КГЭУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КГЭУ»)

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
КГЭУ
Сертификат: 03AEEFBD005AAEE4944D64594F2B15ECD0
Владелец: Ахметова Ирина Гареевна
Действителен: с 16.03.2022 до 16.03.2023

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по развитию и инновациям

______________И.Г. Ахметова
«____»_____________2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

1. Физико-математические науки

(код и наименование области наук)

1.1. Математика и механика

(код и наименование группы научных специальностей)

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

(код и наименование научной специальности)

Форма обучения
Очная

Казань, 2022

Рабочая программа составлена на основании Федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов), утвержденных приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 20.10.2021 № 951.

1. Цели и задачи изучения дисциплины

Целью изучения дисциплины является формирование знаний, умений и навыков в области математических дисциплин, включая знания, умения, навыки и социально-личностные качества, обеспечивающие успешность научно-педагогической деятельности, воспитание высокой математической культуры.

Основными **задачами** изучения дисциплинами являются:

- изучение основных принципов и методов теории вещественного, комплексного и функционального анализа.
- формирование умений в области применения основных методов теории вещественного, комплексного и функционального анализа при решении проблем математического анализа.
- получение практических навыков работы с методами теории вещественного, комплексного и функционального анализа.

В результате изучения дисциплины «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» аспирант должен:

Знать:

- понятия и основные утверждения теории меры, измеримых функций, теории интегрирования, теории дифференцирования, теории функциональных рядов;
- основные прикладные возможности теорий интегрирования и дифференцирования;
- понятия и основные утверждения теории аналитических функций, теории целых и мероморфных функций, теории конформных отображений;
- понятия и основные утверждения теории метрических и топологических пространств, теории нормированных и гильбертовых пространств, теории линейных функционалов, теории линейных операторов, теории обобщенных функций и операционного исчисления.

Уметь:

- формулировать постановку теоретических и прикладных задач и подбирать подходящие методы для их решения;
- проверять и доказывать свойства непрерывности, дифференцируемости, аналитичности и др. функций, функционалов, отображений, доказывать сходимость пределов, рядов;
- выяснять свойства мер, топологий, пространств;

- создавать примеры математических конструкций с заданными характеристиками;
- формулировать и доказывать утверждения вещественного, комплексного и функционального анализа;
- привлекать к решению задач знания из других областей математики;
- применять методы теории функций действительного переменного, комплексного переменного и функционального анализа к решению теоретических и прикладных задач и к доказательству утверждений;
- выдвигать гипотезы о математической модели на основе полученных данных о ней;
- выдвигать теоретические гипотезы на основе имеющихся утверждений и знаний об объекте.

Владеть:

- основными методами доказательств утверждений вещественного, комплексного и функционального анализа;
- методами решения прикладных задач;
- методами решения нелинейных уравнений;
- методами решения экстремальных задач;
- методами теории аналитических функций комплексного переменного;
- методами функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» изучается на 4 году обучения в 8-ом семестре. Дисциплина относится к профессиональному циклу образовательного компонента программы аспирантуры.

3. Содержание дисциплины

3.1. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах и зачетных единицах) 1 год аспирантуры; вид отчетности – кандидатский экзамен.

Общая трудоемкость дисциплины 3 зачетных единицы (108 часов): 34 ак. ч. – лекции; 74 ак. ч. – самостоятельная работа.

Виды учебной работы	**Объем часов /ЗЕТ**
Трудоемкость изучения дисциплины	108/3
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	34
в том числе:	
лекции	20
Практические (семинарские) занятия	14
Самостоятельная работа аспиранта (всего)	74
в том числе:	
подготовка к практическим (семинарским) занятиям	36
изучение тем, вынесенных в самостоятельную работу	38

3.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Объем часов / зачетных единиц			
		лекции	семинары	практические занятия	самостоят. работа
1	Теория функций действительного переменного	4		2	12
2	Теория функций комплексного переменного	6		4	12
3	Функциональный анализ	10		8	14
4	Промежуточная аттестация, экзамен				36
	Итого	20	0	14	74

3.3. Лекционный курс

Раздел 1. Теория функций действительного переменного

Меры измеримых функций, интеграл. Аддитивность функций множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые продолжения мер. Теорема Фубини.

Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченной вариацией. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стилтьеса.

Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. Пространства L_P, их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L_2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам. Теорема Мерсера о стремлении к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стилтьеса.

Раздел 2. Теория функций комплексного переменного

Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки. Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Приближение аналитических функций многочленами.

Целые и мероморфные функции. Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Свойства конформных отображений. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. Аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные свойства функций. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Раздел 3. Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Отделимость выпуклых множеств. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха—Штейнгауза о равномерной ограниченности последовательностей линейных ограниченных операторов, теорема об открытом отображении. Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Критерии компактности множеств в пространствах $C[a;b]$ и $L_P[a;b]$.

Линейные топологические пространства. Полунормы и локальная выпуклость. Метризация линейного топологического пространства. Слабые топологии. Компактные выпуклые множества. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

Дифференциальное исчисление в линейных пространствах. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста: их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

3.4. Практические занятия

№ п/п	Тема практических (семинарских) занятий	Семестр	Номер раздела лекционного курса	Продол-житель-ность (часов)
1	2	3	4	5
1.	Числовые и функциональные ряды. Теория меры Лебега. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. Пространства L_p, их полнота.	8	1	2
2.	Функции комплексного переменного. Непрерывность, дифференцируемость. Комплексное интегрирование. Ряды аналитических функций. Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты. Принцип аргумента.	8	2	4
4.	Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Линейные топологические пространства. Полунормы и локальная выпуклость. Метризация линейного топологического пространства. Слабые топологии.	8	3	2
7.	Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Проекторы, унитарные, изометрические и частично изометрические операторы.	8	3	2
8.	Операторы Теплица и алгебра Теплица. Изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема.	8	3	2
9.	Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка	8	3	2

	обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста: их преобразование Фурье.			
	Итого:	–	–	14

3.5. Лабораторные занятия – не предусмотрены.

3.6. Содержание самостоятельной работы

Раздел 1.

Теория меры Лебега. Пространства , их полнота.

Раздел 2.

Аналитические функции. Конформные отображения. Гармонические функции.

Раздел 3.

Теория множеств. Метрические и топологические пространства. Теорема Бэра. Компактные пространства. Нормированные и линейные топологические пространства. Гильбертовы пространства.

Линейные функционалы и линейные операторы. Теорема Хана-Банаха. Спектральная теорема. Производные Гато и Фреше.

Операторы Теплица. Самосопряженные операторы. Спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. Обобщенные функции.

4. Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине

4.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль используется для оперативного и регулярного управления учебной деятельностью аспирантов, включает в себя: контрольный опрос, решение индивидуальных заданий.

Данный вид контроля представляет собой выполнение индивидуальных заданий с последующей проверкой преподавателем на практических занятиях и устный опрос, который выполняется на практических занятиях. Проверяются знания текущего и пройденного материала: основные понятия и теоремы; умения применять эти знания при решении конкретных задач. Текущий контроль проводится в начале каждого практического занятия, что позволяет аспирантам закреплять знания, полученные на предыдущих занятиях. Приведены индивидуальные задания и вопросы устного опроса, сгруппированные по темам разделов.

Индивидуальные задания

1. Разложите в ряд Фурье непериодическую функцию, заданную на сегменте $[0,1]$ уравнением $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$. Доопределите функцию на сегменте $[-1,0]$ четным образом. Начертите график функции.

2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на сегменте $[-\pi,\pi]$ уравнением

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -\pi\le x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ -1, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi.\end{cases}$$

Начертите график функции.

3. Вычислите приближенно $\int_0^{0.5}\ln(1+\sqrt[3]{x})\,dx$ со степенью точности $\delta=0{,}001$.

4. Разложите функцию $f(x)=x^6+x^4+7x^2$ по степеням $(x+1)$.

5. Найдите интервал сходимости степенных рядов и исследуйте на концах интервала: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+3)!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^{2n}}(x-2)^n$.

6. Пусть в области D функция $f(z)$ аналитична, а функция $g(z)$ не аналитична ни в одной точке D. Докажите, что функция $h(z)=f(z)+g(z)$ нигде не аналитична в D.

7. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$, если известная ее вещественная часть $u(x,y)=e^x(x\cdot\cos y-y\cdot\sin y)$, где $z=x+iy$.

8. Разложите в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ функцию $f(z)=z\cdot e^{3z-z^2}$.

9. Найдите вычет для функции $f(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^3}$ в точке $z=\infty$.

10. Определите тип особой точки $z=0$ для функции: $f(z)=\frac{e^{9z}-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$.

11. Вычислите интегралы: а) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$, б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$.

12. Найдите отображение плоскости z с разрезами вдоль лучей $(-\infty;1]$ и $[2;+\infty)$ на верхнюю полуплоскость $Im(w)>0$.

13. Найдите образ прямой $y=x-i$ при отображении $w=\frac{1}{z}$.

14. Найдите линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках $0,1,i$ в плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $0,2,1+i$ в плоскости w.

15. Найдите образ окружности $|z|=3$ при отображении $w=\frac{25}{z}$.

16. Найдите дробно-линейную функцию, переводящую точки $1,i,-1$ в точки $-1,0,1$.

Вопросы устного опроса

Вопросы к разделу 1

1. Перечислите признаки сходимости числовых рядов
2. Определение ряда Фурье. Как находятся коэффициенты
3. Алгоритм приближенного вычисления интеграла при помощи рядов.

4. Теорема Егорова
5. Теорема Лузина
6. Сравнение интегралов Римана и Лебега
7. Пространство L_p, его полнота.
8. Определение и свойства меры
9. Измеримые множества
10. Измеримые функции

Вопросы к разделу 2

1. Понятие аналитичности функции комплексного переменного
2. Дифференцируемость ФКП и производная
3. Интеграл от ФКП
4. Условия Коши-Римана
5. Конформное отображение
6. Ряд Лорана
7. Изолированные особые точки
8. Теорема Коши
9. Формула Коши-Адамара
10. Основная теорема теории вычетов

Вопросы к разделу 3

1. Метрические и топологические пространства
2. Плотные подмножества и сепарабельные пространства.
3. Полнота и пополнение метрического пространства.
4. Компактные топологические пространства
5. Компактность и предкомпактность в метрических пространствах. Теорема Арцела.
6. Нормированные пространства
7. Теорема Хана-Банаха в нормированнных пространствах.
8. Спектральная теорема Фредгольма.
9. Линейные операторы в нормированных пространствах
10. Функционалы в нормированных пространствах
11. Вполне непрерывные операторы в банаховых пространствах
12. Гильбертово пространство
13. Теорема Банаха-Алаоглу
14. Теорема Банаха-Штейнгауза
15. Теорема Бэра
16. Теорема Гельфанда
17. Теорема Гельфанда-Наймарка
18. Теорема Лебега
19. Теорема Лиувиллся о неподвижной точке
20. Теорема Хаусдорфа
21. Теорема Рисса

22. Теоремы Фредгольма
23. Теорема Урысона
24. Теорема Тихонова

4.2. Промежуточная аттестация

Для допуска аспиранта к сдаче кандидатского экзамена по дисциплине «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» проводится промежуточная аттестация в форме зачета.

При подготовке к сдаче зачета аспирантам выдается перечень вопросов. Задание на зачет выдается в виде билета, содержащего три вопроса. Зачет проводится в письменной форме с дальнейшим собеседованием.

Вопросы для зачета

1. Признаки сходимости числовых рядов.
2. Определение ряда Фурье. Как находятся коэффициенты
3. Алгоритм приближенного вычисления интеграла при помощи рядов.
4. Теорема Егорова
5. Теорема Лузина
6. Сравнение интегралов Римана и Лебега
7. Пространство L_p, его полнота.
8. Определение и свойства меры
9. Измеримые множества
10. Понятие аналитичности функции комплексного переменного
11. Дифференцируемость функции комплексного переменного и производная
12. Интеграл от функции комплексного переменного
13. Условия Коши-Римана
14. Конформное отображение
15. Ряд Лорана
16. Изолированные особые точки
17. Теорема Коши
18. Формула Коши-Адамара
19. Основная теорема теории вычетов
20. Метрические и топологические пространства
21. Полнота и пополнение метрического пространства.
22. Компактные топологические пространства
23. Нормированные пространства
24. Теорема Хана-Банаха в нормированнных пространствах.
25. Спектральная теорема Фредгольма.
26. Линейные операторы в нормированных пространствах
27. Функционалы в нормированных пространствах
28. Вполне непрерывные операторы в банаховых пространствах
29. Гильбертово пространство

30. Теорема Банаха-Алаоглу
31. Теорема Бэра
32. Теорема Гельфанда
33. Теорема Гельфанда-Наймарка
34. Теорема Лиувиллся о неподвижной точке
35. Теорема Хаусдорфа

При наличии положительной оценки аспирант (соискатель) допускается к сдаче кандидатского экзамена по дисциплине «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Зачтенная работа по билету представляется в отдел аспирантуры в 1 экземпляре с подписью и указанием даты не позднее, чем за 1 неделю до окончания занятий по дисциплине.

Критерии оценки:

Оценка	Критерии
«зачтено»	Наличие твердых и достаточно полных знаний программного материала, правильные действия по применению полученных знаний на практике.
«не зачтено»	Наличие грубых ошибок в ответе, непонимание сущности излагаемого вопроса, неумение применять знания на практике, неточность ответов на дополнительные вопросы.

5. Оценочные средства для проведения кандидатского экзамена

Задание на экзамен выдается в виде трех вопросов (два теоретических и один практический) в форме билетов.

Перечень теоретических вопросов к кандидатскому экзамену

1. Действительный анализ

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина.

Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной.

Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса.

Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p, их полнота. Ортонормированные системы в L_p и равенство Парсеваля.

Преобразование Фурье. Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд.

Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье—Стилтьеса.

2. Комплексный анализ

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности.

Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами.

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Лефлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля—Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

3. Функциональный анализ

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L_p.

Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство.

Слабая топология и слабая сходимость.

Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.

Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах.

Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

Дифференциальное исчисление в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье.

Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

Экзаменационные задачи

1. Покажите, что $C_0(X)$ – банахово пространство, если X – локально-компактное пространство.

2. Покажите, что если f – непрерывна на $[a;b]$ и f' ограничена на $(a;b)$, то f принадлежит классу Lip_1.

3. Покажите, что непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является $\mathcal{B}$-измеримой

4. Пусть A – алгебра конечных объединений промежутков вида $[a;b)$ в множестве $E = [0;1)$. Покажите, что $A \times A$ не является алгеброй в $E \times E$.

5. В множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел положим

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{если } x = y \\ 1 + (x+y)^{-1}, \ \text{если } x \neq y \end{cases}$$

Докажите, что d – метрика, $(\mathbb{N}, d)$ – полное метрическое пространство.

6. Покажите, что множество

$$\Phi = \{\varphi \in C[0,1]: 0 \le \varphi(x) \le 1, 0 \le x \le 1\}$$

не равностепенно непрерывно в $C[0,1]$.

7. Покажите, что $C_{00}(\mathbb{R})$ плотно в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

8. Докажите полноту $L^2(\mu)$ для σ-конечной меры μ.

9. Пусть E, F – нормированные пространства, причем E – конечномерно. Тогда любое линейное отображение $A: E \to F$ непрерывно. Докажите утверждение.

10. Покажите, что каждое конечномерное нормированное пространство рефлексивно.

11. Пусть E – банахово пространство, причем E^* рефлексивно. Покажите, что E также рефлексивно.

12. Укажите явный вид изоморфизма между гильбертовым пространством H и H^* для $H = l^2$.

13. Приведите пример непрерывного отображения, не являющегося открытым.

14. Приведите пример открытого отображения, не являющегося непрерывным.

15. Приведите пример разрывного отображения (разрывной функции) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с естественной топологией, переводящего открытые множества в открытые.

16. Докажите, что интервал $(0,1)$ гомеоморфен $\mathbb{R}$.

17. Найдите все непрерывные отображения из пространства $\mathbb{R}$ с естественной топологией в пространство $\mathbb{R}$ с топологией, базой которой являются полуинтервалы, открытые справа.

Критерии выставления оценки:

Оценка	Критерии
«отлично»	Наличие глубоких и исчерпывающих знаний в объеме пройденного программного материала, правильные и уверенные действия по применению полученных знаний на практике, грамотное и стройное изложение материала при ответе, знание дополнительно рекомендованной литературы
«хорошо»	Наличие твердых и достаточно полных знаний программного материала, незначительные ошибки при освещении заданных вопросов, правильные действия по применению знаний на практике, четкое изложение материала
«удовлетворительно»	Наличие твердых знаний пройденного материала, изложение ответов с ошибками, необходимость дополнительных вопросов, правильные действия по применению знаний на практике

«неудовлетворительно»	Наличие грубых ошибок в ответе, непонимание сущности излагаемого вопроса, неумение применять знания на практике, неточность ответов на дополнительные вопросы.

6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков определены локальными нормативными актами, положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации аспирантов ФГБОУ ВО «КГЭУ».

К прохождению промежуточной аттестации в форме **кандидатского экзамена** по дисциплине «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» допускаются аспиранты, получившие оценку «зачтено», выполнившие все задания текущего контроля, предусмотренные рабочей программой дисциплины (контрольный опрос, индивидуальные задания).

Кандидатский экзамен проводится как в устной, так и письменной форме. Экзаменационная комиссия по приему кандидатского экзамена по дисциплине «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» правомочна принимать кандидатский экзамен по дисциплине «Вещественный, комплексный и функциональный анализ». В заседании участвуют не менее 3 специалистов, имеющих ученую степень кандидата или доктора технических наук.

Перечень вопросов, выносимых на экзамен, доводится до сведения аспирантов во время занятий.

При проведении экзамена в аудитории, где проводится экзамен, одновременно должно находиться не более 6 аспирантов. На подготовку к ответу при устной форме экзамена аспиранту предоставляется 40-45 минут. Преподавателю, принимающему экзамен, предоставляется право задавать аспирантам дополнительные вопросы. Комиссии, принимающей экзамен, предоставляется право задавать аспирантам дополнительные вопросы. Объявление результатов сдачи экзамена производится сразу после сдачи экзамена.

При проведении экзамена в письменной форме в аудитории, где проводится экзамен, могут находиться все обучающиеся по данной дисциплине аспиранты. На подготовку ответа при письменной форме экзамена аспиранту предоставляется не более 90 минут. Объявление результатов сдачи экзамена производится не позднее следующего дня после сдачи экзамена.

Итоговая оценка по кандидатскому экзамену выводится как средняя оценка членов комиссии.

Успеваемость аспирантов определяется оценками «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

ФГБОУ ВО «КГЭУ» располагает материально-технической базой, соответствующей действующим санитарно-техническим нормам и обеспечивающей проведение теоретической подготовки, предусмотренной учебным планом аспиранта, а также обеспечения поддержки самостоятельной работы аспирантов.

Материально-техническая база: компьютеры с выходом в Интернет; принтеры; сканеры; копиры.

№ п./п.	Вид учебной работы	Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
1	Лекции	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа	доска аудиторная (2шт.), ноутбук переносной
2	Практические занятия	Учебная аудитория для проведения занятий практического типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	доска аудиторная (2 шт.), ноутбук (переносной)
3	Самостоятельная работа обучающихся	Компьютерный класс с выходом в Интернет В-600а	моноблок (30 шт.), система видеонаблюдения (6 видеокамер), проектор, экран
		Читальный зал библиотеки	проектор, переносной экран, компьютеры (5 шт.)

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

8.1. Основная литература:

1. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд.,стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 272 с. — ISBN 978-5-8114-0976-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210290 — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Власова, Е. А. Элементы функционального анализа: учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212189— Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Спивак, М. Математический анализ на многообразиях: учебное пособие / М. Спивак. — 2-е изд. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 160 с. — ISBN 5-8114-0646-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210152— Режим доступа: для авториз. пользователей.

4.Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу: учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-1821-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212048— Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу: учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 240 с. — ISBN

978-5-8114-1822-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212057— Режим доступа: для авториз. пользователей

8.2. Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учебник для вузов: в 2 частях / Г.М. Фихтенгольц. – 13-е, стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2021 – Часть 1: Основы математического анализа – 2021. – 444 с. – ISBN 978-5-8114-7583-4. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/162390

2. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : учебник для вузов : в 2 частях / Г. М. Фихтенгольц. — 12-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021 — Часть 2 — 2021. — 464 с. — ISBN 978-5-8114-8375-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL:https://e.lanbook.com/book/175511

3. Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу: учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст: электронный //Лань: электронно-библиотечная система. —URL: https://e.lanbook.com/book/168380

8.3. Электронно-библиотечные системы

1. book.ru;
2.e.lanbook.com.

8.4 Профессиональные базы данных

№п/п	Наименование профессиональных баз данных	Адрес
1	Российская национальная библиотека	http://nlr.ru/
2	Общероссийский математический портал	http://www.mathnet.ru/
3	Национальная электронная библиоитека (НЭБ)	https://rusneb.ru/
4	Высшая аттестационная комиссия при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации	https://scienceid.net/president/
5	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU	http://elibrary.ru
6	Электронная библиотека диссертаций (РГБ)	diss.rsl.ru
7	Springer	www.springer.com
8	Russian Science Citation Index (RSCI)	clarivate.ru
9	МБД Scopus	www.scopus.com
10	МБД Web of Science	https://webofknowledge.com/
11	МБД zbMATH	www.zbmath.org
12	Портал РФФИ	https://www.rfbr.ru/rffi/ru/

9. Перечень аудиторий и помещений

Для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации предусмотрены следующие аудитории корпус Д: Д-404, Д-412, Д-417, В-600(а, б).

10. Особенности организации образовательной деятельности для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Лица с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) и инвалиды имеют возможность беспрепятственно перемещаться из одного учебно-лабораторного корпуса в другой, подняться на все этажи учебно-лабораторных корпусов, заниматься в учебных и иных помещениях с учетом особенностей психофизического развития и состояния здоровья.

Для обучения лиц с ОВЗ и инвалидов, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, обеспечены условия беспрепятственного доступа во все учебные помещения. Информация о специальных условиях, созданных для обучающихся с ОВЗ и инвалидов, размещена на сайте университета www//kgeu.ru. Имеется возможность оказания технической помощи ассистентом, а также услуг сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

Для адаптации к восприятию лицами с ОВЗ и инвалидами с нарушенным слухом справочного, учебного материала по дисциплине обеспечиваются следующие условия:

- для лучшей ориентации в аудитории, применяются сигналы оповещения о начале и конце занятия (слово «звонок» пишется на доске);
- внимание слабослышащего обучающегося привлекается педагогом жестом (на плечо кладется рука, осуществляется нерезкое похлопывание);
- разговаривая с обучающимся, педагогический работник смотрит на него, говорит ясно, короткими предложениями, обеспечивая возможность чтения по губам.

Компенсация затруднений речевого и интеллектуального развития слабослышащих обучающихся проводится путем:

- использования схем, диаграмм, рисунков, компьютерных презентаций с гиперссылками, комментирующими отдельные компоненты изображения;
- регулярного применения упражнений на графическое выделение существенных признаков предметов и явлений;
- обеспечения возможности для обучающегося получить адресную консультацию по электронной почте по мере необходимости.

Для адаптации к восприятию лицами с ОВЗ и инвалидами с нарушениями зрения справочного, учебного, просветительского материала, предусмотренного образовательной программой по выбранному направлению подготовки, обеспечиваются следующие условия:

- ведется адаптация официального сайта в сети Интернет с учетом особых потребностей инвалидов по зрению, обеспечивается наличие крупношрифтовой справочной информации о расписании учебных занятий;

- педагогический работник, его собеседник (при необходимости), присутствующие на занятии, представляются обучающимся, при этом каждый раз называется тот, к кому педагогический работник обращается;
- действия, жесты, перемещения педагогического работника коротко и ясно комментируются;
- печатная информация предоставляется крупным шрифтом (от 18 пунктов), тотально озвучивается;
- обеспечивается необходимый уровень освещенности помещений;
- предоставляется возможность использовать компьютеры во время занятий и право записи объяснений на диктофон (по желанию обучающихся).

Форма проведения текущей и промежуточной аттестации для обучающихся с ОВЗ и инвалидов определяется педагогическим работником в соответствии с учебным планом. При необходимости обучающемуся с ОВЗ, инвалиду с учетом их индивидуальных психофизических особенностей дается возможность пройти промежуточную аттестацию устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п., либо предоставляется дополнительное время для подготовки ответа.

Рабочая программа дисциплины «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» образовательной программы «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» разработана в соответствии с требованиями по научной специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Автор(ы)	________________	д-р физ.-мат. н., проф. С.А. Григорян
	________________	к.ф.-м.н., Т.А. Григорян

Программа обсуждена и одобрена на заседании кафедры «Высшая математика» от 16.03.2022, протокол № 4.

Зав. кафедрой	________________	д-р физ.-мат. н., доцент А.С. Ситдиков

Программа утверждена на заседании научно-технического совета от 13.04.2022, протокол № 3.