Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады студентов по теоретической механике
Казань, КГЭУ, 5-9 декабря 2016 г.

Задачи теоретического конкурса

Задача С1 (*8 баллов*). 1). Колесо с центром в точке A жестко прикреплено к стержню AB, который может скользить вдоль гладких направляющих K и L под углом α к горизонтали (рис. 1а). Колесо опирается в точке C, лежащей на прямой AB, на гладкую неподвижную плоскость. С меньшей окружности радиуса r колеса слева сходит нить, к которой подвешен груз M массы m. Весами колеса и стержня пренебрегаем. Найдите величину равнодействующей сил реакций направляющих K и L, а также расстояние от точки A до точки приложения к стержню AB этой равнодействующей. (*3 балла*)

2). Ось A колеса *1* шарнирно прикреплена к стержню AB, который может скользить вдоль гладких направляющих K и L под углом α к горизонтали (рис. 1б). Колесо *1* в точке C, лежащей на прямой AB, опирается на колесо *2* с неподвижной осью вращения O. С точки D большей окружности радиуса R колеса *1* сходит нить, навивающаяся в точке E на колесо *2*. Отрезок DE вертикален. С меньшей окружности радиуса r колеса *1* слева сходит нить, к которой подвешен груз M. Весами колес и стержня, а также трением в осях пренебрегаем. Каким должен быть коэффициент трения между колесами *1* и *2* для равновесия системы? (*5 баллов*)

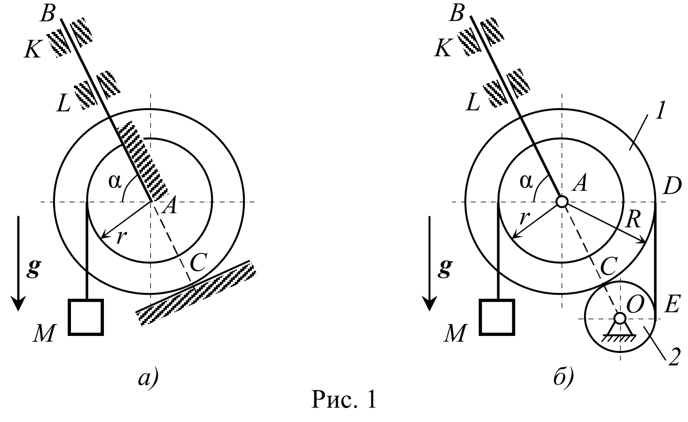

Рис. 1

Задача С2 (*7 баллов*). К неподвижному стержню DC в шарнире C прикреплены однородные стержни AC и BC с весами P каждый (рис. 2). $AC = BC = DC = l$. Система располагается в вертикальной плоскости. Точки *D, A*, *B* связаны пружинами *1*, *2*, *3*, как указано на рисунке. Коэффициент жесткости пружины *1* равен $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}-2} \cdot \dfrac{P}{l}$. В положении системы, приведенном на рисунке, все три пружины недеформированы. При этом $AD = BD$, а угол между AC и BC равен 120°. Известно, что существует такое равновесное положение системы, что, если произвольно изменить коэффициент жесткости пружины *3*, то положение равновесия сохранится при тех же самых углах между стержнями. Определите коэффициент жесткости пружины *2*.

Примечание. При любом расположении стержней пружины своими внутренними точками не задевают стержни и шарнир *C*. Трением в шарнире пренебрегаем.

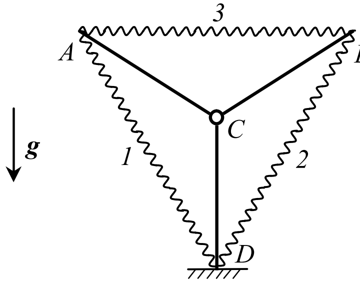

Рис. 2

Задача К1 (*7 баллов*). 1) Ползуны *A* и *B*, а также *B* и *C* связаны шарнирными стержнями (рис. 3а). $AB = l$. Ползун *A* движется с постоянной скоростью v. Определите скорость и ускорение ползуна *C* для положения, указанного на рисунке. (*3 балла*)

2) Ползун *A* движется со скоростью v (рис. 3б). Прикрепленная к нему своим концом нерастяжимая нить проходит через малое ушко на ползуне *B*, который движется с такой же скоростью v, как указано на рисунке. Другой конец нити прикреплен к ползуну *C*. Определите скорость ползуна *C* для положения, указанного на рисунке. (*4 балла*)

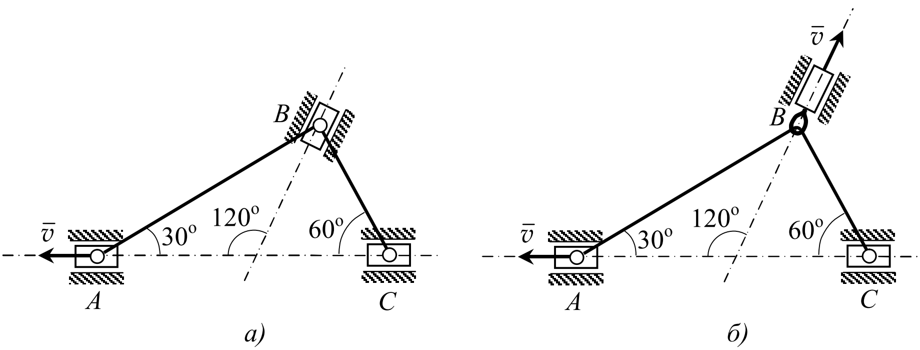

Рис. 3

Задача К2 (7 *баллов*). Криволинейный стержень AB, изогнутый в форме четверти окружности, движется в плоскости xy (рис. 4). В некоторый момент радиусы закругления CA и CB параллельны осям x и y, соответственно. При этом угол между вектором $\overline{a}$ ускорения точки A и осью x равен α, где α откладывается от положительного направления оси x против часовой стрелки. Считаем, что $0 \leq \alpha \leq 180^o$. Величины ускорений всех точек стержня AB одинаковы между собой и равны a. Определите a_{Bx}, a_{By} – проекции на оси координат вектора ускорения точки B. Дайте строгое обоснование решения.

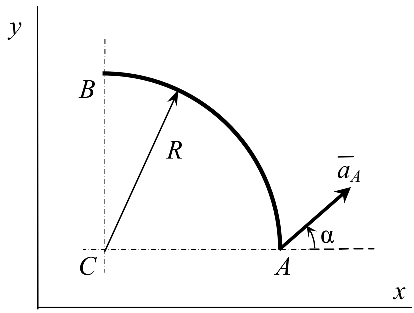

Рис. 4

Задача Д1 (*10 баллов*). Материальная точка M массы m находится на горизонтальной поверхности (рис. 5). В момент $t = 0$ к находящейся в покое точке M приложили параллельно горизонтальной оси x силу $\overline{Q}$. Её проекция на ось x равна $Q_x(t) = \big((1-k)t + k\big)\,mg$, где k – константа. Определите, в какие моменты времени $t > 0$ скорость точки M равна нулю, если:

1) $k = 2$, поверхность гладкая; (*2 балла*)

2) $k > 0$, поверхность шероховатая с коэффициентом трения $f = 1$. (*8 баллов*)

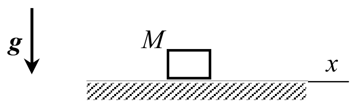

Рис. 5

Задача Д2 (*9 баллов*). 1). К ободу диска пренебрежимо малой массы с неподвижной осью вращения O прикреплена материальная точка M (рис. 6а). Каково угловое ускорение диска в положении, когда касательная к его окружности в точке M наклонена к горизонтали под углом α? (*2 балла*)

2). Нити DAM и DBM своими концами прикреплены к диску в точке D, огибают его с разных сторон и сходят с него в точках A и B, затем протянуты прямолинейно и прикреплены к материальной точке M (рис. 6б). Угол между участками нитей AM и BM прямой. Масса материальной точки M равна m_1. Диск однороден, его масса равна m_2. Точку M удерживали в покое в положении, при котором участок AM наклонен к горизонтали под углом α ($0 \le \alpha < 90^o$, угол отсчитывается против часовой стрелки). Каково угловое ускорение диска сразу после того, как точку M отпустили? (*7 баллов*)

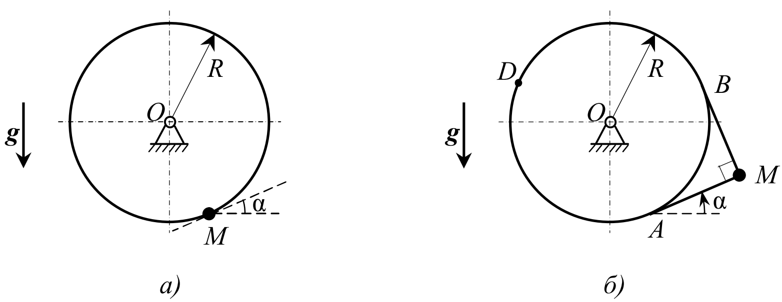

Рис. 6

Задача Д3 (*6 баллов*). Колеса *1* и *2* одинаковы. Масса каждого из них равна m, а радиусы внутреннего и внешнего ободов равны r и $R = 2r$, соответственно (рис. 7). Момент инерции каждого колеса относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости рисунка, равен $J = mr^2$. Нерастяжимая нить, перекинутая через блок *3* радиуса r, намотана на внутренний обод колеса *1* и внешний обод колеса *2*. Весом блока *3* пренебрегаем. Колеса катятся без проскальзывания по поверхностям, наклоненным к горизонту под углом α. При этом колесо *1* катится своим внешним ободом, а колесо *2* – внутренним ободом. Вначале система была в покое. Какова зависимость угловой скорости блока *3* от угла его поворота: $\omega_3 = \omega_3(\varphi_3)$? Определите также его угловое ускорение ε_3.

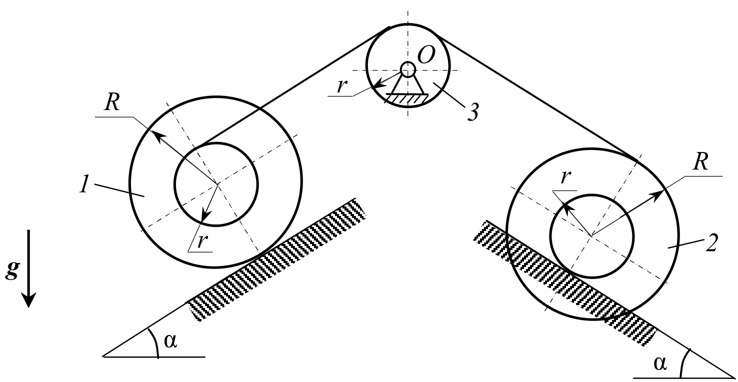

Рис. 7

Задача Д4 (*6 баллов*). Г-образный стержень *OAB* может вращаться в горизонтальной плоскости рисунка вокруг оси *Oz* (рис. 8). Масса его однородного участка *OA* равна m_1, массой участка *AB* пренебрегаем. Угол *OAB* прямой, $OA = l$, $AB > 2l$. Трением в оси *Oz* пренебрегаем. Вдоль *AB* может перемещаться ползун *M* массы m_2 пренебрежимо малых размеров. Ползун *M* соединен пружиной с точкой *B*. Систему отпустили из состояния покоя, при котором ползун *M* находился в точке *A*, а пружина была растянута.

Обозначим через φ угол поворота луча *OM*, отсчитываемый по часовой стрелке от начального положения *OM*. В некоторый момент расстояние от точки *A* до ползуна *M* оказалось равным $2l$. Чему при этом равен угол φ?

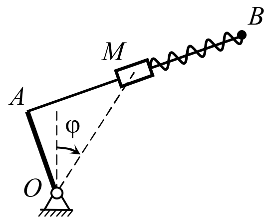

Рис. 8