Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КГЭУ, 20-24 ноября 2017 г.

Решения задач компьютерного конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович.
Рецензент:
доцент кафедры АГМ К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович.

Решение задачи 1.

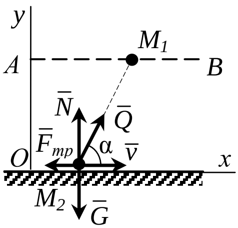

Рис. 1

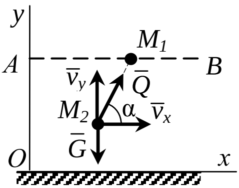

Рис. 2

Обозначим через x, y координаты точки M_2, а через x_1 – координату точки M_1 в момент времени t. При равномерном движении: $x_1 = v_0 t$.

Обозначим через α угол наклона вектора $\bar{r} = \overline{M_2 M_1}$ к положительному направлению оси x. Тогда в общем случае (рис.1, 2) получим:

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (a - y_1)^2}\ .$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x}{r}\ .$$

$$\sin\alpha = \frac{a-y}{r}.$$

Приведенный далее текст решения описывает алгоритм, согласно которому составляется программа для численной реализации.

Программа состоит из двух основных модулей: 1-й модуль описывает равновесие и движение точки вдоль горизонтальной плоскости, 2-й модуль описывает движение точки во время полета.

Выбирается малый шаг по времени Δt.

Если точка M_2 в данный момент t находится на плоскости, нужно проверить, будет ли M_2 оставаться на плоскости, либо оторвется от нее.

Условие неотрыва, то есть условие равновесия M_2 по вертикали:

$$\sum_k F_{ky} = -G + N + Q\sin\alpha = 0.$$

Выражение для нормальной реакции в программе определяем так:

$$N = G - Q\sin\alpha.$$

Если $N \geq 0$, то отрыва M_2 не будет. Иначе, если численно реализовалось $N < 0$, то будет отрыв и в программе должен быть переход к модулю, описывающему полет точки.

Если $N \geq 0$ и при этом $v_x = 0$, нужно проверить, выполняется ли условие равновесия M_2 вдоль x или начнется движение вдоль плоскости. В случае равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = Q\cos\alpha + F_{mp,x} = 0.$$

Здесь проекция силы трения на ось x:

$$F_{mp,x} = -Q\cos\alpha.$$

При равновесии M_2:

$$\left|F_{mp,x}\right| \leq fN.$$

Тогда условие равновесия:

$$Q\left|\cos\alpha\right| \leq f(G - Q\sin\alpha).$$

.Если при условии $v_x = 0$ в данный момент это неравенство не выполняется, либо $v_x \neq 0$, то M_2 не находится в равновесии и ее дальнейшее движение описывается дифференциальным уравнением:

$$m\frac{dv_x}{dt} = Q\cos\alpha + F_{mp,x}.$$

Так как $\left|F_{mp,x}\right| = fN$, $\bar{F}_{mp} \uparrow\downarrow \bar{v}$, то для описания возможности движения точки как сонаправленно, так и противонаправленно оси x в программе удобно использовать запись:

$$F_{mp,x} = -\operatorname{sgn}(v_x)\cdot fN.$$

Окончательный вид ДУ для численной реализации:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}\left(Q\cos\alpha - \operatorname{sgn}(v_x)\cdot f(G - Q\sin\alpha)\right).$$

После отрыва точки от плоскости, т.е. во время полета, дифференциальные уравнения движения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = Q\cos\alpha.$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = Q\sin\alpha - G.$$

В окончательном виде ДУ для численной реализации:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}Q\cos\alpha.$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}Q\sin\alpha - g.$$

Также в программе проверяется условие присоединения M_2 к M_1. Если $r < \varepsilon$, где ε – задаваемая малая величина, то далее полагаем $x = x_1$, $y = y_1$.

В любом момент полета нужно проверять условие падения на плоскость: $y > 0$. В противном случае, при реализации во 2-м программном модуле условия $y \le 0$, происходит абсолютно неупругий удар M_2 о плоскость. При этом полагаем $y = 0$, $v_y = 0$, а значения x, v_x остаются без изменений. Далее осуществляется переход к 1-му программному модулю.

Для тестирования программы ниже приводятся 8 тестов, описывающих следующие возможные случаи, и предлагаются примеры расчетов. В каждом случае в тесте выбирается некоторый момент времени, соответствующий последнему указанному в тесте состоянию точки M_2.

В примерах к тестам, если в них не указано *k*, положили $k = 2$ $\text{Н} \cdot \text{м}^2$. Если не указано x_0, положили $x_0 = 2$ м.

Тест 1. Точка M_2 сразу же начинает движение и продолжает двигаться вдоль плоскости, при $a = 0$.

При $f = 0.025$, $a = 0$ м, $t = 0.75$ с получим $x = 1.90292$ м.

Тест 2. Точка M_2 сразу же начинает движение и продолжает двигаться вдоль плоскости, не меняя направления движения, при $a > 0$.

При $f = 0.01$, $a = 0.75$ м, $t = 0.9$ с получим $x = 1.88755$ м.

Тест 3. Точка M_2 сразу же начинает движение вдоль плоскости, затем прикрепляется к M_1 и продолжает двигаться вместе с ней, при $a = 0$.

При $f = 0.025$, $a = 0$ м, $t = 1$ с получим $x = 2$ м (прикрепление при $t = 0.85772$, $x = 1.71544$).

Тест 4. Точка M_2 сразу же начинает движение и продолжает двигаться вдоль плоскости, в какой-то момент времени поменяв направление движения, при $a > 0$.

При $f = 0.01$, $a = 0.6$ м, $t = 2$ с получим $x = 1.76488$ м (смена направления движения при $t = 1.44893$, $x = 1.72499$).

Тест 5. Точка M_2 вначале какое-то время находится в равновесии, затем начинает движение и продолжает двигаться вдоль плоскости, не меняя направления движения, при $a = 0$.

При $f = 0.2$, $a = 0$ м, $t = 0.85$ с получим $x = 1.96856$ (выход из равновесия при $t = 0.64286$).

Тест 6. Точка M_2 сразу отрывается от плоскости и продолжает лететь, при $a > 0$.

При любом значении *f*, $k = 300$ $\text{Н} \cdot \text{м}^2$, $a = 2$ м, $t = 0.5$ получим $x = 1.45268$ м.

Тест 7. Точка M_2 сразу отрывается от плоскости, затем ударяется о плоскость и продолжает двигаться вдоль нее, при $a > 0$.

При $x_0 = 0$, $f = 0.2$, $k = 85$ Н·м², $a = 2$ м, $t = 1$ с получим $x = 1.21138$ м (удар о плоскость при $t = 0.83629$, $x = 0.78023$).

Тест 8. Точка M_2 сразу отрывается от плоскости, затем ударяется о плоскость, движется вдоль нее, останавливается и продолжает оставаться в равновесии, при $a > 0$.

При $f = 1$, $k = 85$ Н·м², $a = 2$ м, $t = 3$ с получим $x = 2.76060$ м (потеря равновесия при $t = 0.28397$, отрыв от плоскости при $t = 0.71498$, $x = 1.90055$); удар о плоскость при $t = 1.55134$, $x = 1.77027$; остановка при $t = 2.56832$).

Дополнение к решению задачи 1.

(Предложено доцентом кафедры ТМБ ПНИПУ Осипенко Михаилом Анатольевичем.)

В условии и решении задачи 1 предполагается, что при ударе компонента скорости точки v_x остается без изменения. Однако на самом деле v_x при ударе изменяется, так как сила трения $\bar{F}_{тр}$ имеет ударный импульс. Действительно, если нормальная реакция плоскости $\bar{N}$ “очень большая” (ударная сила), то, согласно закону Кулона, и $\bar{F}_{тр}$ может быть “очень большой”, то есть может быть ударной силой и может иметь ударный импульс.

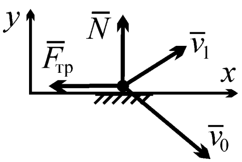

Рис. 3

Рассмотрим подробно удар точки о неподвижную шероховатую плоскость $y = 0$ (рис. 3). Обозначим: f – коэффициент трения; $k_в$ – коэффициент восстановления при ударе; $\bar{v}_0$ – скорость точки до удара, оси координат выбраны так, что $v_{0x} > 0$, $v_{0y} < 0$; $\bar{v}_1$ – скорость точки после удара.

Ударные импульсы могут быть только у сил $\bar{N}$ и $\bar{F}_{\text{тр}}$. Запишем обычные уравнения теории удара для ***частичных*** ударных импульсов (за часть времени удара; это важная идея, см. пояснение ниже):

$$mv_x(t) = mv_{0x} + \int_0^t F_{\text{тр}\,x}(\tau)d\tau\,, \quad 0 \le t \le t_1\,, \tag{1}$$

$$mv_y(t) = mv_{0y} + \int_0^t N(\tau)d\tau\,, \quad 0 \le t \le t_1\,. \tag{2}$$

Изменение скорости точки, описываемое равенствами (1) и (2), следует понимать как происходящее в течение “бесконечно малого” полного времени удара t_1 при неизменном положении точки.

По определению коэффициента $k_{\text{в}}$:

$$v_{1y} = v_y(t_1) = -k_{\text{в}} v_{0y}\,. \tag{3}$$

Если $v_x(t) > 0$ при $0 \le t \le t_1$, то при этих t:

$$F_{\text{тр}\,x}(t) = -f N(t)\,. \tag{4}$$

Из (1)–(4) находим $v_{1x} = v_x(t_1) = v_{0x} - (k_{\text{в}} + 1) f \left|v_{0y}\right|$ (здесь для удобства учтено, что $v_{0y} < 0$). Это равенство, однако, справедливо только, если получилось $v_{1x} \ge 0$. Если же получилось $v_{1x} < 0$, то в действительности $v_{1x} = 0$, так как после обращения $v_x(t)$ в нуль в некоторый момент времени $0 < t_* < t_1$, сила трения далее (при $t_* \le t \le t_1$) равна нулю (а не выражается формулой (4)); тогда из (1) следует, что $v_x(t) = 0$ при $t_* \le t \le t_1$. (Это рассуждение математически нестрого, но его можно сделать строгим, несколько усложнив математическую постановку задачи, см. приложенную статью об ударе твердого тела.) Окончательно,

$$v_{1x} = \begin{cases} v_{0x} - (k_{\text{в}} + 1) f \left|v_{0y}\right|, & \text{если} \quad v_{0x} \ge (k_{\text{в}} + 1) f \left|v_{0y}\right|, \\ 0, & \text{если} \quad v_{0x} < (k_{\text{в}} + 1) f \left|v_{0y}\right|. \end{cases} \tag{5}$$

Этой формулой и описывается изменение v_x при ударе. Как сказано выше, здесь предполагается, что $v_{0x} > 0$. Условие задачи 1 не позволяет заранее исключить случай $v_{0x} \le 0$. Если знак v_{0x} заранее не известен, то формулу (5) нетрудно модифицировать:

$$v_{1x} = \begin{cases} v_{0x} - (k_{\text{в}}+1) f \left|v_{0y}\right|, & \text{если} \quad v_{0x} \ge (k_{\text{в}}+1) f \left|v_{0y}\right|, \\ v_{0x} + (k_{\text{в}}+1) f \left|v_{0y}\right|, & \text{если} \quad v_{0x} \le -(k_{\text{в}}+1) f \left|v_{0y}\right|, \\ 0, & \text{если} \quad \left|v_{0x}\right| < (k_{\text{в}}+1) f \left|v_{0y}\right|. \end{cases} \qquad (6)$$

Учет (6) (при $k_{\text{в}} = 0$) в тестах 7 и 8 дает, соответственно, $x = 1.1977$ м и $x = 2.0016$ м.

Литература.

Няшин Ю.И., Осипенко М.А. Аналогия между задачами о плоском ударе с сухим трением и о качении колеса с трением / Современные проблемы механики и ее преподавания в ВУЗах: докл. IV Всерос. совещания-семинара зав. кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики ВУЗов РФ, Новочеркасск, 21-24 сент. 2010 г., Новочеркасск, изд-во ЮРГТУ (НПИ), 2010, с. 161-164.

Решение задачи 2.

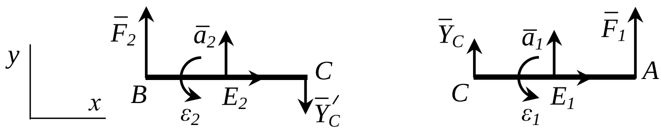

Рис. 4

2.1. Рассмотрим движение каждого из стержней *AC* и *BC* по отдельности, введя силы реакции в шарнире *C* (рис. 4). Обозначим через E_1, E_2 их центры тяжести, соответственно.

Так как стержни одинаковы, то центр тяжести системы находится в точке *C*. Так как вдоль оси *x* внешних сил нет, то $a_{Cx} = 0$. А так как система в данный момент находится в покое, то нормальные компоненты ускорений E_1, E_2 относительно C также равны нулю. Поэтому из теоремы о сложении ускорений при плоскопараллельном движении: $a_{E_1,x} = a_{E_2,x} = 0$. Отсюда из теоремы о движении центра масс: $X_C = 0$. Итак, ускорения $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ точек E_1, E_2 направлены вертикально (предварительно выбираем для них положительные направления в сторону оси x). Угловые ускорения стержней ε_1, ε_2 предварительно направляем против часовой стрелки (если после всех вычислений угловое ускорение окажется отрицательным, то его истинное направление по часовой стрелке).

Обозначим массу каждого из стержней через $m = M/2$, а длину каждого стержня через l. Запишем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения тела AC:

$$ma_1 = F_1 + Y_C. \tag{1}$$

$$J_{E_1 z}\varepsilon_1 = F_1 \cdot \frac{l}{2} - Y_C \cdot \frac{l}{2}.$$

$$\frac{ml}{6}\varepsilon_1 = F_1 - Y_C. \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения тела BC:

$$ma_2 = F_2 - Y_C. \tag{3}$$

$$J_{E_2 z}\varepsilon_2 = -F_2 \cdot \frac{l}{2} - Y_C \cdot \frac{l}{2}.$$

$$\frac{ml}{6}\varepsilon_2 = -F_2 - Y_C. \tag{4}$$

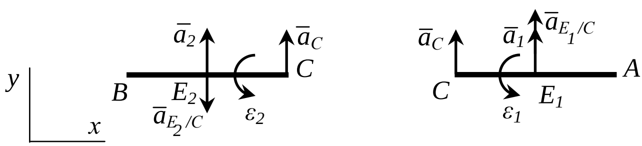

Рис. 5

Кроме этого, нужно задать кинематическое условие контакта обоих стержней в точке C при их плоскопараллельном движении (рис. 5):

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_C + \bar{a}_{E_1/C}.$$

$$\bar{a}_2 = \bar{a}_C + \bar{a}_{E_2/C}.$$

Проецируем на ось y и приравниваем:

$$a_1 = a_C + a_{E_1/C}.$$

$$a_2 = a_C - a_{E_2/C}.$$

$$a_C = a_1 - a_{E_1/C} = a_2 + a_{E_2/C}$$

$$a_1 - \varepsilon_1 \frac{l}{2} = a_2 + \varepsilon_2 \frac{l}{2}. \qquad (5)$$

Уравнения (1) - (5) образуют СЛАУ относительно неизвестных a_1, $\varepsilon_1 l$, Y_C, a_2, $\varepsilon_2 l$. Отметим, что данная СЛАУ имеет аналитическое решение:

$$a_A = (1 + 6k)g.$$

Однако получение его довольно громоздко. Проще записать программу решения СЛАУ, например, методом Гаусса. Кроме того, аргументом в пользу написания такой программы является то, что наработки из неё могут быть использованы для решения задания 2.2, в котором получить приемлемое по форме аналитическое решение представляется весьма проблематичным.

Достаточно очевидно, что для определения a_A без уменьшения общности в программе можно выбрать $l = 1$, $m = 1$. После решения СЛАУ находим:

$$a_A = a_1 + \varepsilon_1 \frac{l}{2}.$$

2.2. По аналогии с (1) - (4) получаем $2n$ дифференциальных уравнений для каждого из n стержней. По аналогии с (5) получаем $n-1$ кинематических уравнений контакта в шарнирах. В итоге получим СЛАУ из $3n-1$ уравнений относительно $3n-1$ неизвестных: a_1, $\varepsilon_1 l$, Y_1, a_2, $\varepsilon_2 l$, Y_2, a_3, $\varepsilon_3 l$, … , a_{n-1}, $\varepsilon_{n-1} l$, Y_{n-1}, a_n, $\varepsilon_n l$. При формировании матрицы удобно учесть периодичность заполнения её ненулевых элементов: $c(i+3, j+3) = c(i, j)$.

Численные примеры приведены в тестах для отладки.