \cdot 10^{25}$.

7.40. $\rho = 0{,}74$ кг/м^3.

7.41. $T = 20127$ К.
7.42. $T = 1600$ К.
7.43. $\langle \upsilon \rangle = 922$ м/с.
7.44. $x = 1{,}88 \cdot 10^{14}$.
7.45. $n_0 / n = \exp(-mg\Delta h / RT)$.
7.46. $p = 1{,}123 \cdot 10^5$ Па.
7.47. $\eta = 0{,}778$.
7.48. $h = 7{,}983$ км.
7.49. $\rho_0 = 1{,}28$ кг/м^3; $\rho = 0{,}778$ кг/м^3.
7.50. $\langle \lambda \rangle = 5{,}88 \cdot 10^{-7}$ м.
7.51. $\langle \lambda \rangle = 1{,}4 \cdot 10^{-7}$ м.
7.52. $\langle z \rangle = 4{,}9 \cdot 10^9$.
7.53. 1) $\lambda_1 = \lambda_2$; $\langle z_1 \rangle / \langle z_2 \rangle = \sqrt{q}$; 2) $\langle \lambda_1 \rangle / \langle \lambda_2 \rangle = \frac{1}{q}$; $\langle z_1 \rangle / \langle z_2 \rangle = q$.
7.54. $\chi = 0{,}021$ Вт/(м · К).
7.55. $p_2 / p_1 = 2$.
7.56. $d_2 / d_1 = 1{,}07$.
7.57. $D = 0{,}2$ см^2/с.
7.58. $\eta_D = 0{,}798$; $\eta_\eta = 0{,}798$; $\eta_\chi = 0{,}957$.
7.59. $D = 2{,}47 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.
7.60. $\langle \lambda \rangle = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ м.

8. Основы термодинамики

8.16. $U = 3 \cdot 10^4$ Дж.
8.17. $c_p = 897$ Дж/кг · К; $c_V = 640$ Дж/кг · К.
8.18. $c_p = 969{,}5$ Дж/кг · К; $c_V = 692{,}5$ Дж/кг · К.
8.19. $\gamma = 1{,}4$.
8.20. $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
8.21. $C_{\text{газа}} = 5{,}49$ Дж/кг.
8.22. $C_p = 28{,}89$ Дж/моль · К; $C_V = 20{,}58$ Дж/моль · К.
8.23. Азот: $c_p = 1039$ Дж/кг · К; $c_V = 742$ Дж/кг · К;
$C_p = 20{,}78$ Дж/моль · К; $C_V = 29{,}09$ Дж/моль · К.

Гелий: $c_p = 5194$ Дж/кг · К; $c_V = 3118$ Дж/кг · К.

$C_p = 20{,}78$ Дж/моль · К; $C_V = 12{,}47$ Дж/моль · К.

8.24. $C_{газа} = 30{,}77$ Дж/К;

8.25. $C_{газа} = 2{,}747$ Дж/К.

8.26. $C_p = 23{,}545$ Дж/моль · К;

$C_V = 15{,}235$ Дж/моль · К.

8.27. $c_p = 17659$ Дж/кг · К;

$c_V = 11426$ Дж/кг · К.

8.28. $c_p = 952$ Дж/кг · К;

$c_V = 680$ Дж/кг · К.

8.29. $C_p = 27$ Дж/моль · К;

$C_V = 18{,}7$ Дж/моль · К.

8.30. $C_p / C_V = 1{,}51$.

8.31. $Q = 8$ кДж.

8.32. $A = 600$ Дж; $\Delta U = 1500$ Дж; $\gamma = 1{,}4$.

8.33. $A = 1{,}43$ кДж; $V_2 = 25{,}5$ л.

8.34. $Q = 3{,}5$ кДж.

8.35. $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 930$ м/с.

8.36. $\Delta U = 0$, $A = 2$ кДж; $Q = 2$ кДж.

8.37. $Q = 1650$ Дж.

8.38. $T = \text{const}$; $Q = A = 2$ кДж;

$p = \text{const}$; $Q = 3{,}5A = 7$ кДж.

8.39. $t_2 = 591$ °С.

8.40. $p_2 = 5{,}28$ МПа; $t_2 = 123$ °С.

8.41. $V_2 = 0{,}25$ л; $p_2 = 1{,}32 \cdot 10^5$ Па.

8.42. $\Delta t = 45{,}5$ °С.

8.43. $C_p / C_V = 1{,}4$.

8.44. а) $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Па; $T_2 = 273$ К; $A = -1140$ Дж;

б) $p_2 = 9{,}5 \cdot 10^5$ Па; $T_2 = 520$ К; $A = -1590$ Дж.

8.45. а) $T_2 = T_1 = 313$ К = 40 °С; $p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па; $A = -1800$ Дж;

б) $T_2 = 413$ К = 140 °С; $p_2 = 2{,}6 \cdot 10^5$ Па; $A = -2080$ Дж.

8.46. $\eta = 40\,\%$, $Q = 3$ кДж.

8.47. $\eta = 37\,\%$.

8.48. $\eta = 26{,}8\,\%$; $Q_1 = 2{,}47 \cdot 10^5$ Дж; $Q_2 = 2 \cdot 10^5$ Дж.

8.49. $\eta = 20\,\%$; $A = 1{,}26 \cdot 10^3$ Дж.

8.50. $m_2 = 4{,}94$ кг.

8.51. $A = 400$ Дж.

8.52. $\eta = 43\,\%$.

8.53. $T_1 = 420$ К.

8.54. $T_2 = 600$ К; $T_3 = T_2 = 600$ К; $\eta = 0{,}1 = 10\,\%$.

8.55. $\nu = 0{,}25$.

8.56. $A_2 = 4{,}8$ Дж.

8.57. $T_1 = 400$ К.

8.58. $T_1 = 604$ К.

8.59. $T_2 = 287$ К.

8.60. $\eta = 50\,\%$; $A_1 = 140$ Дж.

8.61. $\Delta S = 1230$ Дж/К.

8.62. $\Delta S = 63$ Дж/К.

8.63. $\Delta S = 38{,}1$ Дж/К.

8.64. $\Delta S = 2{,}9$ Дж/К.

8.65. а) $\Delta S = 8{,}5$ Дж/К; б) $\Delta S = 11{,}8$ Дж/К.

8.66. Нагревание производилось при $p = \mathrm{const}$.

8.67. $\Delta S = 249$ Дж/К.

8.68. $T_x = 323$ К; $\Delta S = 302$ Дж/К.

8.69. $\Delta S = 7{,}2$ Дж/К.

8.70. $\Delta S = 2{,}44$ Дж/К.

8.71. $\Delta S = 292$ Дж/К.

8.72. $m_2 = 1{,}56 \cdot 10^{-3}$ кг; $\Delta S = 0{,}43$ Дж/К.

8.73. а) $\Delta S = 836$ Дж/К; б) $\Delta S = 0$.

8.74. $\Delta S = 456$ Дж/К.

8.75. $\Delta S = 1059$ Дж/К.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С ПОСОБИЕМ

1.1. Усвоение теоретического материала

Работа студентов по изучению курса физики слагается из следующих элементов: посещение лекций, лабораторных и практических занятий; самостоятельное изучение разделов и тем курса по учебникам и учебным пособиям с последующей самопроверкой и решением типовых задач; выполнение контрольных работ, домашних или расчетных заданий; оформление отчетов по выполненным лабораторным работам, сдача зачетов и экзаменов по всему курсу.

В данном учебном пособии лекционный материал представлен в сжатом, конспективном виде. Акцент делается на ознакомление с основными теоретическими положениями рассматриваемых тем. Это является оправданным при работе с наименее подготовленными студентами дневного отделения, которые не всегда в состоянии отделить главный материал от второстепенного, и особенно при работе со студентами вечернего (очно-заочного) и заочного отделений. Практическое применение полученных знаний иллюстрируется в ходе решения типовых задач. В конце каждой темы приведено большое количество вопросов и задач (от 30 до 75), которые могут быть использованы как при самостоятельном изучении теоретического материала, так и при проведении практических занятий и организации самостоятельной работы студентов. Таблице вариантов расчетных и контрольных заданий дает возможность использовать предложенные задачи в тех случаях, когда программой предусмотрено выполнение расчетного или контрольного задания. Ниже приводятся 60 вариантов расчетного задания (табл. 1.2).

1.2. Таблица вариантов расчетных и контрольных заданий

1	1.1 1.16	2.15 2.30 2.45	3.1 3.16	3.31 3.60	4.1 4.16 4.26	5.15 5.35	6.1 6.16	7.15 7.16	7.26 7.36 7.46	8.1 8.16 8.31	8.41 8.51 8.61
2	1.2 1.17	2.14 2.29 2.44	3.2 3.17	3.32 3.59	4.2 4.17 4.27	5.14 5.34	6.2 6.17	7.14 7.17	7.27 7.37 7.47	8.2 8.17 8.32	8.42 8.52 8.62
3	1.3 1.18	2.13 2.28 2.43	3.3 3.18	3.33 3.58	4.3 4.18 4.28	5.13 5.33	6.3 6.18	7.13 7.18	7.28 7.38 7.48	8.3 8.18 8.33	8.43 8.53 8.63
4	1.4 1.19	2.12 2.27 2.42	3.4 3.19	3.34 3.57	4.4 4.19 4.29	5.12 5.32	6.4 6.19	7.12 7.19	7.29 7.39 7.49	8.4 8.19 8.34	8.44 8.54 8.64
5	1.5 1.20	2.11 2.26 2.41	3.5 3.20	3.35 3.36	4.5 4.20 4.30	5.11 5.31	6.5 6.20	7.11 7.20	7.30 7.40 7.50	8.5 8.20 8.35	8.45 8.55 8.65
6	1.6 1.21	2.10 2.25 2.40	3.6 3.21	3.36 3.55	4.6 4.21 4.31	5.10 5.30	6.6 6.21	7.10 7.21	7.31 7.41 7.51	8.6 8.21 8.36	8.46 8.56 8.66
7	1.7 1.22	2.9 2.24 2.39	3.7 3.22	3.37 3.54	4.7 4.22 4.32	5.9 5.29	6.7 6.22	7.9 7.22	7.32 7.42 7.52	8.7 8.22 8.37	8.47 8.57 8.67
8	1.8 1.23	2.8 2.23 2.38	3.8 3.23	3.38 3.53	4.8 4.23 4.33	5.8 5.28	6.8 6.23	7.8 7.23	7.33 7.43 7.53	8.9 8.23 8.38	8.48 8.58 8.68
9	1.9 1.24	2.7 2.22 2.37	3.9 3.24	3.39 3.52	4.9 4.24 4.34	5.7 5.27	6.9 6.24	7.7 7.24	7.34 7.44 7.54	8.10 8.24 8.39	8.49 8.59 8.69
10	1.10 1.25	2.6 2.21 2.36	3.10 3.25	3.40 3.51	4.10 4.25 4.35	5.6 5.26	6.10 6.25	7.6 7.25	7.35 7.45 7.55	8.11 8.25 8.40	8.50 8.60 8.70
11	1.11 1.26	2.5 2.20 2.35	3.11 3.26	3.41 3.50	4.11 4.16 4.36	5.5 5.25	6.11 6.26	7.5 7.20	7.26 7.45 7.56	8.12 8.26 8.40	8.41 8.60 8.71
12	1.12 1.27	2.4 2.19 2.34	3.12 3.27	3.42 3.49	4.12 4.17 4.37	5.4 5.24	6.12 6.27	7.4 7.25	7.27 7.44 7.57	8.13 8.27 8.39	8.42 8.59 8.72

Продолжение табл. 1.2

13	1.13 1.28	2.3 2.18 2.33	3.13 3.28	3.43 3.48	4.13 4.18 4.38	5.3 5.23	6.13 6.28	7.3 7.24	7.28 7.43 7.58	8.14 8.28 8.38	8.43 8.58 8.73
14	1.14 1.29	2.2 2.17 2.32	3.14 3.29	3.44 3.47	4.14 4.19 4.39	5.2 5.22	6.14 6.29	7.2 7.23	7.29 7.42 7.59	8.15 8.29 8.37	8.44 8.57 8.74
15	1.15 1.30	2.1 2.16 2.31	3.15 3.30	3.45 3.46	4.15 4.20 4.40	5.1 5.21	6.15 6.30	7.1 7.22	7.30 7.41 7.60	8.8 8.30 8.36	8.45 8.56 8.75
16	1.14 1.31	2.15 2.29 2.43	3.2 3.18	3.35 3.54	4.9 4.21 4.41	5.15 5.20	6.15 6.20	7.10 7.21	7.31 7.40 7.48	8.9 8.21 8.35	8.46 8.55 8.74
17	1.13 1.32	2.14 2.28 2.42	3.3 3.19	3.36 3.53	4.10 4.22 4.42	5.14 5.19	6.14 6.19	7.11 7.20	7.32 7.39 7.49	8.10 8.22 8.34	8.47 8.54 8.73
18	1.12 1.33	2.13 2.27 2.41	3.4 3.20	3.37 3.52	4.11 4.23 4.43	5.13 5.18	6.13 6.18	7.12 7.19	7.33 7.38 7.50	8.11 8.23 8.33	8.48 8.53 8.72
19	1.11 1.34	2.12 2.26 2.40	3.5 3.21	3.38 3.51	4.12 4.24 4.44	5.12 5.17	6.12 6.17	7.13 7.18	7.34 7.37 7.51	8.12 8.24 8.32	8.49 8.52 8.71
20	1.10 1.35	2.11 2.25 2.39	3.6 3.22	3.39 3.50	4.13 4.25 4.45	5.11 5.16	6.11 6.16	7.14 7.17	7.35 7.36 7.52	8.13 8.25 8.31	8.50 8.51 8.70
21	1.9 1.36	2.10 2.24 2.38	3.7 3.23	3.40 3.49	4.14 4.24 4.46	5.10 5.17	6.10 6.21	7.15 7.16	7.35 7.40 7.53	8.14 8.26 8.35	8.52 8.51 8.69
22	1.8 1.37	2.9 2.23 2.37	3.8 3.24	3.41 3.48	4.15 4.23 4.47	5.9 5.18	6.9 6.22	7.1 7.21	7.34 7.41 7.54	8.15 8.27 8.36	8.53 8.52 8.68
23	1.7 1.38	2.8 2.22 2.36	3.9 3.25	3.42 3.47	4.8 4.22 4.48	5.8 5.19	6.8 6.23	7.2 7.22	7.33 7.42 7.55	8.1 8.28 8.37	8.46 8.53 8.67
24	1.6 1.39	2.7 2.21 2.35	3.10 3.26	3.43 3.46	4.7 4.21 4.49	5.7 5.20	6.7 6.24	7.3 7.23	7.32 7.43 7.56	8.2 8.29 8.38	8.47 8.54 8.66

Продолжение табл. 1.2

25	1.5 1.40	2.6 2.20 2.34	3.11 3.27	3.44 3.55	4.6 4.20 4.50	5.6 5.21	6.6 6.25	7.4 7.24	7.31 7.44 7.57	8.3 8.17 8.39	8.48 8.55 8.65
26	1.4 1.41	2.5 2.19 2.33	3.12 3.28	3.45 3.56	4.5 4.19 4.49	5.5 5.22	6.5 6.26	7.5 7.25	7.30 7.45 7.58	8.4 8.16 8.40	8.49 8.56 8.64
27	1.3 1.42	2.4 2.18 2.32	3.13 3.29	3.34 3.57	4.4 4.18 4.48	5.4 5.23	6.4 6.27	7.6 7.24	7.29 7.36 7.59	8.5 8.18 8.34	8.50 8.57 8.63
28	1.2 1.43	2.3 2.17 2.31	3.14 3.30	3.33 3.58	4.3 4.17 4.47	5.3 5.24	6.3 6.28	7.7 7.23	7.28 7.37 7.60	8.6 8.19 8.33	8.50 8.58 8.62
29	1.1 1.44	2.2 2.16 2.44	3.15 3.16	3.32 3.59	4.2 4.16 4.46	5.2 5.25	6.2 6.29	7.8 7.22	7.27 7.38 7.47	8.7 8.20 8.32	8.49 8.59 8.61
30	1.15 1.45	2.1 2.30 2.45	3.1 3.17	3.31 3.60	4.1 4.25 4.45	5.1 5.26	6.1 6.30	7.9 7.21	7.26 7.39 7.46	8.8 8.21 8.31	8.48 8.60 8.75
31	1.1 1.20	2.4 2.17 2.40	3.2 3.18	3.40 3.59	4.7 4.24 4.44	5.5 5.27	6.6 6.23	7.10 7.20	7.31 7.40 7.46	8.9 8.22 8.31	8.47 8.59 8.71
32	1.2 1.21	2.5 2.18 2.41	3.3 3.30	3.39 3.58	4.8 4.23 4.43	5.6 5.28	6.7 6.24	7.11 7.19	7.32 7.41 7.47	8.10 8.23 8.32	8.46 8.58 8.72
33	1.3 1.22	2.6 2.19 2.42	3.4 3.29	3.38 3.57	4.9 4.22 4.42	5.7 5.29	6.8 6.25	7.12 7.18	7.33 7.42 7.48	8.11 8.24 8.33	8.45 8.57 8.73
34	1.4 1.23	2.7 2.20 2.43	3.5 3.28	3.37 3.56	4.10 4.21 4.43	5.8 5.30	6.9 6.26	7.12 7.17	7.34 7.43 7.49	8.12 8.25 8.34	8.44 8.56 8.74
35	1.5 1.24	2.8 2.21 2.44	3.6 3.27	3.36 3.55	4.11 4.20 4.44	5.9 5.31	6.10 6.27	7.14 7.16	7.35 7.44 7.50	8.13 8.26 8.35	8.43 8.55 8.75
36	1.6 1.25	2.9 2.22 2.45	3.7 3.26	3.35 3.54	4.12 4.19 4.45	5.10 5.35	6.11 6.28	7.15 7.16	7.35 7.45 7.51	8.14 8.27 8.36	8.42 8.54 8.75

Продолжение табл. 1.2

37	1.7 1.26	2.10 2.23 2.44	3.8 3.25	3.34 3.53	4.13 4.18 4.46	5.11 5.33	6.12 6.29	7.15 7.17	7.34 7.45 7.52	8.15 8.28 8.37	8.41 8.53 8.74
38	1.8 1.27	2.11 2.24 2.43	3.9 3.24	3.33 3.52	4.14 4.17 4.47	5.12 5.34	6.13 6.30	7.14 7.18	7.33 7.44 7.53	8.15 8.29 8.38	8.50 8.52 8.73
39	1.9 1.28	2.12 2.25 2.42	3.10 3.23	3.32 3.51	4.15 4.16 4.48	5.13 5.35	6.14 6.30	7.13 7.19	7.32 7.43 7.54	8.14 8.30 8.39	8.49 8.51 8.72
40	1.10 1.29	2.13 2.26 2.41	3.11 3.22	3.31 3.50	4.15 4.16 4.49	5.14 5.35	6.15 6.29	7.12 7.20	7.31 7.42 7.55	8.13 8.30 8.40	8.48 8.51 8.71
41	1.11 1.30	2.14 2.27 2.40	3.12 3.21	3.45 3.49	4.14 4.17 4.50	5.15 5.34	6.15 6.28	7.11 7.21	7.30 7.41 7.56	8.12 8.29 8.40	8.47 8.52 8.70
42	1.12 1.31	2.15 2.28 2.39	3.13 3.20	3.44 3.48	4.13 4.18 4.26	5.15 5.33	6.14 6.27	7.10 7.22	7.29 7.40 7.57	8.11 8.28 8.39	8.46 8.69
43	1.13 1.32	2.15 2.29 2.38	3.14 3.19	3.43 3.47	4.12 4.19 4.48	5.14 5.32	6.13 6.26	7.9 7.23	7.28 7.39 7.58	8.10 8.27 8.38	8.45 8.53 8.68
44	1.14 1.33	2.14 2.30 2.37	3.15 3.18	3.42 3.46	4.11 4.20 4.49	5.13 5.31	6.12 6.25	7.8 7.24	7.27 7.38 7.59	8.9 8.26 8.37	8.44 8.54 8.67
45	1.15 1.34	2.13 2.30 2.36	3.1 3.17	3.41 3.60	4.10 4.21 4.50	5.12 5.30	6.11 6.24	7.7 7.25	7.26 7.37 7.60	8.8 8.25 8.36	8.43 8.55 8.66
46	1.15 1.35	2.12 2.29 2.35	3.2 3.16	3.40 3.59	4.9 4.22 4.30	5.11 5.29	6.10 6.23	7.6 7.25	7.26 7.36 7.60	8.7 8.24 8.35	8.42 8.56 8.65
47	1.14 1.36	2.11 2.28 2.34	3.3 3.30	3.39 3.58	4.8 4.23 4.31	5.10 5.28	6.9 6.22	7.5 7.24	7.27 7.36 7.59	8.6 8.23 8.34	8.41 8.57 8.64
48	1.13 1.37	2.10 2.27 2.33	3.4 3.29	3.38 3.57	4.7 4.24 4.35	5.9 5.27	6.8 6.21	7.4 7.23	7.28 7.37 7.58	8.5 8.22 8.33	8.50 8.58 8.63

Окончание табл. 1.2

49	1.12 1.38	2.9 2.26 2.32	3.5 3.28	3.37 3.56	4.6 4.25 4.33	5.8 5.26	6.7 6.20	7.3 7.22	7.29 7.38 7.57	8.4 8.21 8.32	8.49 8.59 8.62
50	1.11 1.39	2.8 2.25 2.31	3.6 3.27	3.36 3.55	4.5 4.21 4.34	5.7 5.25	6.6 6.19	7.2 7.21	7.30 7.39 7.56	8.3 8.20 8.31	8.48 8.60 8.61
51	1.10 1.40	2.1 2.24 2.32	3.7 3.26	3.35 3.54	4.4 4.20 4.35	5.6 5.24	6.5 6.18	7.1 7.20	7.31 7.40 7.55	8.2 8.19 8.40	8.47 8.60 8.75
52	1.9 1.41	2.2 2.23 2.31	3.8 3.25	3.34 3.53	4.3 4.19 4.36	5.5 5.23	6.4 6.17	7.1 7.19	7.32 7.41 7.54	8.1 8.18 8.39	8.46 8.59 8.74
53	1.8 1.42	2.3 2.22 2.33	3.9 3.24	3.33 3.52	4.2 4.18 4.37	5.4 5.22	6.3 6.16	7.2 7.18	7.33 7.42 7.53	8.1 8.17 8.38	8.45 8.58 8.73
54	1.7 1.43	2.7 2.21 2.34	3.9 3.23	3.32 3.51	4.1 4.17 4.38	5.3 5.21	6.2 6.16	7.3 7.17	7.34 7.43 7.52	8.2 8.16 8.37	8.44 8.57 8.72
55	1.6 1.44	2.6 2.20 2.35	3.11 3.22	3.31 3.50	4.1 4.16 4.39	5.2 5.20	6.1 6.17	7.4 7.16	7.35 7.44 7.51	8.3 8.16 8.36	8.43 8.56 8.71
56	1.5 1.16	2.5 2.19 2.45	3.12 3.21	3.45 3.49	4.2 4.16 4.40	5.1 5.16	6.1 6.18	7.5 7.16	7.35 7.45 7.50	8.4 8.17 8.35	8.42 8.55 8.70
57	1.4 1.17	2.4 2.16 2.37	3.13 3.20	3.44 3.48	4.3 4.17 4.41	5.1 5.18	6.2 6.19	7.6 7.17	7.34 7.45 7.49	8.5 8.18 8.34	8.41 8.54 8.69
58	1.3 1.18	2.3 2.17 2.38	3.14 3.19	3.43 3.47	4.5 4.18 4.42	5.2 5.17	6.3 6.20	7.7 7.18	7.33 7.44 7.48	8.6 8.19 8.31	8.50 8.53 8.68
59	1.2 1.19	2.2 2.16 2.39	3.15 3.18	3.42 3.46	4.6 4.19 4.43	5.3 5.16	6.4 6.21	7.8 7.19	7.32 7.43 7.47	8.7 8.20 8.32	8.49 8.52 8.67
60	1.1 1.45	2.1 2.18 2.36	3.1 3.17	3.41 3.60	4.4 4.25 4.44	5.4 5.19	6.5 6.22	7.9 7.20	7.31 7.42 7.46	8.8 8.21 8.33	8.48 8.51 8.66

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Выполнение лабораторных работ является неотъемлемой частью изучения курса физики. В ходе лабораторных работ студенты не только углубляют свои теоретические познания, но также знакомятся с измерительной аппаратурой и методами физических измерений, приобретают навыки ведения самостоятельных экспериментальных исследований. Вопросы, касающиеся правильной обработки результатов измерений физических величин, неизбежно возникают в процессе выполнения каждой лабораторной работы и поэтому требуют отдельного рассмотрения. Ниже приводятся краткие сведения из теории учета погрешностей при проведении физических измерений.

2.1. Классификация погрешностей

При измерении физических величин различают два типа измерений: прямые и косвенные. При прямом измерении значение искомой величины определяется непосредственно с помощью измерительного прибора. При косвенном измерении значение искомой величины вычисляется по известной зависимости между ней и непосредственно измеряемыми величинами.

Каждый результат проведенного измерения некоторой физической величины находится с некоторой точностью. Точность измерений отражает близость результатов к истинному значению измеряемой величины, а погрешности измерений характеризуют расхождение между истинными и полученными результатами.

Погрешности различаются по характеру проявления. Грубые погрешности (промахи) обычно связаны либо с неисправностью измерительной аппаратуры, либо с ошибкой экспериментатора. Результаты измерений, соответствующие грубым погрешностям, нужно отбрасывать и взамен проводить новые измерения.

Систематическими погрешностями называются погрешности, которые остаются постоянными или меняются по определенному закону при многократных измерениях величин. Они могут быть обусловлены методическими погрешностями, связанными с несовершенством метода измерения, или приборными погрешностями, связанными с несовершенством измерительных приборов, либо их неправильной установкой. Использование более точных методов и более совершенных приборов позволяет уменьшить систематические погрешности, но полностью устранить их невозможно.

Случайными погрешностями измерений называются погрешности, абсолютная величина и знак которых изменяются при многократных измерениях физической величины. Они вызываются большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Случайные погрешности могут быть уменьшены путем многократного повторения измерений, в результате чего происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений.

Правильная оценка полученного результата включает в себя учет как случайных, так и систематических погрешностей.

2.2. Распределение случайных погрешностей прямых измерений

Случайные погрешности прямых измерений относятся к классу случайных величин и изучаются в теории вероятностей и математической статистике.

В основе теории случайных погрешностей (систематические погрешности предполагаются отсутствующими), лежит тот факт, что появление некоторого значения исследуемой физической величины в процессе измерения хотя и является случайным событием, но подчиняется определенным закономерностям:

случайные погрешности одинаковой величины, но разных знаков (как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения истинной величины) встречаются одинаково часто;

с ростом величины погрешности (по модулю) уменьшается вероятность ее появления, т.е. большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.

Такое распределение случайных погрешностей удобнее всего проиллюстрировать графически. Считаем, что при проведении серии n измерений одной и той же физической величины x может быть получено множество значений (n штук), случайным образом распределенных вблизи ее истинного значения. Чтобы построить кривую распределения ошибок физической величины x, область полученных значений этой величины (от максимального до минимального значения) делят на малые интервалы одинаковой ширины δx и рассчитывают относительную частоту n_i / n попадания результатов в указанный интервал (n_i – число измерений, результаты которых попали в рассматриваемый i-тый интервал). Полученную таким образом диаграмму (рис. П1) называют гистограммой

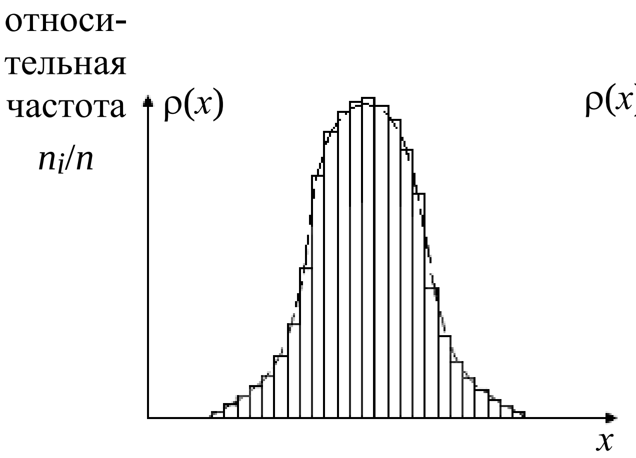


Рис. П1

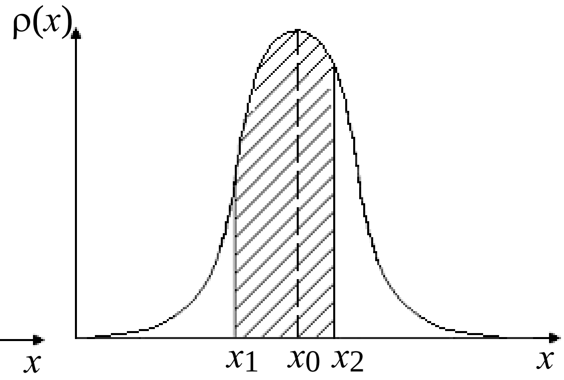


Рис. П2

При увеличении числа n измерений это распределение стремится к теоретическому распределению вероятностей, которое характеризует результаты бесконечного числа опытов и в котором площадь каждой полоски пропорциональна вероятности $P(x_i)$ попадания измеряемой величины в i-тый интервал от $x_i - \delta x/2$ до $x_i + \delta x/2$. Естественно, что распределение вероятностей нормировано на единицу,

$$\sum_i P(x_i) = 1,$$

поскольку оно отражает вероятность всех возможных событий.

Теоретическое распределение вероятностей при стремлении уменьшении интервала δx к нулю переходит в непрерывную кривую $\rho(x)$, изображенную на рис. П1 пунктиром, – кривую распределения ошибок. Функцию $\rho(x)$ называют плотностью распределения вероятностей. Она всегда неотрицательна и также подчинена условию нормировки в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1.$$

С ее помощью можно определить вероятность попадания результата измерения величины x в интервал от x_1 до x_2

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx,$$

равную площади фигуры, заштрихованной на рис. П2.

Плотность распределения вероятностей $\rho(x)$ наиболее полно характеризует совокупность случайных значений физической величины x. Обычно она имеет вид колоколообразной кривой, максимум которой соответствует истинному значению x_0 измеряемой величины.

В рамках теории ошибок можно показать, что при бесконечно большом числе измерений кривая распределения случайных ошибок $\rho(x)$ описывается нормальным распределением Гаусса. На практике в силу конечного числа измерений и других причин встречаются и другие законы распределения, многие из которых, однако, в предельном случае переходят в нормальное распределение. Важность распределения Гаусса определяется еще и тем, что в той области, где ошибки измерений не слишком велики, оно часто находится в очень хорошем согласии с экспериментом.

В случае распределения Гаусса плотность вероятностей $\rho(x)$ для случайной переменной x имеет вид

$$\rho(x) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-1} \exp\left[-(x - x_0)/2\sigma^2\right], \tag{П1}$$

где σ^2 – параметр, называемый дисперсией распределения.

Формула Гаусса описывает симметричную колоколообразную кривую (рис. П3) с центром в точке x_0, соответствующей истинному значению измеряемой физической величины. По обе стороны от максимума $\rho(x)$ монотонно спадает и асимптотически стремится к нулю, причем этот спад и сама форма кривых Гаусса характеризуется определяемым дисперсией распределения параметром $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$, отражающим разброс случайных значений измеряемой величины относительно центра распределения. Его называют среднеквадратичным отклонением (стандартной ошибкой). На рис. П3 приведены кривые плотности вероятностей для нормального распределения при значениях параметра $\sigma = 0{,}5; 1; 2$.

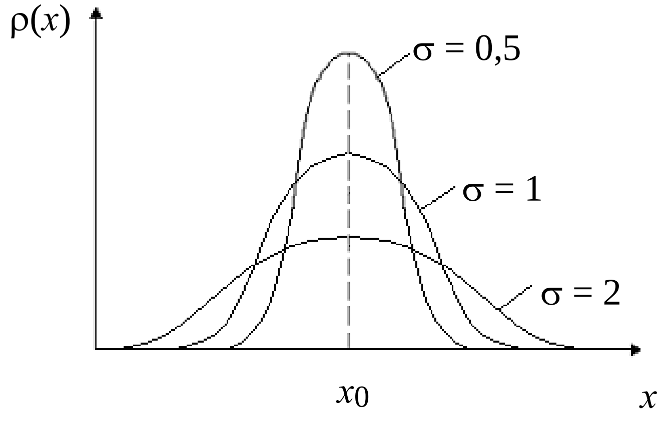


Рис. П3

При больших значениях σ кривые $\rho(x)$ идут менее круто и являются более широкими, при этом площади под кривыми с разными σ в силу условия нормировки вероятностей одинаковы и равны единице. Большие σ соответствуют большему разбросу случайных значений измеряемой величины, а значит менее точным измерениям.

2.3. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Итак, для определения случайной величины x недостаточно знания ее истинного значения x_0, поскольку разные эксперименты характеризуются разной степенью разброса получаемых значений. Этот факт проиллюстрирован на рис. П4 для двух кривых распределения ошибок.

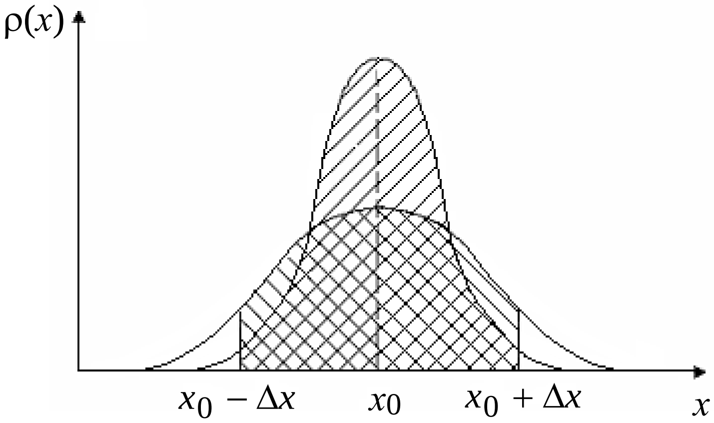


Рис. П4

Вероятности получения в процессе измерения ошибок, не превышающих Δx, т.е. вероятности попадания случайной величины x в интервал от $x_0 - \Delta x$ до $x_0 + \Delta x$, равны площадям заштрихованным под рассматриваемыми кривыми. Видно, что эти вероятности различны. Поэтому для характеристики случайной ошибки необходимо задать два числа: величину самой ошибки Δx и величину вероятности P попадания ошибки в указанный интервал.

<u>Доверительным интервалом</u> называется интервал от $x_0 - \Delta x$ до $x_0 + \Delta x$, в который по определению попадают результаты измерения случайной величины x с заданной вероятностью $P_д$, которая носит название <u>доверительной вероятности</u> или <u>коэффициента надежности</u>. Доверительная вероятность выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Следует помнить, что $(1 - P_д)$ процентов от общего числа измерений выходят за пределы доверительного интервала. Увеличение границ доверительного

интервала, т.е. увеличение задаваемой погрешности результатов измерений, приводит к увеличению надежности попадания в этот интервал.

Указание одной только величины ошибки Δx без указания соответствующей ей доверительной вероятности в значительной мере лишено смысла, так как только знание доверительной вероятности позволяет оценить степень надежности полученного результата.

Необходимая степень надежности задается характером производимых измерений. В разных областях используют различные значения доверительной вероятности, равные: 0,5; 0,683; 0,8; 0,9; 0,95; 0,99; 0,997; 0,999.

Распределение Гаусса позволяет рассчитать доверительную вероятность для соответствующего доверительного интервала любой величины. Границы интервала $\pm\Delta x$, за пределы которого с заданной доверительной вероятностью не выходят случайные погрешности, обычно выражают в виде значения, кратного стандартной ошибке: $\Delta x = t_\alpha \cdot \sigma$, где t_α – безразмерный коэффициент, определяемый задаваемой вероятностью $\alpha = P_{\text{Д}}$.

В случае нормального распределения для $\Delta x = \sigma$ (когда $t_\alpha = 1$) величина доверительной вероятности $P_{\text{Д}} = 0{,}683$ (рис. П5). Это означает, что 68,3 % всех измерений попадает в доверительный интервал от $x_0 - \sigma$ до $x_0 + \sigma$, а за его пределы выпадает 31,7 % всех измерений. Аналогично, для $\Delta x = 2\sigma$ (когда $t_\alpha = 2$) значение $P_{\text{Д}} = 0{,}955$, т.е. 95,5 % всех измерений попадает в указанный доверительный интервал, а за его пределы выпадает 4,5 % всех измерений. Наконец, для $\Delta x = 3\sigma$ (когда $t_\alpha = 3$) значение $P_{\text{Д}} = 0{,}997$, а значит за пределы доверительного интервала выпадает 0,3 % всех результатов измерений. Эта вероятность настолько мала, что результат с отклонениями более 3σ считается грубой погрешностью (промахом). Это правило выявления промахов называется критерием трех сигм.

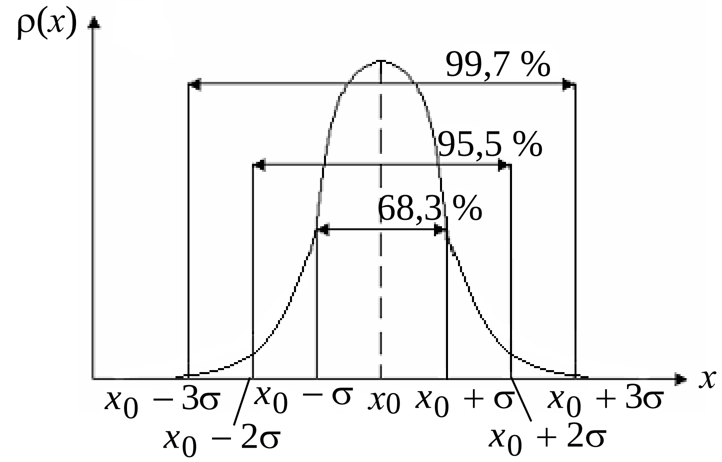


Рис. П5

Чтобы определить доверительную вероятность для любого доверительного интервала с границами $\pm\Delta x$ при известной среднеквадратичной погрешности σ необходимо рассчитать коэффициент $t_\alpha = \Delta x / \sigma$. Соответствующие ему значения $P_Д$ приводятся в таблицах справочной литературы. Обратная задача – определение границ доверительного интервала по заданному значению $P_Д$ – решается с помощью тех же таблиц.

При малом числе измерений ($n < 30$) кривая распределения ошибок отличается от нормального распределения. В этом случае более точные результаты дает так называемое t-распределение Стьюдента. Кривые распределения Стьюдента при разных n внешне похожи на колоколообразную кривую распределения Гаусса, но их максимум тем ниже, чем меньше n. С увеличением n распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению, и при $n > 30$ уже совпадает с ним настолько хорошо, что может быть заменено распределением Гаусса.

Такой вид кривых t-распределения приводит к измененным (расширенным) границам доверительного интервала, соответствующего заданной доверительной вероятности. В этом случае величина доверительного интервала определяется не только значением $\alpha = P_Д$, но и числом измерений n, а для расчета границ интервала Δx используют соотношение $\Delta x = t_{\alpha,n} \cdot \sigma$. Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ табулируются для разных значений α и n. При $n \to \infty$ они переходят в коэффициенты t_α, введенные для распределения Гаусса. В частности, значения коэффициентов Стьюдента для двух значений доверительной вероятности и некоторых значений n приведены ниже:

n	3	4	5	7	10	15	20	30	∞
$t_{0,9}$	2,92	2,35	2,13	1,94	1,83	1,76	1,73	1,70	1,64
$t_{0,95}$	4,30	3,18	2,78	2,45	2,26	2,14	2,09	2,04	1,96

Видно, что численное значение этих коэффициентов, а значит величина доверительного интервала, возрастают с уменьшением числа измерений. Наоборот, при $n \geq 8$, различие между рассматриваемыми коэффициентами составляет уже менее 20 %.

Тот факт, что истинное значение измеряемой величины x_0 с заданной доверительной вероятностью лежит в пределах доверительного интервала, можно записать в виде неравенства:

$$x_0 - t_{\alpha,n} \cdot \sigma \leq x_0 \leq x_0 + t_{\alpha,n} \cdot \sigma,$$

но обычно окончательный результат представляют в виде

$$x = x_0 \pm t_{\alpha,n} \cdot \sigma. \qquad (П2)$$

Для расчетов значения $\alpha = P_Д$ выбирают в соответствии с требованиями надежности (обычно 0,90-0,95). При проведении учебных измерений, как правило, используется доверительная вероятность 0,683, при которой границы интервала приближенно равны $\pm\sigma$ даже при небольшом (например, $n = 5$) числе измерений. Поскольку здесь $t_{\alpha,n} \approx 1$, то окончательный результат может быть представлен в более простом виде:

$$x = x_0 \pm \sigma. \qquad (П3)$$

2.4. Расчет случайных погрешностей прямых измерений

При проведении учебных лабораторных экспериментов основной задачей является правильное нахождение величин, входящих в формулу (П3) по результатам ограниченного числа измерений. В математической статистике показано, что за истинное значение x_0 измеряемой n раз величины x можно принять среднее арифметическое значение x_0 всех полученных результатов x_1, x_2, …, x_n, а именно

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,. \qquad (П4)$$

Значение $\bar{x}$ является наилучшим приближением к истинному значению x_0, но все же не дает точного значения его величины.

Степень разброса этих результатов относительно среднего значения $\bar{x}$ на практике характеризуется среднеквадратичной погрешностью (среднеквадратичным отклонением) среднего арифметического серии измерений $\Delta\bar{x} \approx \sigma$, которая рассчитывается по формуле

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,. \qquad (П5)$$

Среднеквадратичная погрешность среднего арифметического серии измерений дает приближенное значение стандартной ошибки σ. Из соотношения для $\Delta\bar{x}$ видно, что среднеквадратичная погрешность серии измерений может быть уменьшена за счет увеличения числа измерений n. Обычно при проведении лабораторных работ ограничиваются серией из пяти

($n = 5$) измерений. При $n \to \infty$ приближенные соотношения становятся точными, т.е. $\bar{x} = x_0$, $\Delta\bar{x} = \sigma$.

Для точной оценки результатов измерений учета одних только случайных погрешностей недостаточно Приборная систематическая погрешность $\Delta x_{\text{пр}}$, обусловленная несовершенством измерительной аппаратуры, связана с точностью измерений прибора Δ соотношением:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \Delta/2.$$

Как правило, точность измерений прибора Δ указывается в паспорте или на самом приборе. При отсутствии паспорта или указаний на приборе обычно считают, что приборная погрешность $\Delta x_{\text{пр}}$ равна половине цены наименьшего деления шкалы прибора, а если стрелка прибора перемещается не равномерно, а скачками (как у секундомера), то приборную погрешность считают равной цене наименьшего деления шкалы.

Полная абсолютная погрешность прямого измерения вычисляется по формуле:

$$\Delta x_{\text{полн}} = \sqrt{(\Delta\bar{x})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}\,. \qquad \text{(П6)}$$

Относительная погрешность прямого измерения, характеризующая качество измерения и обычно выражающаяся в процентах, рассчитывается следующим образом:

$$\varepsilon_x = (\Delta x_{\text{полн}} / \bar{x})100\,\%\,. \qquad \text{(П7)}$$

Окончательный результат прямого измерения представляется в виде:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{полн}}. \qquad \text{(П8)}$$

2.5. Расчет погрешностей при косвенных измерениях

При косвенном измерении значение искомой величины вычисляется по известной зависимости $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ между ней и непосредственно измеряемыми величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В этом случае сначала по вышеприведенным формулам обрабатываются результаты прямых измерений каждой величины x_i и представляются в виде:

$$x_i = \bar{x}_i + \Delta x_{i\text{полн}}.$$

Далее по формуле рассчитывается истинное значение величины f:

$$\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n),$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ – средние значения измеренных величин $x_1, x_2, ..., x_n$. Абсолютная погрешность Δf величины f связана с полными абсолютными погрешностями ($\Delta x_{i\text{полн}}$) прямых измерений и с видом самой функции f. В общем случае она вычисляется по формуле:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_{1\text{полн}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_{2\text{полн}}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \Delta x_{n\text{полн}}^2},$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ – частные производные функции f по независимым переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, взятые при значениях аргументов, равных их средним значениям.

Относительная погрешность косвенного измерения величины f равна

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{\bar{f}} 100\,\%.$$

В некоторых случаях, используя готовые формулы, проще сначала найти относительную погрешность ε_f, а уже потом рассчитать абсолютную погрешность:

$$\Delta f = \varepsilon_f \bar{f}.$$

В любом случае окончательный результат должен быть представлен в виде:

$$f = \bar{f} \pm \Delta f.$$

Формулы, позволяющие рассчитать абсолютные и относительные погрешности в случае некоторых простых функциональных зависимостей приведены в Таблице П1. Заметим, что в этих случаях формулы для расчета относительной погрешности имеют более простой вид.

Таблица П1

Вид функции f	Абсолютная погрешность Δf	Относительная погрешность ε_f
$f = C(x \pm y)$	$\Delta f = C\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x \pm y}$
$f = Cxy$	$\Delta f = C\sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = \dfrac{Cx}{y}$	$\Delta f = C\dfrac{x}{y}\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = Cx^\alpha y^\beta$	$\Delta f = C\,x^\alpha y^\beta\sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$

В таблице 1 x и y – непосредственно измеряемые физические величины; C, α, β – численные коэффициенты; f – косвенно измеряемая величина; Δx, Δy – полные абсолютные погрешности прямых измерений.

2.6. Требования, предъявляемые для получения лабораторного зачета

При сдаче зачета студент представляет отчет по каждой выполненной им работе и показывает:

- понимание физического смысла измеряемой величины и методики ее измерения;
- умение пользоваться применяемой в работе измерительной аппаратурой;
- знание теоретических вопросов, на которых базируется работа, а также различных формул;
- знание методики обработки результатов измерений физических величин;
- знание точности результатов проведенных измерений, умение вычислять абсолютную и относительную погрешности измерений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТЕСТОВЫЙ КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ ПО ФИЗИКЕ

Неотъемлемой частью изучения курса физики является проведение контрольных мероприятий, когда реализуются не только контролирующая, но также и стимулирующая, обучающая, ориентирующая и воспитательная функции.

Систему контроля образуют экзамены и зачеты, защита лабораторных работ, устный опрос, проверка домашних заданий, контрольные работы и расчетные задания, рефераты, самопроверка знаний по контрольным вопросам. В качестве одной из форм контроля может быть использовано тестирование, становящееся в последнее время все более актуальным в связи с сокращением числа часов, отводимых для изучения курса физики.

В зависимости от длительности контролируемого периода обучения тестовый контроль может быть текущим, тематическим, рубежным и итоговым. Текущий контроль рекомендуется проводить на каждом занятии, затрачивая на это минимальное аудиторное время. Тематический контроль оценивает результаты изучения определенной темы программы. Его можно проводить на практических и лабораторных занятиях. Рубежный контроль осуществляет оценку крупных разделов программы курса, его можно проводить в виде тестовых коллоквиумов или зачетов. Итоговый тестовый контроль может осуществляться преподавателем после прохождения всего учебного курса.

При составлении заданий теста следует соблюдать ряд правил, необходимых для создания надежного инструмента оценки успешности овладения определенных разделов изучаемого курса. Тест не должен быть нагружен второстепенными терминами, несущественными деталями с акцентом на механическую память, которая может быть задействована, если в тест включать точные формулировки основных положений. Задания теста должны быть сформулированы четко, кратко и недвусмысленно, чтобы был понятен смысл того, что спрашивается.

Важно выбрать наиболее приемлемую форму ответов на задания. Поскольку задаваемый вопрос должен быть сформулирован коротко, желательно также кратко и однозначно формулировать ответы. Варианты ответов на каждое задание должны подбираться таким образом, чтобы исключались возможности простой догадки или отбрасывания заведомо неподходящего ответа.

Задачи для тестов должны быть информативными, при этом они не могут быть слишком громоздкими или слишком простыми. В качестве неверных ответов желательно использовать наиболее типичные ошибки. Тестовые задания должны быть краткими по форме и четкими по содержанию. Они должны быть сформулированы в форме утверждений, которые в зависимости от решений испытуемых могут превращаться в истинные или ложные высказывания. Последние легко кодируются двоичным кодом (0 или 1) и поступает в таком виде для дальнейшей обработки.

Самой распространяемой является такая форма задания, где есть готовые решения, из которых одно должно быть правильным, а остальные неправильными. Задания такой формы, получившие название закрытых, могут иметь два и более варианта решений. Оптимальными считаются задания с четырьмя или пятью вариантами решений.

В качестве примера в данной работе приводятся тесты, разработанные нами для осуществления тематического контроля знаний по физике. Для проведения тестового контроля использовалось время лабораторных занятий. Задания для тематического тестового контроля подбирались таким образом, чтобы на ответы уходило время порядка 15 минут. Изучаемый в курсе «Механика» и «Молекулярная физика» материал был разделен на 3 раздела, соответствующие трем циклам лабораторных работ, а именно: «Законы сохранения», «Вращательное движение», «Молекулярная физика».

При подготовке тестовых вопросов предпочтение отдавалось общетеоретическим вопросам, а не вопросам, касающимся устройства той или иной лабораторной установки. Количество заданий ограничивалось размерами страницы (по 12 заданий в каждом тесте). Использовались задания закрытой формы. На каждый вопрос давалось пять вариантов решений, причем в качестве неправильных ответов подбирались типичные ошибки, допускаемые студентами в таких случаях.

Разработанные нами задания для тестового контроля легко могут быть модифицированы с учетом подготовленности основного контингента студентов и с учетом направления выбранной ими специализации.

Тест 1. Законы сохранения

1) В процессе измерения некоторой величины S получены 5 значений: $S_1 = 22{,}1$; $S_2 = 22{,}0$; $S_3 = 22{,}2$; $S_4 = 22{,}1$, $S_5 = 22{,}1$. Среднее арифметическое искомой величины равно:

а) 22,0; б) 22,05; в) 22,1; г) 22,15; д) 22,2.

2) Результат измерения некоторого объема может быть записан в виде $V = 250 \pm 5$ (мм^3). Абсолютная погрешность измерений равна:

а) 250; б) 255; в) 2 %; г) 245; д) 5.

3) Результат измерения некоторого объема может быть записан в виде $V = 250 \pm 5$ (мм^3). Относительная погрешность измерений равна:

а) 250; б) 255; в) 2 %; г) 245; д) 5 %.

4) Нониус штангенциркуля имеет 20 делений. Приборная погрешность этого штангенциркуля равна:

а) 0,05; б) 20; в) 0,1; г) 5 %; д) 0,2.

5) Единицей измерения линейного ускорения в системе СИ является:

а) м/с; б) м/с^2; в) с^2/м; г) 1/с^2; д) м·с^2.

6) Единицей измерения силы в системе СИ является 1 Н, который может быть представлен как

а) кг·м; б) м·с/кг; в) кг·м/с; г) кг·м/с^2; д) кг/(м·с^2).

7) Единицей измерения работы и энергии в системе СИ является 1 Дж, который может быть представлен как

а) кг·м^2/с^2; б) кг·с^2/м^2; в) м^2·с^2/кг; г) кг·м·с; д) м·с/кг.

8) Кинетическая энергия движущегося тела находится по формуле:

а) mgh; б) $m\upsilon$; в) $m\upsilon^2/2$; г) ma; д) $(m\upsilon^2/2) + mgh$.

9) Потенциальная энергия движущегося тела находится по формуле:

а) mgh; б) $m\upsilon$; в) $m\upsilon^2/2$; г) ma; д) $(m\upsilon^2/2) + mgh$.

10) Брошенное тело массой 1 кг в некоторой точке на высоте 2 м от поверхности земли имеет скорость 5 м/с. Численное значение импульса тела в системе СИ в указанный момент времени равно:

а) 12,5; б) 19,6; в) 10; г) 2,5; д) 5.

11) Тело массой $m_1 = 2$ кг, летящее со скоростью $\upsilon_1 = 11$ м/с сталкивается неупруго с летящим ему навстречу со скоростью 4 м/с телом массой $m_2 = 4$ кг. Скорость совместного движения тел после соударения равна:

а) 7 м/с; б) 3 м/с; в) 2 м/с; г) 1 м/с; д) 6,3 м/с.

12) Тело брошено вертикально вверх со скоростью υ_0. Его потенциальная энергия равна кинетической на высоте:

а) $h = \upsilon_0^2 / 2g$; б) $h = \upsilon_0^2 / 4g$; в) $h = \upsilon_0 / g$; г) $h = \upsilon_0 / 2g$; д) $h = \upsilon_0^2 / g$.

Тест 2. Вращательное движение

1) Формула, устанавливающая связь между линейной и угловой скоростью имеет вид:

а) $\upsilon = at$; б) $\upsilon = \omega R$; в) $\omega = 2\pi\nu$; г) $\omega = d\varphi/dt$; д) $\upsilon = 2\pi\nu R$.

2) Единицей измерения углового ускорения в системе СИ является:

а) 1/с^2; б) 1/с; в) м/с^2; г) м/с; д) м·с^2.

3) Единицей измерения момента силы в системе СИ является:

а) кг·с^2/м; б) м^2·с^2/кг; в) кг·м; г) кг·м/с; д) кг·м^2/с^2.

4) Единицей измерения момента инерции в системе СИ является:

а) кг·м; б) кг·м/с; в) кг·м^2; г) кг·м/с^2; д) м·с^2.

5) Основной закон динамики вращательного движения имеет вид:

а) $M = I\varepsilon$; б) $M = Fr$; в) $I = mR^2$; г) $I = \int r^2 dm$; д) $L = I\omega$.

6) Момент инерции вращающегося тела определяется соотношением:

а) $M = I\varepsilon$; б) $M = Fr$; в) $I = mR^2$; г) $I = \int r^2 dm$; д) $L = I\omega$.

7) Момент импульса вращающегося тела находится по формуле:

а) $p = m\upsilon$; б) $I = \int r^2 dm$; в) $\vec{M} = \left[\vec{F}\vec{r}\right]$; г) $L = I\omega$; д) $M = I\varepsilon$.

8) Теорема Штейнера, позволяющая рассчитать момент инерции тела относительно произвольной оси, имеет вид:

а) $\vec{M} = \left[\vec{F}\vec{r}\right]$; б) $I = \int r^2 dm$; в) $I = I_0 + md^2$; г) $L = I\omega$; д) $M = I\varepsilon$.

9) Кинетическая энергия вращающегося тела определяется соотношением:

а) $E = m\upsilon^2 / 2$; б) $E = mgh$; в) $E = I\omega^2 / 2$; г) $E = kx^2 / 2$;
д) $E = (m\upsilon^2 / 2) + mgh$.

10) Момент инерции диска массой $m = 4$ кг и радиусом $R = 60$ см, рассчитанный в системе СИ равен:

а) 0,72; б) 0,36; в) 1,44; г) 3600; д) 7200.

11) К диску массой 2 кг и радиусом 10 см приложена касательная сила 4 Н. Угловое ускорение диска в системе СИ равно:

а) 40; б) 80; в) 0,8; г) 0,2; д) 20.

12) Момент инерции шара массой m, радиусом R относительно оси, находящейся на расстоянии $2R$ от его поверхности равен:

а) $3{,}4\,mR^2$; б) $9{,}4\,mR^2$; в) $4{,}5\,mR^2$; г) $3\,mR^2$; д) $9{,}5\,mR^2$.

Тест 3. Молекулярная физика

1) Единицей измерения давления в системе СИ является 1 Па, который может быть представлен как

а) Н·м; б) кг·м/с^2; в) кг/(м·с^2); г) м·с/кг; д) кг/(м·с).

2) Температура некоторого газа равна – 27 °С. Его абсолютная температура равна:

а) 300 К; б) 200 К; в) 246 К; г) 146 К; д) 250 К.

3) Кислородом является газ с молярной массой:

а) μ = 0,004 кг/моль; б) μ = 0,018 кг/моль; в) μ = 0,028 кг/моль;
г) μ = 0,032 кг/моль; д) μ = 0,028 кг/моль.

4) Среди нижеперечисленных одноатомным газом является:

а) гелий; б) водяной пар; в) азот; г) кислород; д) углекислый газ.

5) Основным компонентом атмосферного воздуха является:

а) гелий; б) водяной пар; в) азот; г) кислород; д) углекислый газ.

6) Количество вещества, т.е. число молей, содержащихся в данной массе вещества, определяется величиной:

а) m; б) μ; в) m/μ; г) $N_А$; д) R.

7) Уравнение Менделеева-Клапейрона для смеси двух газов определяется соотношением

а) $pV = \frac{m}{\mu} RT$; б) $pV = nkT$; в) $pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) RT$; г) $p\mu = \rho RT$.

8) Средняя квадратичная скорость молекул газа в сосуде определяется:

а) объемом сосуда; б) давлением в сосуде; в) плотностью газа;
г) массой газа; д) температурой газа.

9) Изменение внутренней энергии равно нулю в процессе, называемом:

а) изобарическим; б) изохорическим; в) изотермическим;
г) адиабатическим; д) политропическим.

10) Работа газа по расширению равна нулю в процессе, называемом:

а) изобарическим; б) изохорическим; в) изотермическим;
г) адиабатическим; д) политропическим.

11) В изопроцессах некоторая термодинамическая величина является постоянной. В адиабатическом процессе:

а) T = const; б) p = const; в) V = const; г) Q = 0; д) ρ = const.

12) Термодинамической системе передано количество теплоты, равное 400 Дж. При этом над газом была совершена работа, равная 100 Дж. Изменение внутренней энергии газа при этом равно:

а) ΔU = 500 Дж; б) ΔU = 300 Дж; в) ΔU = –500 Дж; г) ΔU = –300 Дж;
д) ΔU = 4000 Дж.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

4.1. Единицы механических величин

Производные единицы в СИ

Величина	Единица		
	определение	наименование	обозначение
Площадь	$S = l^2$	квадратный метр	$м^2$
Объем	$V = l^3$	кубический метр	$м^3$
Скорость	$\upsilon = \Delta l / \Delta t$	метр в секунду	м / с
Ускорение	$a = \Delta\upsilon / \Delta t$	метр на секунду в квадрате	$м / с^2$
Угловая скорость	$\omega = \Delta\varphi / \Delta t$	радиан в секунду	рад / с
Угловое ускорение	$\varepsilon = \Delta\omega / \Delta t$	радиан на секунду в квадрате	$рад / с^2$
Частота периодического процесса	$\nu = T^{-1}$	герц	Гц
Частота вращения	$\nu = T^{-1}$	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$
Плотность	$\rho = m / V$	килограмм на кубический метр	$кг / м^3$
Сила	$F = ma$	ньютон	Н
Давление	$p = F / S$	паскаль	Па
Жесткость	$k = F / l$	ньютон на метр	Н/м
Импульс	$p = m\Delta\upsilon$	килограмм-метр в секунду	кг · м / с
Импульс силы	$p = F\Delta t$	ньютон-секунда	Н · с
Момент силы	$M = Fl$	Ньютон-метр	Н · м
Момент импульса	$L = M\Delta t$	килограмм-метр в квадрате в секунду	$кг \cdot м^2 / с$
Момент инерции	$J = mr^2$	килограмм-метр в квадрате	$кг \cdot м^2$
Работа; энергия	$A = Fl$	джоуль	Дж
Мощность	$N = \Delta A / \Delta t$	ватт	Вт
Динамическая вязкость	$\eta = \frac{F}{S} \frac{\Delta l}{\Delta\upsilon}$	паскаль-секунда	Па · с
Кинематическая вязкость	$\nu = \eta / \rho$	квадратный метр в секунду	$м^2 / с$

4.2. Единицы тепловых величин

Производные единицы в СИ

Величина	Единица		
	определение	наименование	обозначение
Количество теплоты	$Q = A = W$	джоуль	Дж
Теплоемкость системы	$C = Q / \Delta T$	джоуль на кельвин	Дж/К
Энтропия системы	$S = \Delta Q / T$	джоуль на кельвин	Дж/К
Удельная теплоемкость	$c = Q / m\Delta T$	джоуль на килограмм-кельвин	$\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$
Удельная энтропия	$s = S / m$	джоуль на килограмм-кельвин	$\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$
Удельная теплота фазового превращения	$q = Q / m$	джоуль на килограмм	Дж/кг
Температурный градиент	$\mathrm{grad}T = \Delta T / \Delta l$	кельвин на метр	К/м
Тепловой поток	$\Phi = \Delta Q / \Delta t$	ватт	Вт
Плотность теплового потока	$q = \Phi / S$	ватт на квадратный метр	$\text{Вт}/\text{м}^2$
Теплопроводность	$\lambda = \dfrac{Q}{\Delta t S \Delta T / \Delta l}$	ватт на метр-кельвин	$\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$
Температуропроводность	$a = \lambda / c\rho$	квадратный метр в секунду	$\text{м}^2/\text{с}$
Коэффициент теплообмена	$\alpha = \Phi / S\Delta T$	ватт на квадратный метр-кельвин	$\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$

4.3. Основные физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6{,}6720\cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458\cdot 10^{8}$ м/с
Скорость звука в воздухе при нормальных условиях	$\upsilon_{\text{зв}} = 331{,}36$ м/с
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12{,}5663706144\cdot 10^{-7}$ Гн/м
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85418782\cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}626176\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}$

Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ Дж · с
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p / m_e = 1836{,}15152$
Элементарный заряд	$e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	$e / m_e = 1{,}7588047 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Авогадро	$N_{\text{А}} = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Фарадея	$F = 96{,}48456 \cdot 10^{3}$ Кл/моль
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31441$ Дж/(моль · К)
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = 22{,}41383 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Нормальное атмосферное давление	$p_0 = 1{,}01325 \cdot 10^{5}$ Па
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}80665$ м/с^2

4.4. Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^{6}$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^{3}$ кг/м^3
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^{8}$ м
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^{3}$ кг/м^3
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^{6}$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^{8}$ м
Среднее расстояние до Солнца (астрономическая единица)	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин

4.5. Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, 10^{-5} К$^{-1}$
Алюминий	2,6	659	896	322	2,3
Железо	7,9	1530	500	272	1,2
Латунь	8,4	900	386	-	1,9
Лед	0,9	0	2100	335	-
Медь	8,6	1100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	58,6	2,7
Платина	21,4	1770	117	113	0,89
Пробка	0,2	-	2050	-	-
Свинец	11,3	327	126	22,6	2,9
Серебро	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1300	460	-	1,06
Цинк	7,0	420	391	117	2,9

4.6. Свойства некоторых жидкостей
(при 20 °C)

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)	Поверхностное натяжение, Н/м
Бензол	0,88	1720	0,03
Вода	1,00	4190	0,073
Глицерин	1,20	2430	0,064
Касторовое масло	0,90	1800	0,035
Керосин	0,80	2140	0,03
Ртуть	13,60	138	0,5
Спирт	0,79	2510	0,02

4.7. Удельная теплота сгорания топлива

($\times 10^{+6}$ Дж/кг)

Бензин	46,2	Мазут	42
Дрова (сухие)	8,3	Нефть	46,2
Каменный уголь	30	Спирт	30
Керосин	46,2	Торф	15

4.8. Удельная теплота парообразования и конденсации жидкостей

($\times 10^{+5}$ Дж/кг при температуре кипения и давления $1{,}013 \cdot 10^5$ Па)

Вода	22,6	Ртуть	3,0
Железо	0,58	Эфир	3,5
Спирт	8,5		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аванесов В.С. Основа научной организации педагогического контроля в высшей школе. М.: МИСИС, 1989.
2. Астахов А.В. Курс физики. Т. 1, Механика. Кинетическая теория материи. М.: Наука, 1977. – 384 с.
3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1976. – 464 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. Изд-во 3-е, испр. и доп. – СПб.: Книжный Мир, 2003. – 328 с.
5. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. М.: Наука, 1985. – 112 с.
6. Зайнашева Г.Н. Обработка результатов измерений физических величин. Учебное пособие по курсу «Физика, 2005, КГЭУ.
7. Зуева О.С., Погорельцев А.И. Механика и молекулярная физика. Установочные лекции по курсу «Физика». Для студентов-заочников всех специальностей. Казань: КГЭУ, 2001. – 52 с.
8. Зуева О.С., Матухин В.Л., Куржунов В.В., Зуев Ю.Ф. Механика и молекулярная физика. Методические указания и примеры решения типовых задач по курсу «Физика». Казань: КГЭУ, 2001. – 40 с.
9. Зуева О.С., Погорельцев А.И. Краткий курс лекций по физике для студентов заочной и очно-заочной формы обучения. Казань: КГЭУ, 2003. –75 с.
10. Зуева О.С. Механика и молекулярная физика. Казань: КГЭУ, 2006. – 228 с.
11. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.: Наука, 1979. – 368 с.
12. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: «Наука», 1970. – 104 с.
13. Кунце Х.-И. Методы физических измерений. М.: Мир, 1989. – 216 с.
14. Курс физики: Учебник для вузов: В 2 т. Т. 1 / Под ред. В.Н. Лозовского. – СПб: Изд-во «Лань», 2001. – 576 с.
15. Курс физики: Учебник для вузов: В 2 т. Т. 2 / Под ред. В.Н. Лозовского – СПб: Изд-во «Лань», 2001. – 592 с.
16. Кушнир Ф.В., Савенко В.Г. Электрорадиоизмерения. Л.: «Энергия», 1975. – 368 с.
17. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 248 с.
18. Матухин В.Л., Серебренникова Т.А., Зуева О.С., Килеев А.И., Куржунов В.В. Физика. Программа, методические указания и контрольные

задания для студентов-заочников всех специальностей. Казань: КГЭУ, 1999. – 96 с.

19. Матухин В.Л., Зуева О.С., Килеев А.И., Петрунин В.И., Малацион С.Ф., Серебренникова Т.А. Механика и молекулярная физика. Сборник задач по курсу «Физика». Казань: КГЭУ, 2002. – 66 с.

20. Матушанский Г.У. Тестовый контроль знаний в вузе. Курс лекций. Казань: КГТУ, 1993.

21. Матушанский Г.У., Бакеева Р.Ф. Методические указания к выполнению выпускной работы по проектированию педагогических тестов. Казань: КГТУ, 2001. – 19 с.

22. Матушанский Г.У. Педагогическое тестирование в России. Педагогика, 2002, № 2, с. 15 – 21.

23. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика: Учеб. пособие для втузов. М.: ООО «Издательство Астрель. АСТ», 2002. – 336 с.

24. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 3. Молекулярная физика и термодинамика: Учеб. пособие для втузов. М.: ООО «Издательство Астрель. АСТ», 2002. – 208 с.

25. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. – 576 с.

26. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1975. – 552 с.

27. Тойберг П. Оценка точности результатов измерений. М.: Энергоамтоиздат, 1988. – 88 с.

28. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2003. – 541 с.

29. Урядова Л.Ф., Чичирова Н.Д. Химия: Учебно-практическое пособие. Казань: КГЭУ, 2001. – 199 с.

30. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: «Мир», 1970. – 296 с.

31. Щапов А.С., Тихомирова Н.К., Еришков С.В., Лобова Т.Л. Тестовый контроль в системе рейтинга. Высшее образование в России, 1995, № 3, с. 100–102.

32. Яворский Б.Н., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1985. – 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ольга Стефановна Зуева

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
Учебное пособие
по курсу «Физика»

(Кафедра физики КГЭУ)

Редактор издательского отдела О.В. Ханжина

Изд. лиц. ИД № 03480 от 08.12.00 Темплан издания КГЭУ 2014 г.
Подписано к печати Формат 60х84/16
Гарнитура «Times» Вид печати РОМ Бумага «Business»
Физ. печ. л. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж Заказ

Издательский отдел КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51

Типография КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51