Разбор заданий по математике

Олимпиадные задания по математике

Задание 1. Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3}ctg^2+\frac{12}{cos^2}=1-20tg\text{x}-\frac{10}{3}ctg\text{x},$$

принадлежащий промежутку $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ответ выразите в градусах.

Решение:

ОДЗ $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

По условию $\frac{12}{cos^2 x}+\frac{1}{3}ctg^2x+10\left(2tgx+\frac{ctgx}{3}\right)=1$,
тогда $12+12tg^2x+\frac{1}{3}ctg^2x+10\left(2tgx+\frac{ctgx}{3}\right)=1$.

Пусть $2tgx+\frac{ctgx}{3}=a$,
тогда $4tg^2x+\frac{4}{3}+\frac{ctg^2x}{9}=a^2$
$12tg^2x+4+\frac{ctg^2x}{3}=3a^2$, $12+12tg^2x+\frac{ctg^2x}{3}=3y^2+8$

Получим уравнение
$$3y^2+8+10y=1$$
$$3y^2+10y+7=0$$
$$y_1=-\frac{7}{3},$$
$$y_2=-1$$

тогда
$$2tgx+\frac{ctgx}{3}=-\frac{7}{3}$$
$$6tg^2x+7tgx+1=0$$
$$tgx=-1 \qquad tgx=-\frac{1}{6}$$
$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k \qquad x=-arctg\frac{1}{6}+\pi n, n\,\epsilon\, z$$

$$2tgx+\frac{ctgx}{3}=-1$$
$$6tg^2x+3tgx+1=0$$

Не имеет решения (D < 0)
Найдем корень из данного промежутка
$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{3\pi}{4}$$

Ответ: в градусах 135˚

Задание 2. Найти длину промежутка всех значений *x*, при которых неравенство

$$y^2 - (5^x - 1)(y - 1) > 0$$

Выполняется для всех значений *y*.

Решение:

$y^2 - (5^x - 1)y + (5^x - 1) > 0$

$ay^2 + by + c > 0$, если $\begin{cases} a>0 \\ D>0 \end{cases}$

Тогда $\mathrm{D} = (5^x - 1)^2 - 4(5^x - 1) < 0$

$(5^x - 1)(5^x - 1 - 4) < 0$

$(5^x - 1)(5^x - 5) < 0$

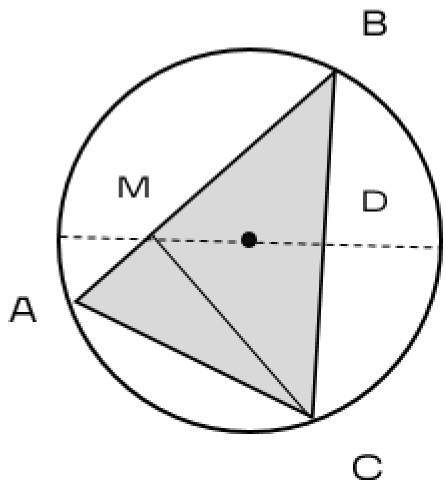
=> $5^x > 1$ $5 < 5^x < 5^1$

$x > 0$ $0 < x < 1$

Ответ: 1

Задание 3. На диаметре окружности (R=4 см) взята точка M. Хорда AB проходит через точку M, таким образом, что AM:MB=2:3. Найти площадь треугольника ABC, если угол между хордой и диаметром составляет 30°. (Результат возведите в квадрат и округлите до десятых).

Решение:



Проведем MD перпендикулярно BC. По условию MD лежит на диаметре => MB=BC => угол BMC = 60˚, т.к. по условию угол BMD = 30˚. Тогда треугольник MBC – правильный. Пусть MB = 3x, тогда BC = 3x, AM = 2x по условию. По теореме косинусов:

$$AC^2 = 48 = (5^x)^2 + (3^x)^2 - 3xcos60°$$

$$x^2 = \frac{48}{19};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB * BC * sin60° = \frac{15x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{180\sqrt{3}}{19} \approx 269{,}3 \text{ см}^2$$

Ответ: 269,3 см²

Задание 4. Докажите, что

$$log_k \frac{m+n}{3} = \frac{log_k m + log_k n}{2}$$

если $m^2 + n^2 = 7mn$.

Решение:

Доказательство.

$$a^2 + b^2 = 7ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab \quad => \quad (\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = 9ab$$
$$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$$

Тогда $\log_k \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log_k ab \quad => \quad 2\log_k \frac{a+b}{3} = \log_k a + \log_k b$

$$=> \log_\mathrm{k} \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{3} = \frac{1}{2}(\log_k a + \log_k b)$$

Задание 5. Найдите сумму последовательности

1+6+10+60+...

Решение:

Запишем данную сумму в виде

$$(1*2-1)+(2*2^2-2)+(3*2^3-3)+\cdots+n*2^n-n$$
$$= (1*2+2*2^2+3*2^3+\cdots+n*2^n)-(1+2+3+\cdots+n)$$
$$= S_n - S_k$$

$$S_n = 2+2*2^2+3*2^3+\cdots+n*2^{n-1} \quad => \quad \frac{\mathrm{S_n}}{2}$$
$$= 1+2*2+3*2^2+\cdots+\mathrm{n}*2^{\mathrm{n}-1}$$
$$\frac{S_n}{2} - S_n = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+n*2^n$$

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии в правой части равенства

$$-\frac{1}{2}S_n = \frac{1+2^n}{1-2} - n*2^n \quad => \quad \mathrm{S_n} = 2^{\mathrm{n}+1}*(\mathrm{n}-1)+2$$

Вычислим $S_k = 1+2+3+\cdots n = \frac{1+n}{2}*n$

Сумма $1+6+10+60+\cdots = S_n - S_k = 2^{n+1}(n-1)+2-\frac{1+n}{2}*n$

Ответ: $\mathbf{2^{n+1}(n-1)+2-\frac{n(n+1)}{2}}$