ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет»
Отраслевая олимпиада школьников «Первые шаги в энергетике»

КГЭУ

ШИФР: М 49

Ответы на олимпиадные задания

№1

$\frac{1}{3}ctg^2x + \frac{12}{\cos^2 x} = 1 - 20tgx - \frac{10}{3}ctgx$

$\frac{1}{3}ctg^2x + 12(1+tg^2x) + 20tgx + \frac{10}{3}ctgx = 1$

$\frac{1}{3}ctg^2x + 12 + 12tg^2x + 20tgx + \frac{10}{3}ctgx = 1$

$\frac{1}{3}ctg^2x + 12 + 12tg^2x + 10(2tgx + \frac{1}{3}ctgx) = 1$

Замена: $(2tgx + \frac{1}{3}ctgx) = t$

$(2tgx + \frac{1}{3}ctgx)^2 = 4tg^2x + 2\cdot 2\cdot tgx\cdot\frac{1}{3}ctgx + \frac{1}{9}ctg^2x = 4tg^2x + \frac{4}{3} + \frac{1}{9}ctg^2x = t^2 \,/\cdot 3$

$12tg^2x + 4 + \frac{1}{3}ctg^2x = 3t^2$

$12tg^2x + \frac{1}{3}ctg^2x = 3t^2 - 4$

$3t^2 - 4 + 12 + 10t = 1$

$3t^2 + 10t + 7 = 0$

$D = 100 - 4\cdot 3\cdot 7 = \sqrt{16} = 4$

$t_1 = \frac{-10+4}{6} = -1$; $t_2 = \frac{-10-4}{6} = \frac{-14}{6} = \frac{-7}{3}$

$2tgx + \frac{1}{3}ctgx = -1$

$2tgx + \frac{1}{3tgx} = -1$

Замена: $tgx = y$

$2y + \frac{1}{3y} = -1 \,/\cdot 3y$

$6y^2 + 1 + 3y = 0$

$6y^2 + 3y + 1 = 0$

$D = 9 - 24 < 0$
нет корней

$2tgx + \frac{1}{3}ctgx = -\frac{7}{3}$

$2tgx + \frac{1}{3tgx} = -\frac{7}{3}$

Замена: $tgx = y$

$2y + \frac{1}{3y} = -\frac{7}{3} \,/\cdot 3y$

$6y^2 + 1 + 7y = 0$

$6y^2 + 7y + 1 = 0$

$D = 49 - 24 = \sqrt{25} = 5$

$y_1 = \frac{-7+5}{12} = -\frac{1}{6}$; $y_2 = \frac{-7-5}{12} = -1$

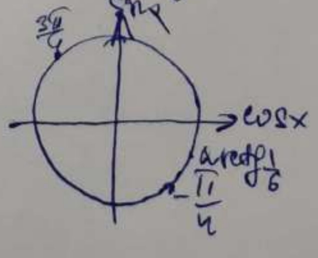
Возврат к замене:

$tgx = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$

$tgx = -\frac{1}{6}$

$x = -arctg\frac{1}{6} + \pi n$



$\frac{3\pi}{4} = 135°$

Ответ: 135°

№2 $y^2-(5^x-1)(y-1)>0$ парабола $a>0$ $D>0$

$1>0$

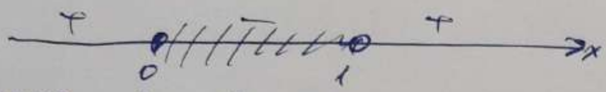
$y^2-(5^x-1)\cdot y+(5^x-1)>0$

$D=(5^x-1)^2-4(5^x-1)=(5^x-1)(5^x-1-4)<0$

$5^x-1=0$ $\quad$ $5^x-1-4=0$

$5^x=1$ $\quad$ $5^x=5$

$x=0$ $\quad$ $x=1$



Длина $(0;1)=1$

Ответ: 1

+

№3 $AM:MB=2:3$ $\quad BK=KC$ $\quad \triangle BMC$ - равносторон.

$R=4$ $\quad \angle B=60^\circ$ $\quad \angle BMC=60^\circ$ $\quad \frac{AC}{\sin B}=2R$

$\frac{AC}{\sin 60^\circ}=2R$ $\quad AC=2\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 60^\circ=(4\sqrt{3})^2=(5x)^2+(3x)^2-2\cdot 5x\cdot 3x\cdot\frac{1}{2}$

$48=25x^2+9x^2-15x^2$

$48=34x^2-15x^2$

$48=19x^2$

$x^2=\frac{48}{19}=4\sqrt{\frac{3}{19}}$

$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 60^\circ=$

$=\frac{1}{2}\cdot 5x\cdot 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}x^2}{4}=$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{48}{19}=\frac{15\sqrt{3}\cdot 12}{19}=269{,}41$

Ответ: 269,41

+

№4 Доказать: ~~$m^2+n^2=7mn$~~

Если $\log_k\frac{m+n}{3}=\frac{\log_k m+\log_k n}{2}$

$(m+n)^2=m^2+2mn+n^2=7mn+2mn=9mn \;/:9$

$\frac{(m+n)^2}{9}=\frac{9mn}{9}=mn;\; \left(\frac{m+n}{3}\right)^2=mn$

$\log_k\left(\frac{m+n}{3}\right)^2=\log_k mn$

$2\log_k\left(\frac{m+n}{3}\right)=\log_k m+\log_k n \;/:2$

$\log_k\left(\frac{m+n}{3}\right)=\frac{1}{2}\log_k m+\log_k n$ ч.т.д.

+