

О. В. РАДАЙКИН¹, канд. техн. наук, инж. кафедры энергообеспечение предприятий и энергосберегающих технологий; **Л. С. САБИТОВ¹**, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры энергообеспечение предприятий и энергосберегающих технологий; **Л. Ш. АХТЯМОВА²**, асп. кафедры сопротивления материалов; **Т. П. АРАКЧЕЕВ¹**, асп. кафедры энергообеспечение предприятий и энергосберегающих технологий; **А. ДАРВИШ¹**, асп. кафедры энергообеспечение предприятий и энергосберегающих технологий

ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО ДИАГРАММНОГО МЕТОДА РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

¹ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет». Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51.

Тел.: 8 (843) 519-42-06, каб. Д-210; эл. почта: olegxxii@mail.ru

²ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет». Россия, 344003, ЮФО, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1.

Тел.: 8 (863) 201-91-36; эл. почта: sabitov-kgasu@mail.ru

Ключевые слова: армированный бетон, нелинейная деформационная модель, диаграммный метод, диаграммы деформирования, численный метод, погрешность.

В доступных для анализа источниках не поясняется почему в них принята именно такая точность численного диаграммного метода расчёта стержневых железобетонных элементов (расчётное и предельно допустимое значения погрешности), именно такой параметр для её оценки. Окончательно сложившегося подхода к оценке точности рассматриваемого метода пока не существует. То, что присутствует в литературе не имеет под собой строгой теоретической основы. Попытаться выправить эту ситуацию призвана данная статья. Для этого привлечены математическая теория численных методов, метрология и теория железобетона. Разработана классификация погрешностей, возникающих при определении истинного значения контрольного параметра, интегрально характеризующего НДС элемента. В качестве такого параметра принята кривизна. Сделан вывод о том, что максимальное значение допустимой погрешности метода, которое характеризует точность, не должно превышать 5% и может быть скорректировано в сторону уменьшения (повышения точности) за счёт уточнения погрешностей расчётной модели и эксперимента.

Всё более широкое распространение последние годы в области проектирования железобетонных конструкций приобретает численный диаграммный метод расчёта стержневых элементов (по так называемой нелинейной деформационной модели). Тому есть веские причины: он позволяет учитывать физическую нелинейность материалов, производить расчёты по

обеим группам предельных состояний по единым формулам, а также получать напряжённо-деформированное состояние (НДС) рассматриваемых элементов на всех этапах нагружения: от нуля и до разрушения. Метод относительно легко алгоритмизируется и автоматизируется на ЭВМ. При использовании любого численного метода, в том числе численного диаграммного, важными вопросами являются вопросы о точности, устойчивости, сходимости, корректности метода и начальном приближении. Статья посвящена вопросу точности.

Выделяют абсолютную погрешность

$$\Delta_x = |X' - X| \leq [\Delta_x], \quad (1)$$

и относительную

$$\delta_x = \left| \frac{X' - X}{X'} \right| \cdot 100\% \leq [\delta_x], \quad (2)$$

где X и X' – соответственно фактическое и опорное значение какого-либо параметра; Δ_x , δ_x – расчётные значения соответственно абсолютной и относительной погрешностей; $[\Delta_x]$, $[\delta_x]$ – предельно допустимые значения соответственно абсолютной и относительной погрешностей.

В такой записи формулы (1) и (2), к сожалению, встречаются редко: в доступных литературных источниках разделение на расчётные и предельно допустимые величины погрешностей не производится, что, на наш взгляд, не вполне удобно. Исключение составляет, например, учебное пособие [Гвоздев В. Д. Прикладная метрология: точность измерений. – М.: МИИТ, 2011. – 72 с.].

Отталкиваясь от классификации [Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Учебник, 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.] типы погрешностей по их источникам и причинам для рассматриваемых в статье вопросов можно сформулировать следующим образом:

1. Неустраняемые погрешности:

1.1. Погрешности, возникающие в ходе идеализации объекта исследований (стержневого элемента) путём построения его математической модели. На эти погрешности в определённой мере можно повлиять учётом факторов действительной работы железобетонного стержня в реальных условиях эксплуатации. Касаясь нелинейной деформационной модели диаграммного метода к таким факторам можно отнести: совместное рассмотрение сразу несколько сечений стержня, равномерно проведённых вдоль его длины; учёт деформаций сдвига в зонах совместного действия M и Q и т.д.

1.2. Неточности в исходных данных: при определении геометрии, нагрузок, физико-механических свойств материалов и т.д. Эти факторы обычно учитываются соответствующими коэффициентами надёжности, принятыми по нормам.

2. Погрешности метода расчёта. Практически все нелинейные задачи железобетона не решаются аналитически, поэтому для этого прибегают к численному методу – например, к численному диаграммному методу. Отсюда возникает погрешность метода.

3. Вычислительные погрешности: 3.1. Погрешности, возникающие при выполнении арифметических действий над приближёнными числами. 3.2. При вычислении значений функций. 3.3. При округлении чисел при вводе данных, выполнении арифметических действий и при выводе данных. 3.4. Погрешности, вызванные ограниченностью разрядной сетки вычислительных устройств.

Оценке точности численного диаграммного метода в литературе за редким исключением практически не уделяется должного внимания. Несмотря на это, на рынке компьютерного программного обеспечения инженерных расчётов представлен довольно широкий спектр программных комплексов, в которых реализован численный расчёт нелинейных задач железобетона, в том числе с применением нелинейной деформационной

модели. Как в этих программах решены вопросы точности, сходимости, начального приближения и устойчивости, к сожалению, не поясняется.

Далее приведём несколько формул-оценок из различных источников, но для удобства понимания и сравнения перепишем их в единых обозначениях, а также преобразуем под формат формул (1) и (2). При этом смысл, который авторы вкладывали в свои формулы, не нарушится.

Одна из первых оценок приведена в работе [1] в виде относительного среднеквадратического отклонения приращения элементов вектора деформаций на двух смежных итерациях:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\varepsilon_{z,k} - \varepsilon_{z,k+1}}{\varepsilon_{z,k} + \varepsilon_{z,k+1}} \right)^2 + \left(\frac{\chi_{x,k} - \chi_{x,k+1}}{\chi_{x,k} + \chi_{x,k+1}} \right)^2 + \left(\frac{\chi_{y,k} - \chi_{y,k+1}}{\chi_{y,k} + \chi_{y,k+1}} \right)^2 \right]} \leq [\delta], \quad (3)$$

где $\varepsilon_{z,k}, \varepsilon_{z,k+1}$ – относительные деформации стержня вдоль оси Oz соответственно на k -й текущей и $(k-1)$ -й итерациях; $\chi_{x,k}, \chi_{x,k+1}, \chi_{y,k}, \chi_{y,k+1}$ – кривизны продольной оси стержня относительно осей Ox и Oy на соответствующих итерациях расчёта; δ – относительная погрешность метода; $[\delta]$ – её предельное допустимое значение.

Выражение (3) называется также условием остановки итерационной последовательности.

В рассматриваемой статье говорится, что при предельно допустимой относительной погрешности $[\delta]=0,001$, «как показали многочисленные расчёты, достигается хорошая стабилизация напряжённо-деформированного состояния в нормальном сечении за 10...30 итераций».

Эту же оценку погрешности можно найти, например, в работе [2]. В монографии [3] формулу (3) несколько откорректировали, но не принципиально.

К сожалению, эта формула не имеет теоретического обоснования (так, в справочной литературе [Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Л.: Энергия, 1978. – 262 с.] чего-то похожего не обнаружено, а термин «отно-

сительное среднеквадратическое отклонение приращения» не обладает математической строгостью. То есть оценки типа (3) приняты её авторами по произволу, по каким-то своим, не понятным читателю, соображениям.

Наиболее подходящая для наших исследований оценка точности приведена в монографии [4]:

$$\delta = \left| \frac{\varepsilon_{b,k} - \varepsilon_{b,k-1}}{\varepsilon_{b,k}} \right| < [\delta], \quad \delta = \left| \frac{\chi_{k-1} - \chi_k}{\chi_k} \right| < [\delta], \quad [\delta] = 0,03. \quad (4)$$

Предельно допустимая погрешность по этой формуле в три раза ниже, чем по (6), и в 30 раз ниже чем по (3) – вновь без обоснований почему.

Иной подход предложен в работе [5]. Согласно ему, относительная погрешность равна:

$$\delta = \frac{\left| \sum_i E_i A_i \Delta y_i^2 \right|}{\sum_i |E_i A_i \Delta y_i^2|} \leq [\delta] = 4\varepsilon_M, \quad (5)$$

где E_i – модель деформаций i -ой малой полоски сечения; A_i – её площадь; Δy_i – расстояние от центра полоски до центра тяжести всего сечения; $\varepsilon_M = 1,0842 \cdot 10^{-19}$ для арифметики с плавающей точкой, реализованной в процессорах *i486* и старше.

Выражение (5) к точности численного диаграммного метода отношения в общем-то не имеет. По сути оно определяет погрешность, вызванную ограниченностью разрядной сетки вычислительных устройств.

В своих работах [6]-[8] при рассмотрении изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных стержневых элементов в качестве параметра, по которому даём оценку точности диаграммного метода, мы используем кривизну изогнутой оси стержня $\chi = \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}$. Будем дальнейшие рассуждения вести относительно него.

Пусть χ – истинное значение (теоретически установленное опорное значение) отыскиваемого параметра, $\tilde{\chi}$ – его значение, соответствующего

принятой расчётной модели (точнее: дискретной нелинейной деформационной модели), $\tilde{\chi}_h$ – значение, получаемое численным диаграммным методом в предположении отсутствия округлений, $\tilde{\chi}_h^*$ – приближение к решению, получаемое при реальных вычислениях. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \tilde{\chi} - \chi - \text{неустраняемая погрешность,} \\ \Delta_2 &= \tilde{\chi}_h - \tilde{\chi} - \text{погрешность метода,} \\ \Delta_3 &= \tilde{\chi}_h^* - \tilde{\chi}_h - \text{вычислительная погрешность.}\end{aligned}\tag{6}$$

Полная погрешность $\Delta_0 = \tilde{\chi}_h^* - \chi$, равная разности между реально получаемым и точным решениям задачи:

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \leq [\Delta], \text{ при этом } [\Delta_1] + [\Delta_2] + [\Delta_3] = [\Delta], \Delta_1 \leq [\Delta_1], \\ \Delta_2 &\leq [\Delta_2], \Delta_3 \leq [\Delta_3].\end{aligned}\tag{7}$$

Аналогичные формулы можно построить для относительной погрешности:

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq [\delta], \text{ при этом } [\delta_1] + [\delta_2] + [\delta_3] = [\delta], \delta_1 \leq [\delta_1], \delta_2 \leq [\delta_2], \\ \delta_3 &\leq [\delta_3].\end{aligned}\tag{8}$$

Истинное значение отыскиваемого параметра – это теоретическая идеализация опорного значения, установить которую зачастую в силу неразвитости теории не представляется возможным. Поэтому на практике в качестве опорного значения можно использовать принятое значение искомой величины в виде результата хорошо поставленного эксперимента, имеющего, однако, свои погрешности и неопределённости измерений.

Погрешность первого типа раскладывается на две составляющие:

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12}, \delta_1 = \delta_{11} + \delta_{12},\tag{9}$$

где Δ_{11} , δ_{11} – погрешность математической модели; Δ_{12} , δ_{12} – погрешность из-за неточности в исходных данных.

На Δ_{11} , δ_{11} влияют сразу несколько факторов: точность аппроксимации экспериментальных диаграмм бетона и стали, некоторое нарушение гипо-

тезы плоских сечений за границами упругости, не учёт напряжений и деформаций в поперечном направлении и т.д. Оценить влияние этих факторов весьма проблематично. Достаточно одного примера, чтобы это понять. Так, известен такой факт, что при нагрузках, близких к моменту трещинообразования, вид аппроксимации диаграммы деформирования бетона весьма существенно влияет на значения параметров НДС изгибаемого железобетонного элемента (по нашим оценкам до 40% при одних и тех же значениях R_{bt} , ε_{bt2} и E_b [7]). А при нагрузках перед разрушением это влияние снижается практически до нуля. То есть имеет место сложная, нелинейная закономерность.

Погрешность Δ_{12} определяется ГОСТами на измерение соответствующих параметров в исходных данных. Например, согласно ГОСТ 10180-2012 «Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам» погрешность измерения линейных размеров не должна превышать 1%, погрешность определения массы (собственного веса) образцов – не более 0,1%. По ГОСТ 8829-94 «Изделия строительные железобетонные и бетонные заводского изготовления. Методы испытаний нагружением. Правила оценки прочности, жесткости и трещиностойкости» нагружение выполняется с погрешностью не более 5% от величины контрольной нагрузки. В среднем относительная погрешность получается $\delta_{12} = [\delta_{12}] \approx 1 + 0,1 + 5 = 6,1\%$. При этом использовать математическую модель, погрешность которой больше погрешности в исходных данных, теряет всякий смысл. Поэтому мы в праве потребовать от неё, чтобы выполнялось условие $\delta_{11} \leq \delta_{12}$, тогда $\delta_{11} = [\delta_{11}] \leq [\delta_{12}] \approx 6,1\%$. Таким образом, относительная погрешность первого типа приближённо равна $\delta_1 = [\delta_1] = [\delta_{11}] + [\delta_{12}] \approx 12,2\%$. При этом следует отметить, что значения погрешности одной и той же величины, принимаемой в расчётах по первой либо второй группе предельных состояний, должны отличаться. Очевидно, что для второй группы предельно допустимая по-

грешность должна быть больше, чем по первой. Изучению этого вопроса будет посвящена отдельная публикация.

Погрешность Δ_3 , δ_3 можно принять по [5]: $\Delta_3 = 1,0842 \cdot 10^{-19} \tilde{\chi}_h^*$, $\delta_3 = 1,0842 \cdot 10^{-19}$. При этом в сравнении с первым типом эта погрешность $\Delta_3 \approx 0$ ($\delta_3 \approx 0$) и ей можно поэтому пренебречь.

Более подробно займёмся точностью численного диаграммного метода, то есть оценкой для Δ_2 , δ_2 . Эта погрешность имеет два источника:

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22}, \quad \delta_2 = \delta_{21} + \delta_{22}, \quad (10)$$

где Δ_{21} , δ_{21} – погрешность, которая возникает при вычислении параметров НДС сечения, зависящих от численного интегрирования эпюры растягивающих и/или сжимающих напряжений в бетоне (либо функции секущего модуля деформаций); Δ_{22} , δ_{22} – погрешность итерационного вычисления управляющего параметра алгоритма численного диаграммного метода – в нашем случае погрешность итерационного вычисления кривизны $\tilde{\chi}_h$.

Погрешность Δ_{21} , δ_{21} возникает при вычислении жёсткости бетонного сечения, предельных значений продольной силы или изгибающего момента, кривизны на данной итерации и др. При этом стержневое армирование, что в аналитической постановке диаграммного метода, что в численной, учитывается одинаково – дискретно, поэтому влияние на погрешность метода не оказывает. Тогда на примере изгибаемого элемента для бетонной части его прямоугольного сечения можно записать следующие формулы жёсткости и момента, воспринимаемого этим сечением:

$$D_{bx} = b \int_0^h E_b^{\text{sec}} (y_0 - y)^2 dy, \quad M_{bx} = b \int_0^h \sigma_b (y_0 - y) dy - \text{аналитически,} \\ D'_{bx} = \Delta_h b \sum_i E_b^{\text{sec}} (y_0 - y)^2, \quad M'_{bx} = \Delta_h b \sum_i \sigma_b (y_0 - y) - \text{численно,} \quad (11)$$

где D_{bx} , D'_{bx} – жёсткость бетонной части сечения, полученная соответственно аналитическим и численным интегрированием (промежуточный

результат расчёта); M_{bx} , M'_{bx} – момент, воспринимаемый бетоном (один из конечных результатов расчёта); b , h – ширина и высота бетонного прямоугольного сечения; $E_b^{\text{sec}} = E_{b,i}^{\text{sec}}(y)$, $E_{b,i}^{\text{sec}}$ – секущий модуль деформаций бетона в конкретной фибре сечения; $\sigma_b = \sigma_b(y)$, $\sigma_{b,i}$ – напряжения в данной фибре бетона; y – координата этой фибры относительно выбранного центра координат; y_0 – расстояние от начала координат до центра тяжести приведённого сечения; Δ_h – высота полосок, на которые разбивается сечения для выполнения процедуры численного интегрирования.

При этом абсолютная и относительная погрешности численного интегрирования будут равны $\Delta_{21}^D = |D_{bx} - D'_{bx}|$, $\Delta_{21}^M = |M_{bx} - M'_{bx}|$, $\delta_{21}^D = \left| \frac{D_{bx} - D'_{bx}}{D'_{bx}} \right|$, $\delta_{21}^M = \left| \frac{M_{bx} - M'_{bx}}{M'_{bx}} \right|$.

Функции $E_b^{\text{sec}} = E_{b,i}^{\text{sec}}(y)$ и $\sigma_b = \sigma_b(y)$ могут быть аппроксимированы полиномом нулевой, первой и четвёртой степени и соответственно для вычисления (11) используют формулы численного интегрирования прямоугольников (левых, правых и срединных), трапеций и Симпсона. На примере левых прямоугольников:

$$D'_{bx} = \Delta_h b \sum_{i=0}^{n-1} E_{b,i}^{\text{sec}}(y_0 - y_i)^2, \quad M'_{bx} = \Delta_h b \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_{b,i}(y_0 - y_i). \quad (12)$$

Погрешность с учётом [1] равна:

$$\Delta_{21}^D = \max_{y \in [0, h]} \left| \frac{\partial}{\partial y} \left[E_b^{\text{sec}}(y) \times (y_0 - y)^2 \right] \right| \frac{n \Delta_h^2}{2}, \quad \Delta_{21}^M = \max_{y \in [0, h]} \left| \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_b(y) \times (y_0 - y) \right] \right| \frac{n \Delta_h^2}{2}. \quad (13)$$

Для Δ_{21}^M производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_b(y) \times (y_0 - y) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[E_b^{\text{sec}}(y) \times \varepsilon_b(y) \times (y_0 - y) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[E_b^{\text{sec}}(y) \times \varepsilon_b^{\text{max}} \frac{(y_0 - y)}{(y_0 - h)} \times (y_0 - y) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[E_b^{\text{sec}}(y) \times (y_0 - y)^2 \times \frac{\varepsilon_b^{\text{max}}}{(y_0 - h)} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[E_b^{\text{sec}}(y) \times (y_0 - y)^2 \right] \times \frac{\varepsilon_b^{\text{max}}}{(y_0 - h)}. \end{aligned}$$

Тогда $\Delta_{21}^M = \Delta_{21}^D \times \frac{\varepsilon_b^{\max}}{(y_0 - h)}$. Для кривизны $\chi_{bx} = \frac{M'_{bx}}{D'_{bx}}$, заметим, что абсолютная погрешность равна $\Delta_{21}^Z = \frac{\Delta_{21}^M}{\Delta_{21}^D} = \frac{\varepsilon_b^{\max}}{(y_0 - h)}$. Дальнейшие рассуждения будем вести на примере погрешности Δ_{21}^M , так как погрешности всех прочих величин можно выразить через эту. Поэтому запишем $\Delta_{21} = \Delta_{21}^M$.

Максимум производная функции $f(y) = \sigma_b(y) \times (y_0 - y)$ достигает в точке с координатами $y=h$, $\varepsilon_b = \varepsilon_b^{\max}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}[f(y)] &= \frac{\partial}{\partial y}[\sigma_b(y) \times (y_0 - y)] = \frac{\partial}{\partial y}[\sigma_b(y)] \times (y_0 - y)^2 + \\ &+ \sigma_b(y) \times 2y = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_b}[\sigma_b(\varepsilon_b)] \times \frac{\varepsilon_b^{\max}}{(y_0 - h)} \times (y_0 - y)^2 + \sigma_b(y) \times 2y, \\ \frac{\partial}{\partial y}[f(h)] &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_b}[\sigma_b(\varepsilon_b^{\max})] \times \frac{\varepsilon_b^{\max}}{(y_0 - h)} \times (y_0 - h)^2 + \sigma_b(h) \times 2h = E_b^{\text{sec}}(\varepsilon_b^{\max}) \times \varepsilon_b^{\max} \times (y_0 - h) + \\ &+ \sigma_b(h) \times 2h = \sigma_b(h) \times (y_0 - h) + \sigma_b(h) \times 2h = \sigma_b(h) \times (y_0 + h) = \sigma_{b,n} \times (y_0 + h). \end{aligned}$$

Таким образом, погрешность равна:

$$\Delta_{21} = \left| \sigma_{b,n} \times (y_0 + h) \times \frac{n\Delta_h^2}{2} \right|, \quad \delta_{21} = \frac{\Delta_{21}}{M'_{bx}} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_h b \sum_i \sigma_{b,i}(y_0 - y_i)}. \quad (14)$$

Видно, что значение первой составляющей погрешности численного диаграммного метода и соответственно погрешности метода в целом зависит от параметров, которые можно разделить на две группы:

1 – параметры, которые задаются до начала расчёта: габариты сечения – b , h , количество разбиений сечения на элементарные площадки (полоски) – n ;
 2 – параметры, которые заранее неизвестны и определяются только в конце расчёта (итерации): напряжения в крайней фибре бетона – $\sigma_{b,n}$, результирующее усилие, воспринимаемого бетонным сечением – M'_{bx} , положение нейтральной оси – y_0 .

Присутствие в формулах (17) параметров 2-й группы не даёт возможности заранее предугадать значение погрешности Δ_{21} (δ_{21}) и распространить её зависимость от количества разбиений – $\Delta_{21} = f(n)$, $\delta_{21} = \varphi(n)$ – на все расчётные случаи железобетонного сечения, то есть для каждого случая будет своя функция, зависящая сразу от нескольких аргументов: $\Delta_{21} = F(n, b, h, A_s, A'_s, M, R_b, R_s, y_0, \dots)$, $\delta_{21} = \Phi(n, b, h, A_s, A'_s, M, R_b, R_s, y_0, \dots)$. Получение этих зависимостей может представлять определённый научный интерес, но для практики их ценность, если и не равна нулю, то, по крайней мере, неоднозначна.

Теперь дадим оценку для погрешностей Δ_{22} , δ_{22} итерационного вычисления кривизны $\tilde{\chi}_h$. Далее для краткости индекс и верхнюю тильду опустим и будем писать χ .

В самом общем виде для стержневых элементов, в которых помимо прочих деформаций происходит изгиб, постановка задачи для решения её диаграммным методом состоит в том, чтобы решить уравнение вида:

$$\chi = g(\chi), \quad (15)$$

с корнем t в интервале $[a; b]$. При этом в качестве границ интервала, как показывает опыт расчётов, можно принять $a = -0,1$, $b = 0,1$ практически для любых железобетонных элементов. Функция g предполагается непрерывной на этом интервале.

Попутно отметим, что при центральном растяжении либо сжатии $\chi = 0$. Поэтому в качестве управляющего параметра алгоритма нужно принять другую величину. Под эту роль лучше всего подходит осевая жёсткость сечения $B_1 = \nu_b E_b A_b + \nu_s E_s A_s$.

Решим уравнение (15) численным методом простой итерации. Так, если известен какой-либо член последовательности χ_k , например, $\chi_0 \in [a; b]$, то χ_{k+1} можно взять $g(\chi_k)$. Здесь $k = 0, 1, 2, \dots, n$ – соответственно номер текущей

итерации и общее количество итераций. Тогда рекуррентная формула метода имеет вид:

$$\chi_{k+1} = g(\chi_k). \quad (16)$$

Если существует конечный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k = z$ и функция g непрерывна в точке z , переходом к пределу в равенстве (16) получим $z = g(z)$, то есть число z является корнем уравнения (15). Если $z \in [a; b]$, то в силу единственности корня на отрезке $[a; b]$ z совпадает с t .

Вычисления по формуле (16) проиллюстрированы на рис. 1.

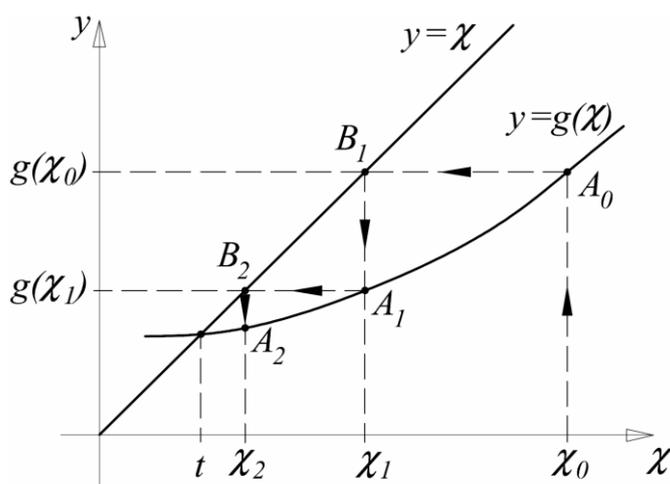


Рис. 1. К численному методу простой итерации для отыскания корня

Построим графики функций из левой и правой частей уравнения (15), то есть линии $y=\chi$ и $y=g(\chi)$. Они должны пересекаться в точке с абсциссой t . Взяв некоторое число χ_0 , вычислим $g(\chi_0)$ и получим на кривой $y=g(\chi)$ точку A_0 . Линия проекции этой точки на ось Oy пересечёт прямую $y=\chi$ в точке B_1 . Проекция B_1 на ось Ox даёт χ_1 . Из равенства треугольников $\triangle OB_1\chi_1$ и $\triangle OB_1g(\chi_0)$ геометрически $\chi_1=g(\chi_0)$. Проекция χ_1 на кривую $y=g(\chi)$ даёт точку A_1 . Линия проекции этой точки на ось Oy пересечёт прямую $y=\chi$ в точке B_2 . Проекция B_2 на ось Ox даёт χ_2 . Из равенства треугольников $\triangle OB_2\chi_2$ и $\triangle OB_2g(\chi_1)$ геометрически $\chi_2=g(\chi_1)$. И т.д. Через какое-то количество итераций n величина $\chi_j = \chi_n$ настолько близко подойдёт к t , что её можно буде

считать ответом. Это количество шагов будет определять точность приближения $\Delta_2 > 0$.

Таким образом, полная погрешность диаграммного метода равна:

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} = \left| \sigma_{b,n} \times (y_0 + h) \times \frac{n\Delta_h^2}{2} \right| + |\chi_k - \chi_{k-1}| \leq [\Delta_2],$$

$$\delta_2 = \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{\left| \sigma_{b,n} \times (y_0 + h) \times \frac{n\Delta_h^2}{2} \right|}{\Delta_h b \sum_i \sigma_{b,i} (y_0 - y_i)} + \left| \frac{\chi_{k-1} - \chi_k}{\chi_k} \right| \leq [\delta_2]. \quad (17)$$

Особый практический интерес в данной работе представляет определение предельно допустимых значений погрешностей $[\Delta_2]$, $[\delta_2]$. В теории железобетона он в принципе не рассматривается, а в метрологии, как показывает анализ литературы [9], он остаётся всё ещё до конца не решённым. Утверждается, что «в рамках метрологии обосновать выбор значения допустимой погрешности невозможно» Тем не менее изложим свои соображения на этот счёт.

Сразу проясним, что погрешность расчёта физических величин, которые используются в алгоритме диаграммного метода и характеризуют НДС железобетонной конструкции, не должна превышать предельно допустимой погрешности измерения этих физических величин с помощью соответствующих приборов и оборудования.

При этом непосредственно кривизну, жёсткость, момент и т.п. параметры не измеряют. Это всё расчётные величины. В экспериментах с железобетонными конструкциями при действии на них статической нагрузки измерению подлежат по сути только лишь три типа параметров:

1 – нагрузки (иногда ещё и реакция опор) – с помощью механических или электрических приборов: манометрами, динамометрами, датчиками давления и т.п.;

2 – геометрия – с помощью рулеток, линеек, штангенциркулей и т.п.;

3 – изменения геометрии по мере нагружения, то есть перемещения и деформации – с помощью прогибомеров, тензометров и т.п.

Очевидно, что для определения $[\Delta_2]$, $[\delta_2]$ можно воспользоваться допусками из соответствующих ГОСТов – по аналогии с погрешностями исходных данных. Так, ГОСТ 8829-2018 «Изделия строительные железобетонные и бетонные заводского изготовления. Методы испытаний нагружением. Правила оценки прочности, жесткости и трещиностойкости (с Поправкой)» предельно допустимая относительная погрешность при определении нагрузки составляет 2 %. При этом ГОСТ 10180-2012 регламентирует погрешность при определении нагрузки от собственного веса ограничивать 0,1 %. Принимаем наибольшее значение $[\delta_2^N] = 2 \%$. Согласно тому же ГОСТу 10180-2012 предельно допустимая относительная погрешность измерения линейных размеров равна $[\delta_2^L] = 1 \%$. По упомянутому выше ГОСТу 8829-2018 предельно допустимая относительная погрешность измерения деформаций и перемещений равна $[\delta_2^\varepsilon] = 3 \%$.

Запишем зависимость кривизны χ от параметров каждого из трёх типов. Так, известно такое выражение:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{b,n} + \varepsilon_s}{h_0}, \quad (18)$$

где величина относительных деформаций в бетоне и арматуре зависит от уровня нагрузки: $\varepsilon_{b,n} = f_1(N)$, $\varepsilon_s = f_2(N)$.

С другой стороны, известно также такое выражение:

$$\chi = \frac{M_x}{D_x}. \quad (19)$$

Тогда $\frac{\varepsilon_{b,n} + \varepsilon_s}{h_0} = \frac{M_x}{D_x}$, откуда следует $\varepsilon_{b,n} + \varepsilon_s = \frac{M_x}{D_x} h_0$ или $f_1(N)$,

$$f_2(N) \sim \frac{M_x}{D_x} h_0.$$

Тогда по правилу сложения погрешностей будем иметь:

$$[\delta_2] = \min(2[\delta_2^e] + [\delta_2^L]; [\delta_2^N] + 3[\delta_2^L]). \quad (20)$$

Подставляя численные значения погрешностей в формулу (34), получим: $[\delta_2] = \min(2 \cdot 0,03 + 0,01; 0,02 + 3 \cdot 0,01) \cdot 100\% = \min(7\%; 5\%) = 5\%$. Таким образом: $[\delta_2] = 5\%$.

Предельно допустимое значение полной погрешности $[\Delta_0]$, $[\delta_0]$ должно быть ниже погрешность эксперимента $[\Delta_{\text{exp}}]$, $[\delta_{\text{exp}}]$, которая уже определяется изменчивостью получаемых результатов (соответственно среднеквадратическим отклонением от среднего и коэффициентом вариации). Из своего опыта и из доступной литературы $[\delta_{\text{exp}}] \approx 10 \dots 20\%$. Тогда с учётом $\delta_3 \approx 0$ можно дать приближённую оценку предельной погрешности математической модели

$$[\delta_{11}] \approx [\delta_{\text{exp}}] - [\delta_{12}] - [\delta_2] = 15 - 6,1 - 5 = 3,9\%. \quad (21)$$

Согласно этой формуле к адекватности в целом и погрешности в частности расчётной модели предъявляются достаточно жёсткие требования, которые можно тем не менее ослабить за счёт повышения точности численного метода. Так, если принять $[\delta_2] = 1\%$, тогда $[\delta_{11}] = 7,9\%$.

Таким образом, точность численного диаграммного метода не может быть принята произвольно. Максимальное значение допустимой погрешности $[\delta_2]$, которое характеризует точность, не должно превышать 5% и может быть скорректировано в сторону уменьшения (повышения точности) за счёт уточнения погрешностей расчётной модели и эксперимента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Байков В.Н., Додонов М.И., Расторгуев Б.С. [и др.] Общий случай расчета прочности элементов по нормальным сечениям // Бетон и железобетон, 1987, № 5. – С. 16–18.
2. Евдокимова Т.С. Напряженно-деформированное состояние и расчет прочности кососжимаемых фиброжелезобетонных элементов. Дисс. канд. техн. наук, спец 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения». – СПб, 2017. – 150 с.

3. Кодыш Э.Н. Никитин И.К. Трекин Н.Н. Расчёт железобетонных конструкций из тяжёлого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. Монография. – М.: Изд-во АСВ, 2011. – 352 с.

4. Дыховичный А.А. Статически неопределимые железобетонные конструкции. – Киев: Будівельник, 1978. – 108 с.

5. Лазовский Д.Н., Глухов Д.О., Лешкевич О.Н. Особенности расчета статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом геометрической и физической нелинейности методом конечных элементов // Вестник полоцкого государственного университета. Серия В: Прикладные науки, 2004, № 1. – С. 66-73.

6. Соколов Б.С. Радайкин О.В. К построению единой методики расчёта прочности, жёсткости и трещиностойкости изгибаемых железобетонных элементов с учётом совместного действия изгибающих моментов и перерезывающих сил с применением нелинейной деформационной модели // Фундаментальные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли РФ в 2014 г.: сб. науч. тр. РААСН – Круск: Изд-во Деловая полиграфия, 2015. – С. 589-596.

7. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Проектирование бетонных, железобетонных, каменных и армокаменных элементов и конструкций с применением диаграммных методов расчёта: монография. М.: Изд-во АСВ, 2019. – 194 с.

8. Радайкин О.В. Прочность железобетонных элементов прямоугольного профиля при косом внецентренном сжатии с применением нелинейной деформационной модели // Строительство и реконструкция, 2020, № 1. – С. 31-39.

9. Гвоздев. В.Д. Допустимая погрешность измерений: выбор значения // Законодательная и прикладная метрология, 2013, №1. – С. 44-48.

RADAYKIN Oleg Valerjevich¹, candidate of technical sciences, engineer of the department of Energy companies and energy-saving technologies; SABITOV Linar Salihzjanovich¹, candidate of technical sciences, docent, associate professor of the Department of energy companies and energy-saving technologies; AHTJAMOVA Leysan Shamilevna², postgraduate student of the department of Strength of materials; ARAKCHEEV Timur Pavlovich¹, postgraduate student of the department of Energy companies and energy-saving technologies; DARVISH Anas¹, postgraduate student of the department of Energy companies and energy-saving technologies

ACCURACY OF THE NUMERICAL DIAGRAM METHOD FOR CALCULATING BAR REINFORCED CONCRETE ELEMENTS

¹Kazan State Power Engineering University. 51, Krasnoselskaya str., Kazan, 420066, Russia. Tel.: 8 (843) 519-42-06, office D-210; e-mail: olegxxii@mail.ru

²Don State Technical University, 1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344003, Russia. Tel.: 8 (863) 201-91-36; e-mail: sabitov-kgasu@mail.ru

Key words: reinforced concrete, nonlinear deformation model, diagram method, deformation diagrams, numerical method, error.

The sources available for analysis do not explain why they have adopted such an accuracy of the numerical diagram method for calculating rod iron-tone elements (the calculated and maximum permissible error values), but such a parameter for its evaluation is named. A definitive approach to assessing the accuracy of the method under consideration does not yet exist. What is present in the literature does not have a strict theoretical basis. This article is intended to try to correct this situation. For this purpose, the mathematical theory of numeri-

cal methods, metrology and the theory of reinforced concrete are involved. The classification of errors that occur when determining the true value of the control parameter that integrally characterizes the stress-strain state of an element is developed. The curvature is taken as such a parameter. It is concluded that the maximum value of the permissible error of the method, which characterizes the accuracy, should not exceed 5% and can be adjusted in the direction of decreasing (increasing accuracy) by clarifying the errors of the calculation model and the experiment.

REFERENCES

1. Baykov V.N., Dodonov M.I., Rastorguev B.S. [et al.] General case of calculating the strength of elements by normal sections // Concrete and reinforced concrete, 1987, No. 5. – Pp. 16-18.
2. Evdokimova T.S. Stress-strain state and strength calculation of obliquely compressible fibro-reinforced concrete elements. Diss. Candidate of technical Sciences, spec 05.23.01 – "Building structures, buildings and structures". - St. Petersburg, 2017. – 150 p.
3. Kodysh E.N. Nikitin I.K. Trekin N.N. Calculation of reinforced concrete structures made of heavy concrete by strength, crack resistance and deformations. Monograph. – M.: Publishing House of the ASV, 2011 – 352 p.
4. Dykhovichny A.A. Statically indeterminate reinforced concrete structures. – Kiev: Budivel'nik, 1978. – 108 p.
5. Lazovsky D.N., Glukhov D.O., Leshkevich O.N. Features of calculation of statically indeterminate reinforced concrete structures taking into account geometric and physical non-linearity by the finite element method // Vestnik of Polotsk State University. Series B: Applied Sciences, 2004, No. 1. – Pp. 66-73.
6. Sokolov B.S., Radaykin O.V. To build a common method of measuring firmly-STI, stiffness and fracture toughness bendable concrete elements taking into account the joint action of bending moments and shear forces with the use of nonlinear deformation model // Fundamental research of architecture on the scientific development of architecture, urban planning and from the construction industry of the Russian Federation in 2014 – Kursk: Publishing house Business printing, 2015. – Pp. 589-596.
7. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaykin O.V. Design of concrete, reinforced concrete, stone and reinforced stone elements and structures with the use of diag-gram calculation methods: monograph. – Moscow: Publishing House of the ASV, 2019. – 194 p.
8. Radaykin O.V. Strength of reinforced concrete elements of a rectangular profile under oblique off-center compression using a nonlinear deformation model // Construction and Reconstruction, 2020, No. 1. – Pp. 31-39.
9. Gvozdev. V.D. Permissible measurement error: choice of value // Zakonodatel'naya i prikladnaya metrologiya, 2013, No. 1. – Pp. 44-48.

**© О. В. Радайкин, Л. С. Сабитов, Л. Ш. Ахтямова, Т.П. Аракчеев,
А. Дарвиш, 2021**