

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»

Институт строительства и архитектуры

На правах рукописи



Бударин Александр Михайлович

**РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И
РАЗРУШЕНИЯ БЕТОНА С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ И ЕЕ
ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОПРОТИВЛЕМОСТИ ПЛОСКИХ ПЛИТ
ПЕРЕКРЫТИЙ ПРОДАВЛИВАНИЮ**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук, доцент,
советник РААСН,
Алехин Владимир Николаевич

Екатеринбург – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	12
1.1. Продавливание железобетонных плитных конструкций	12
1.2. Теоретические и экспериментальные исследования механизма разрушения плит от продавливания	15
1.2.1. Продольное армирование растянутой зоны плиты	15
1.2.2. Продольное армирование сжатой зоны плиты	17
1.2.3. Пролет среза плиты	18
1.2.4. Относительный размер и форма опоры	19
1.2.5. Тип поперечного армирования	20
1.2.6. Масштабный эффект	22
1.2.7. Сжимающее усилие со стороны вышележащей опоры	24
1.3. Методики вычисления несущей способности плит на продавливание, представленные в нормативных документах	25
1.4. Обзор моделей нелинейного деформирования бетона	39
1.4.1. Требования к модели бетона	39
1.4.2. Модель Г. А. Гениева	45
1.4.3. Ортотропная модель В. И. Корсунова	47
1.4.4. Модель бетона по нормативным документам	49
1.4.5. Модель Concrete	52
1.4.6. Menetrey-Willam	54
1.4.7. Concrete Damage–Plasticity Model 2 (CDPM2)	57
1.5. Выводы по главе	58
2. ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ БЕТОНА	60
2.1. Основные положения теории пластического течения и описание механизма накопления повреждений	60
2.2. Предельная поверхность модели	65
2.3. Поверхность пластического потенциала	68
2.4. Эволюция предельной поверхности	71
2.5. Механизм накопления повреждений	75
2.6. Алгоритм работы модели	78
2.7. Выводы по главе	81
ГЛАВА 3. ВАЛИДАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ БЕТОНА	83
3.1. Опыты с бетонными образцами	83
3.1.1. Опыты H. Kupfer	83
3.1.2. Опыты I. Imran	84
3.1.3. Опыты F. C. Caner	84
3.1.4. Балка с надрезом из испытаний H. A. Kormeling	85

3.1.5. Образцы, подверженные циклическому нагружению	87
3.2.Опыты с железобетонными конструкциями	88
3.2.1. Разрушение железобетонных балок по наклонному сечению	88
3.2.2. Продавливание железобетонных плит	92
3.3.Выводы по главе.....	95
ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМА РАЗРУШЕНИЯ ПЛИТ ОТ ПРОДАВЛИВАНИЯ.....	97
4.1.Исследование влияния рабочей высоты	98
4.2.Исследование влияния пролета среза	104
4.3.Исследование влияния относительного размера опоры	112
4.4.Исследование влияния процента продольного армирования растянутой зоны плиты	119
4.5.Сравнение результатов численного моделирования с методиками оценки несущей способности на продавливание, представленными в нормативных документах	129
4.6.Выводы по главе.....	133
ГЛАВА 5. ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ПЛИТ НА ПРОДАВЛИВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА.....	136
5.1.Общий вид и требования к методике расчета плит на продавливание	136
5.2.Использование регрессионного анализа для построения методики расчета на продавливание	137
5.3.Сравнение расчетной методики с результатами лабораторных и численных испытаний	140
5.4.Выводы по главе.....	144
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	146
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	151
Приложение А. Внедрение результатов	166
Приложение Б. Формула для вычисления матрицы Якоби	170

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В современном строительстве широкое распространение получили железобетонные каркасы с бескаркасными безбалочными плитами перекрытия. Их использование позволяет снизить трудоемкость опалубочных работ, уменьшить материалоемкость, увеличить полезную высоту помещений и открывает широкие возможности для архитектурной выразительности. Особенностью данного конструктивного решения является наличие значительной концентрации усилий на относительно небольшой площади опоры, что может привести к разрушению плиты от продавливания. Опасность этого типа разрушения заключается в его хрупком, внезапном характере: формирование поверхностей разрушения, являющихся боковыми гранями так называемой пирамиды продавливания, может происходить без проявления внешних признаков на поверхности плиты в виде трещин до достижения разрушающей нагрузки. Эти обстоятельства подтверждают важность и актуальность изучения механизма разрушения плитных железобетонных конструкций от продавливания.

Согласно результатам отечественных и зарубежных исследований, к основным факторам, оказывающим влияние на несущую способность плитной конструкции при продавливании, относятся: масштабный эффект; пролет среза плиты r_λ (расстояние от грани опоры до точки приложения нагрузки, деленное на рабочую высоту h_0); относительный периметр опоры плиты u_0/h_0 ; процент продольного армирования растянутой зоны плиты μ ; тип и интенсивность поперечного армирования плиты и др. Отсутствие учета или некорректный учет перечисленных факторов негативно влияет на точность методик расчета железобетонных плитных конструкций на продавливание. Одной из основных проблем является то, что большая часть лабораторных испытаний, на основе результатов которых строятся расчетные методики, была выполнена для плит с относительно малой рабочей высотой (240 мм и менее), в то время как в строительных объектах встречаются плиты значительно большего размера. Плиты с рабочей высотой 480 мм и более составляют менее 4 % от общего числа

испытанных в лабораториях образцов и имеют малую величину пролета среза ($r_\lambda = 1,5 \dots 2,5$). Отсутствие достаточного количества испытаний для плит с большой рабочей высотой не позволяет достоверно судить о возможности применения той или иной расчетной методики для оценки несущей способности подобных конструкций.

В качестве дополнения к лабораторным испытаниям для исследования влияния различных факторов на несущую способность плиты при продавливании может быть применено численное моделирование в рамках метода конечных элементов (МКЭ) с использованием нелинейных моделей материала. Однако существующие модели бетона в так называемых «тяжелых» конечно-элементных комплексах, ориентированных на универсальное применение, обладают рядом недостатков:

- Значительное отклонение формы предельной поверхности модели от результатов экспериментальных данных.
- Наличие нескольких зон сингулярности в предельной поверхности, ведущее к ухудшению сходимости численного решения.
- Отсутствие алгоритмов, позволяющих корректно отразить основные особенности напряженно-деформированного состояния бетона (НДС), включающие эффекты контракции, дилатации, масштабный эффект, а также зависимость деформаций, соответствующих пределу прочности от вида напряженного состояния.
- Использование в рамках конечно-элементного решения модели материала, учитывающей стадию разупрочнения, неизбежно ведет к возникновению проблемы локализации необратимых деформаций. Суть проблемы заключается в наличии существенной зависимости результатов от размера конечно-элементной сетки, а также ухудшении сходимости задачи при уменьшении размера конечного элемента. В большей части современных моделей бетона отсутствует алгоритм, позволяющий решить данную проблему.
- Для построения предельной поверхности, поверхности пластиического потенциала и использования механизмов упрочнения и разупрочнения в модели

используется ряд параметров. При этом зачастую отсутствуют указания или алгоритмы для определения данных параметров, что усложняет использование модели.

Таким образом, актуальной является задача разработки модели бетона, позволяющей с достаточной точностью описывать поведение материала при различных видах НДС, обладающей механизмом для решения проблемы локализации деформаций, а также алгоритмом подбора параметров модели. Также актуальна задача разработки методики расчета плит на продавливание, учитывающей основные факторы, влияющие на несущую способность конструкции в рамках данного типа разрушения.

Степень разработанности темы исследования. Практически за вековую историю изучения механизма разрушения плит от продавливания данным вопросом занималось множество отечественных и зарубежных инженеров: А. Н. Болгов, З. Ш. Галяутдинов, А. А. Гвоздев, К. Е. Ермуханов, А. С. Залесов, О. В. Кабанцев, Н. И. Карпенко, С. Ф. Клованич, Н. Н. Коровин, С. Б. Крылов, А. С. Силантьев, А. З. Сокуров, А. Г. Тамразян, В. И. Травуш, Н. Н. Трекин, В. Б. Филатов, И. В. Шеховцов, Z. Bažant, W. H. Dilger, R. C. Eistner, A. Ghali, O. Graf, N. M. Hawkins, E. Hognestad, J. S. Lovorovich, D. I. McLean, P. Menetrey, J. Moe, A. Muttoni, F. E. Richart, M. Staller и др.

Разработкой нелинейных моделей бетона занимались: Г. А. Гениев, Н. И. Карпенко, С. Н. Карпенко, С. Ф. Клованич, В. И. Корсун, А. П. Кричевский, В. М. Круглов, Е. С. Лейтес, Л. Ю. Соловьев, А. В. Яшин, Z. Bažant, O. Buuyukorturk, V. Červenka, J. Červenka, A. C. Y. Chen, W. F. Chen, D. J. Han, H. Kupfer, N. Ottosen, W. C. Schonobrich, M. Suidan, K. Willam и др. Модели бетона, использующие в основе комбинацию теории пластичности и механики разрушения, представлены в работах G. Etse, L. G. Fenves, P. Grassl, M. Jirásek, M. Kaliske, J. Lee, P. Menetrey, I. Zreid и др.

Объект исследования: узлы сопряжения вертикальных железобетонных конструкций и плоских железобетонных плит.

Предмет исследования: влияние различных конструктивных и механических параметров на механизм разрушения плоских железобетонных плит от продавливания.

Научная гипотеза заключается в том, что разработка модели бетона для расчета железобетонных плит на продавливание может быть выполнена с применением комбинации теории пластического течения и механики разрушения. Прикладная методика данного расчета может быть разработана на основании результатов регрессионного анализа, выполненного методом наименьших квадратов.

Целью исследования является инженерная методика расчета плит на продавливание и разработка модели пластичного деформирования и разрушения бетона с учетом повреждаемости.

Задачи исследования:

1. Разработать нелинейную модель бетона, отражающую основные особенности напряженно-деформированного состояния материала в рамках кратковременного статического нагружения: эффекты контракции и дилатации; зависимость деформаций, соответствующих пределу прочности бетона, от вида напряженного состояния; учет масштабного эффекта.

2. Реализовать модель в программном комплексе «ANSYS» в качестве пользовательской модели материала. Выполнить процедуру валидации модели путем сравнения результатов лабораторных и численных испытаний образцов и конструкций при различных видах НДС.

3. Выполнить численные исследования с использованием разработанной модели бетона с целью изучения влияния различных конструктивных параметров на механизм разрушения плоских железобетонных плит от продавливания.

4. Разработать методику расчета плит на продавливание, отражающую влияние основных конструктивных и механических параметров и обладающую хорошим соответствием результатам лабораторных и численных испытаний.

Научная новизна результатов заключается в следующем:

1. Разработана новая нелинейная модель бетона на базе теории пластического течения (основные положения которой описаны в работах D. C. Drucker и W. Prager) и механики разрушения (подход основывается на работах Ю. Н. Работнова и P. Grassl). Для учета эффектов контракции и дилатации в модели используется двойное независимое упрочнение предельной поверхности. Механизм упрочнения зависит от нормы тензора пластических деформаций и вида напряженного состояния. Для описания процесса разупрочнения в модели используются два независимых параметра поврежденности: параметры сжатия и растяжения. Использование независимых параметров позволяет учитывать изменение жесткости бетона при циклическом и знакопеременном нагружении. Для решения проблемы локализации необратимых деформаций, а также учета масштабного эффекта, используется энергетический подход. На основании результатов валидации можно заключить, что представленная модель позволяет с хорошей точностью моделировать поведение бетонных и железобетонных конструкций при различных видах НДС.

2. Выполнены численные испытания 107 образцов на продавливание с конструктивными параметрами, характерными для реальных строительных объектов, но отсутствующими в базе лабораторных и численных испытаний. Численные испытания были разделены на 4 серии. В первой серии испытаний изучено влияние масштабного эффекта, во второй – влияние пролета среза плиты, в третьей – относительного размера опоры, в четвертой – процента продольного армирования растянутой зоны плиты. Для каждой серии были получены данные о зависимости несущей способности конструкции от исследуемого конструктивного параметра.

3. С помощью регрессионного анализа методом наименьших квадратов, на основании результатов лабораторных испытаний 590 плит, представленных в исследованиях различных авторов, разработана новая прикладная методика расчета плит на продавливание. На основании результатов численных испытаний выполнена валидация данной методики. Разработанная методика расчета плит на

продавливание отражает влияние основных механических и конструктивных параметров и имеет более высокую степень соответствия результатам лабораторных испытаний по сравнению с расчетными методиками, представленными в СП 63.13330.2018, Eurocode 2, ACI 318-25, Model Code 2020.

Теоретическая значимость работы состоит в развитии методики расчета плоских железобетонных плит на продавливание. В работе получены данные о несущей способности и деформациях железобетонных плит различной конфигурации.

Практическая значимость работы:

1. Данна оценка точности нормативных методик расчета плит на продавливание на основании сравнения с результатами опытных данных.

2. Разработанная модель бетона позволяет выполнять численное моделирование бетонных и железобетонных конструкций в рамках статического кратковременного нагружения и может быть использована для решения широкого спектра задач.

3. Разработанная инженерная методика расчета плит на продавливание может быть использована для проверки несущей способности на продавливание плитных конструкций с различными механическими и конструктивными параметрами.

Методология и методы исследования.

При выполнении работы использованы теоретические методы исследования, основанные на теории пластического течения и механике разрушения.

Методологическое основание исследования составили: анализ теоретических и практических материалов по теме исследования с применением методов системного анализа и общенаучных методов исследования, методы идеализации и моделирования, эксперимент.

Достоверность и обоснованность достигается за счет:

1. Использования апробированных математических и статистических методов анализа результатов.

2. Согласованности результатов численных исследований и экспериментальных данных.

3. Использования программного комплекса «ANSYS», верифицированного в системе РААСН для проведения численных исследований.

Личный вклад автора.

1. Разработка и реализация нелинейной модели бетона;
2. Выполнение четырех серий численных испытаний, посвященных изучению влияния различных параметров на механизм разрушения плоских железобетонных плит при продавливании;
3. Разработка методики расчета плит на продавливание с помощью регрессионного анализа методом наименьших квадратов с использованием алгоритма Левенберга-Марквардта (Levenberg-Marquardt Algorithm).

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационного исследования были доложены и получили одобрение на следующих конференциях: International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (Владивосток, 2018); 7th International Symposium «Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering» (Новосибирск, 2018); International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (Челябинск, 2019); 10th International Scientific Conference on Building Defects (Ceske Budejovice, Чехия, 2018); 4th International Scientific and Practical Conference on New Information Technologies in the Architecture and Construction (Екатеринбург, 2021); VII International Conference «Safety Problems of Civil Engineering Critical Infrastructures» (Екатеринбург, 2021), III Международный научно-практический симпозиум «Будущее строительной отрасли: Вызовы и перспективы развития» (Москва, 2025).

Публикации. Основные результаты исследований опубликованы в 8 работах, 6 из которых входят в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, 2 работы опубликованы в сборниках трудов конференций, индексируемых в международных реферативных базах Scopus и Web of Science

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы (186 наименований). Общий объем диссертации составляет 165 страниц, включая 21 таблицу и 112 рисунков.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Содержание диссертации соответствует следующим пунктам паспорта специальности 2.1.9. Строительная механика:

п. 2. Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета.

п. 3. Аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость, при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях.

п. 4. Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В. Н. Алехину, канд. техн. наук, заведующему кафедрой «Системы автоматизированного проектирования объектов строительства» института строительства и архитектуры ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», доценту, советнику РААСН, В. В. Ходыкину, канд. техн. наук, научному руководителю ООО НПФ «СКАД СОФТ», главному государственному эксперту ГАУ НО «Управление госэкспертизы», Г. И. Ремпелю, главному эксперту АО «Институт Гидропроект», А. П. Долгих, начальнику отдела расчетных обоснований АО «Институт Гидропроект», А. А. Камзолкину, ведущему инженеру АО НИЦ «СтадиО».

1. ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Продавливание железобетонных плитных конструкций

В узлах сопряжения железобетонных плит и вертикальных конструкций (колонны, пилоны, стены), где значительная сила сконцентрирована на относительно небольшой площади опоры, возможно разрушение плиты от продавливания. Для данного типа разрушения характерно образование и выделение из тела плиты пространственной поверхности разрушения, называемой пирамидой продавливания. Данная поверхность разрушения формируется сетью радиальных и тангенциальных трещин, разделяющих тело плиты (см. рисунок 1.1):

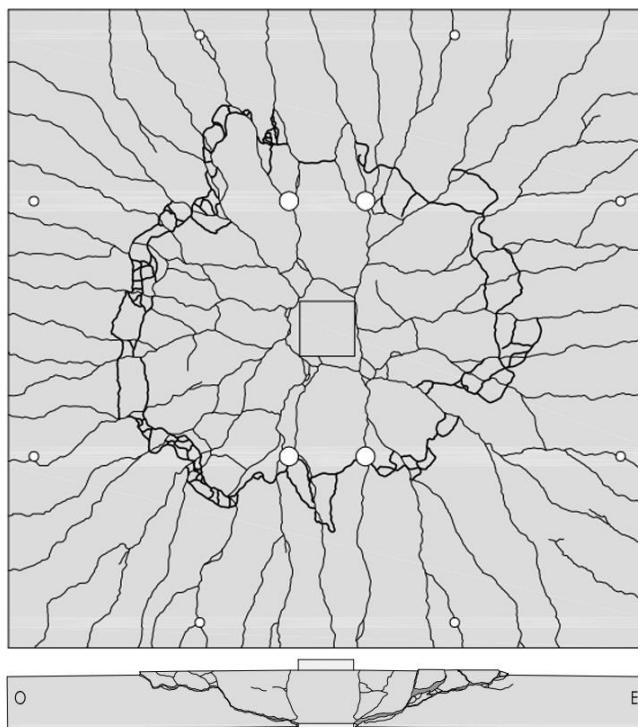


Рисунок 1.1 – Картина трещинообразования после разрушения плиты от продавливания (источник – [103])

В зависимости от конфигурации плиты, ее армирования, а также геометрии опоры, возможно несколько характерных механизмов разрушения плиты от продавливания. Для плит без поперечной арматуры выделяют следующие механизмы [166]:

- а) В плитах с низкой изгибной жесткостью разрушение происходит по следующему сценарию: в результате изгиба в плите формируется сеть трещин, искривляющихся под действием касательных напряжений [82, 164]. В одной из

трещин происходит локализация необратимых деформаций. Параллельно, в сжатой зоне плиты, испытывающей преимущественно сдвиговые деформации, происходит накопление микротрещин. При дальнейшем росте нагрузки, в результате объединения трещин растянутой зоны и сжатой зоны плиты происходит формирование и выделение из тела плиты пирамиды продавливания (см. рисунок 1.2, а).

б) Для плит с высокой изгибной жесткостью характерно хрупкое разрушение от продавливания. В рамках данного механизма происходит формирование нестабильной трещины раскалывания вблизи опоры (см. рисунок 1.2, б). Трещина распространяется в направлении арматуры растянутой зоны под углом примерно 30-40 градусов к горизонтали (при малой величине пролета среза угол может изменяться). При этом формирование трещины раскалывания может сопровождаться накоплением микротрещин в сжатой зоне плиты. Основной опасностью данного механизма разрушения является его хрупкий и внезапный характер, зачастую без проявления внешних признаков в виде трещин изгиба на поверхности плиты.

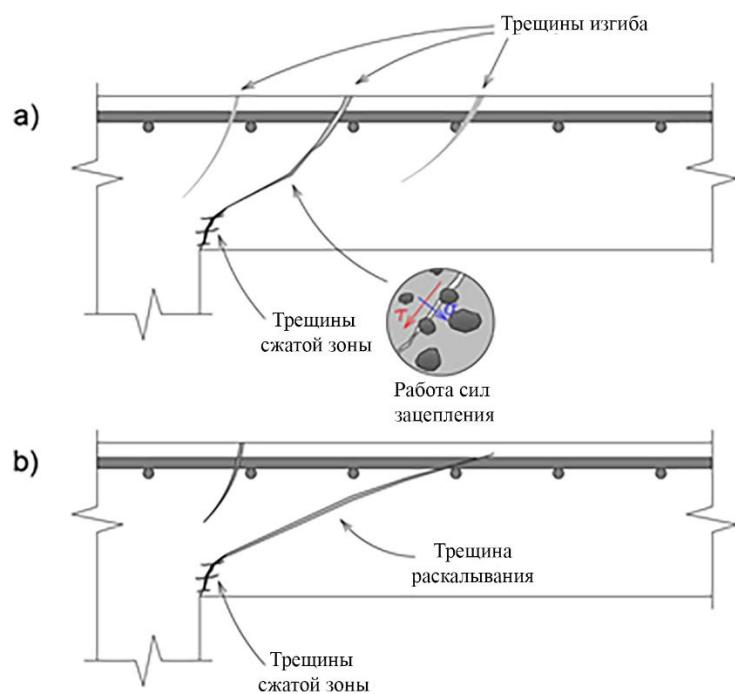


Рисунок 1.2 – Механизмы разрушения плиты от продавливания без поперечной арматуры: а) механизм разрушения плит с малой изгибной жесткостью б) механизм разрушения плит с высокой изгибной жесткостью

Переход между описанными выше механизмами осуществляется при изменении конструктивных параметров узла сопряжения плиты и вертикальной конструкции.

Установка поперечной арматуры существенно повышает несущую способность и предельные деформации плиты. Для плит с поперечной арматурой выделяют следующие механизмы разрушения, связанные с продавливанием:

- c) Продавливание внутри контура установки поперечной арматуры (см. рисунок 1.3, c).
- d) Продавливание за контуром установки поперечной арматуры (см. рисунок 1.3, d). Происходит в результате недостаточно широкой зоны размещения поперечной арматуры.
- e) Разрушение бетона сжатой зоны рядом с гранью опоры (см. рисунок 1.3, e). Характерно для плит с высокими процентами поперечного армирования.

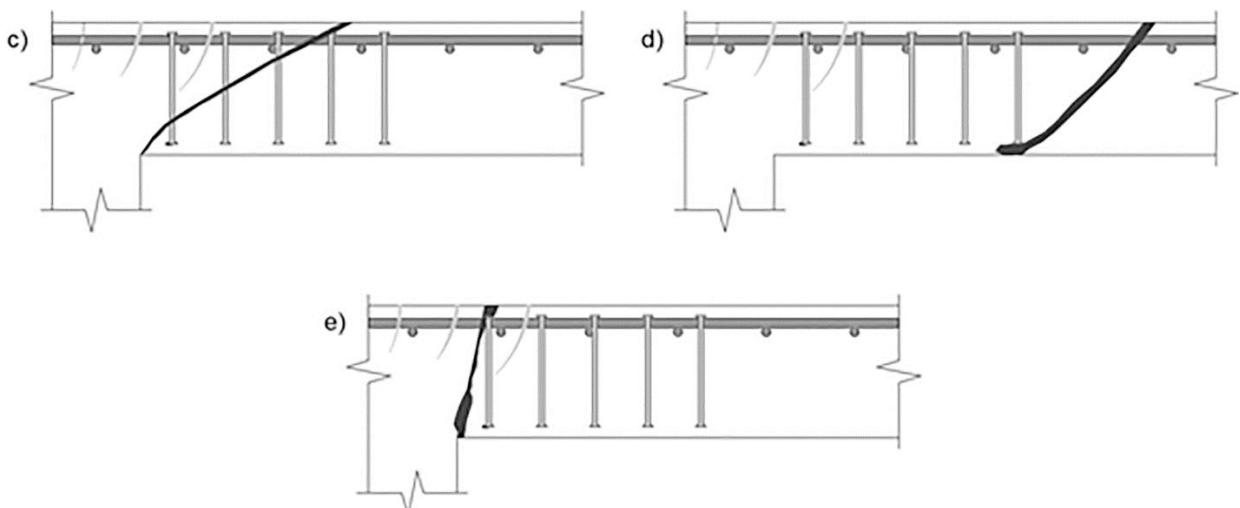


Рисунок 1.3 – Механизмы разрушения плиты от продавливания с поперечной арматурой: с) разрушение от продавливания внутри контура установки поперечной арматуры д) разрушение от продавливания за контуром установки поперечной арматуры е) разрушение по грани опоры

Продавливание представляет собой сложный процесс, зависящий от множества факторов. Ниже представлен краткий обзор основных исследований и их результатов, структурированный относительно исследуемых факторов.

1.2. Теоретические и экспериментальные исследования механизма разрушения плит от продавливания

В данном разделе собраны данные о влиянии различных факторов и конструктивных параметров плиты на механизм ее разрушения от продавливания.

1.2.1. Продольное армирование растянутой зоны плиты

В 1913 году A. N. Talbot [174] выполнил серию испытаний узлов сопряжения вертикальных и плитных железобетонных конструкций, часть из которых разрушилась в результате продавливания. Автор заключил, что несущая способность плит при продавливании увеличивается с ростом содержания продольной арматуры растянутой зоны плиты.

F. E. Richart [153], N. M. Hawkins и D. Mitchell [107] пришли к выводам, что наличие высоких величин напряжений в продольной арматуре ведет к росту интенсивности трещинообразования в плите. В то же время рост интенсивности трещинообразования ведет к уменьшению способности конструкции к передаче сдвиговых усилий и снижению ее несущей способности.

В 1956 году R. C. Eistner и E. Hognestad [84] представили результаты испытания серии из 34 плит на продавливание. Плиты имели рабочую высоту $h_0 = 114$ мм, а процент продольного армирования растянутой зоны плиты варьировался от 0,5 % до 3 % в зависимости от образца. Характер разрушения плит в существенной степени зависел от величины процента армирования: плиты с высокими процентами продольного армирования разрушались хрупко, в то время как плиты с низкими процентами продольного армирования демонстрировали существенные деформации и интенсивное образование трещин.

В 1961 году J. Moe [141] выполнил испытание 43 плит на продавливание, а также исследование и обобщение результатов испытаний 260 плит, выполненных другими авторами. Часть образцов, испытанных автором, имела локальное увеличение процента продольного армирования в области опоры. Автор пришел к выводу, что установка дополнительной продольной арматуры в растянутой зоне при опорной области плиты практически не влияет на ее несущую способность при

разрушении от продавливания. Однако дополнительная арматура влияет на жесткость конструкции и несущую способность на изгиб.

Согласно результатам исследования, выполненного Р. Е. Regan [152], зависимость несущей способности плиты при продавливании от процента продольного армирования является нелинейной. С увеличением процента продольного армирования ее вклад в передачу сдвиговых усилий становится менее весомым.

W. Dilger, G. Birkle и D. Mitchell [79], обобщив результаты предыдущих работ, пришли к выводу, что величина процента продольного армирования растянутой зоны влияет на эффективность передачи сдвиговых усилий с помощью сил зацепления. С увеличением ширины раскрытия трещины уменьшается площадь контакта между крупным заполнителем и противоположным берегом трещины, что ведет к уменьшению вклада сил зацепления в несущую способность плиты. Данные выводы хорошо согласуются с работами [74, 184], в которых исследовался механизм передачи сдвиговых усилий с помощью сил зацепления в трещине. На рисунке 1.4 представлена зависимость величины номинальных касательных напряжений τ_n , нормализованных относительно прочности бетона на одноосное растяжение R_{bt} , от процента продольного армирования растянутой зоны из работ [79, 153], представленных в исследовании [125].

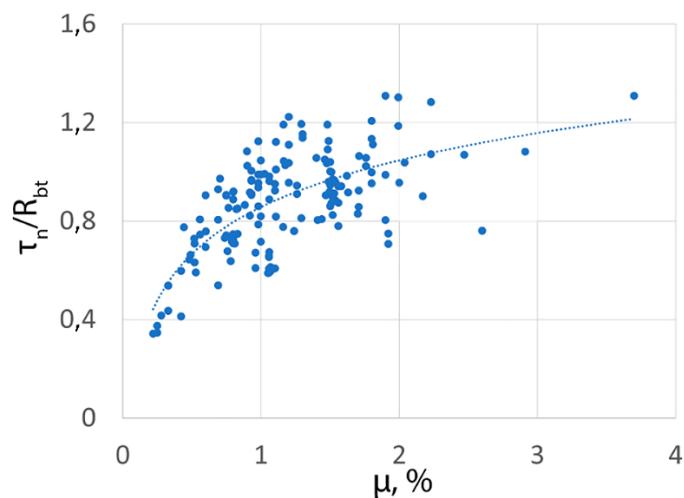


Рисунок 1.4 – Зависимость величины τ_n/R_{bt} от процента продольного армирования растянутой зоны

Номинальные касательные напряжения τ_n представляют собой предельное продавливающее усилие F_{ult} , воспринимаемое плитой, нормализованное относительно площади расчетного поперечного сечения конструкции и расположенное на расстоянии $h_0/2$ от грани опоры (1.1):

$$\tau_n = \frac{F_{ult}}{u \cdot h_0}, \quad (1.1)$$

где: u – периметр расчетного контура, расположенный на расстоянии $h_0/2$ от грани опоры, h_0 – рабочая высота конструкции.

Понятие номинальных касательных напряжений было введено Е. Mörsch [142] в начале 20-го века для исследования механизма разрушения железобетонных конструкций по наклонным сечениям от действия поперечной силы. J. Мое предложил вычислять τ_n на расстоянии $h_0/2$ от опоры. Использование нормализованных касательных напряжений τ_n/R_{bt} позволяет выполнять сравнительную оценку несущей способности плит с различными геометрическими и прочностными характеристиками.

В работе А. Н. Болгова [4], на основании результатов работ различных авторов был выполнен анализ влияния вклада продольного армирования растянутой зоны в несущую способность плит при продавливании. Важность данного параметра также отмечается в работе В. Б. Филатова [41].

В работах [121, 166] изучался вклад различных механизмов в несущую способность плит при их разрушении от продавливания. Согласно данным исследований, вклад нагельного эффекта продольной арматуры в несущую способность плит при их разрушении от продавливания пренебрежимо мал по сравнению с вкладом других механизмов передачи сдвиговых усилий. Данные выводы также согласуются с результатами численных исследований [33, 45].

1.2.2. Продольное армирование сжатой зоны плиты

В своей работе R. C. Eistner и E. Hognestad [84] пришли к выводу, что процент продольного армирования сжатой зоны не оказывает существенного влияния на несущую способность плиты при продавливании. Однако данные выводы были сделаны на основании результатов испытаний плит с высокими процентами

продольного армирования растянутой зоны (2 % и более). Согласно работе [160], данный вывод не является корректным для плит с малыми процентами продольного армирования растянутой зоны. Так, исследование M. Manterola [134] показало, что увеличение продольного армирования сжатой зоны привело к росту несущей способности плиты на продавливание на 11 %. Считается, что влияние данного параметра на несущую способность плиты при продавливании является несущественным по сравнению с другими конструктивными параметрами.

1.2.3. Пролет среза плиты

J. S. Lovorovich, D. I. McLean [133], а также И. В. Шеховцов [43] в своих работах выполнили серию испытаний плит на продавливание, в рамках которой образцы имели идентичный процент продольного армирования, прочность бетона и размер опоры. Единственным варьируемым параметром был пролет среза r_λ (1.2):

$$r_\lambda = b / h_0, \quad (1.2)$$

где b – расстояние от грани опоры до точки приложения нагрузки.

В опытах наблюдалось значительное увеличение несущей способности образцов при величинах пролета среза $r_\lambda < 4$. Данный результат может быть объяснен формированием поля нормальных сжимающих напряжений между опорой и точкой приложения нагрузки, оказывающего влияние на напряженное состояние в области формирования пирамиды продавливания (нормальные сжимающие напряжения вызывают уменьшение величины гидростатического инварианта тензора напряжений, что ведет к увеличению прочности материала).

В то же время, увеличение значения r_λ сопровождается уменьшением несущей способности плиты, что связано с уменьшением изгибной жесткости конструкции. Согласно результатам работы [82], уменьшение изгибной жесткости конструкции ведет к увеличению ширины раскрытия трещин и уменьшению вклада сил зацепления в несущую способность плиты. На рисунке 1.5 представлена зависимость τ_n/R_{bt} от пролета среза r_λ из работ [82, 133]:

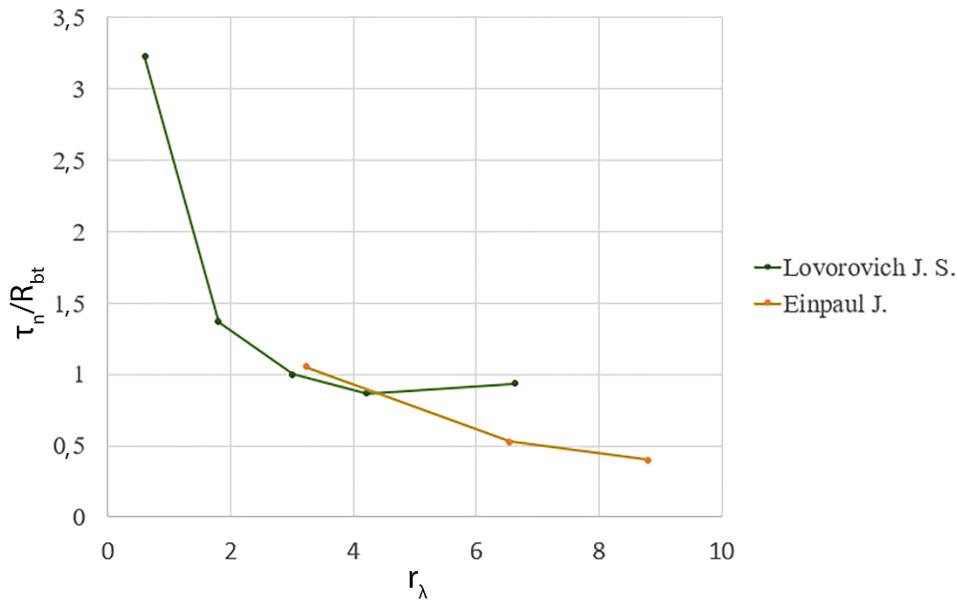


Рисунок 1.5 – Зависимость величины τ_n/R_{bt} от пролета среза r_λ

1.2.4. Относительный размер и форма опоры

В работах [76, 136] изучалось влияние размера опоры на номинальные напряжения τ_n , воспринимаемые плитой. Авторы пришли к выводу, что существует корреляция между τ_n и величиной периметра опоры, u_0 , отнесенной к рабочей высоте плиты h_0 . На рисунке 1.6 показана зависимость величины τ_n/R_{bt} от u_0/h_0 , полученная в работах [76, 136]:

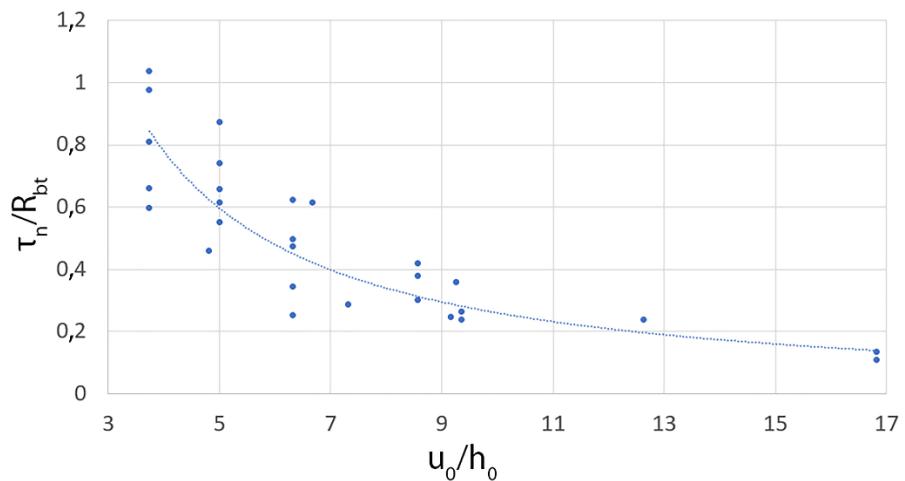


Рисунок 1.6 – Зависимость величины τ_n/R_{bt} от u_0/h_0

Согласно результатам работы [83], с ростом u_0/h_0 наблюдается увеличение концентрации напряжений в плите вблизи углов опоры, что ведет к локальному образованию трещин, снижающих несущую способность плиты. На рисунке 1.7 изображены изополя номинальных касательных напряжений τ_n на расстоянии $h_0/2$

от грани опоры в плитах одинаковой рабочей высоты для колонн разного размера, представленные в работе [83].

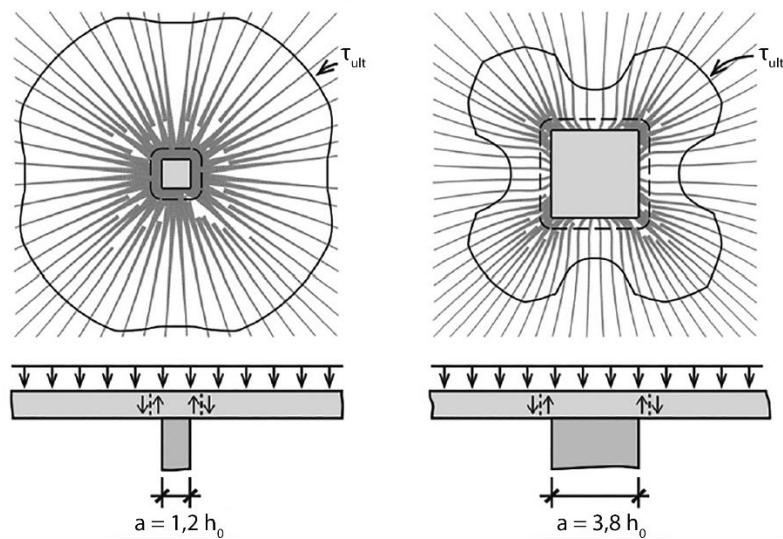


Рисунок 1.7 – Распределение номинальных касательных напряжений в области вокруг опоры для колонн разного размера

В рамках работы З. Ш. Галяутдинова [9] было выполнено масштабное исследование, посвященное изучению данного фактора. Исследование включало проведение лабораторных и численных экспериментов. Работа подтверждает и дополняет описанные выше тезисы.

В работах [15, 38-40] отмечается, что для опор, имеющих прямоугольную форму в плане с соотношением сторон $a_{\max}/a_{\min} > 1$, наблюдается увеличение неравномерности распределения усилий в плите и снижение несущей способности образца при росте соотношения a_{\max}/a_{\min} .

Данный эффект также объясняет снижение величины номинальных касательных напряжений, воспринимаемых плитой с поперечной арматурой при разрушении за контуром размещения поперечной арматуры [131].

1.2.5. Тип поперечного армирования

Согласно работе [131], в 70-х годах 20 века основным типом поперечного армирования были гнутые стержни и различные виды хомутов. А. Ghali и W. H. Dilger занимались разработкой новых типов поперечной арматуры для плит. В работе [124] было выполнено испытание поперечной арматуры, сформированной из обрезков металлоконструкций, а также жесткой арматуры из двутавровых балок.

Далее, в исследованиях [48-50] изучалась работа арматурных каркасов и стержней с высаженными головками. Основные типы поперечной арматуры представлены на рисунке 1.8.

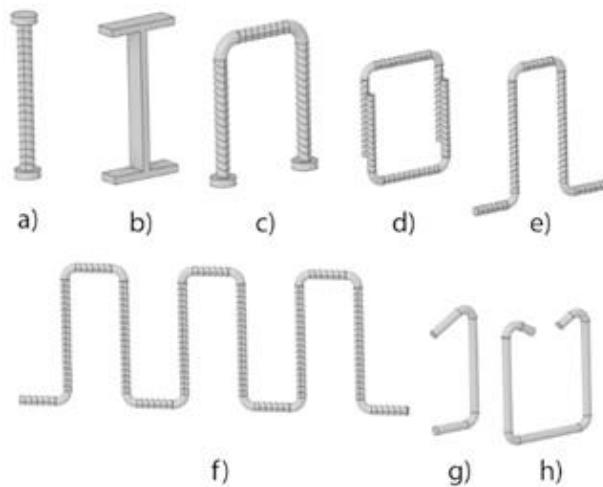


Рисунок 1.8 – Типы поперечной арматуры: a) поперечная арматура с высаженной головкой b) поперечная арматура, сформированная из обрезков металлоконструкций c) хомуты с высаженными головками d) – h) открытые и закрытые хомуты различной конфигурации, шпильки

A. Ghali и W. H. Dilger пришли к следующим выводам: условия и эффективность анкеровки поперечной арматуры в значительной степени влияют на прочность и величину деформаций плит при разрушении от продавливания. Согласно работе S. Lips [131], эффективность анкеровки арматуры зависит от ее типа. Типы арматуры a–c (согласно рисунку 1.8) имеют лучшую анкеровку, чем типы d–h, и обеспечивают более высокую несущую способность при разрушении плиты от продавливания по грани опоры. На рисунке 1.9 представлены графики зависимости величин τ_n/R_{bt} от угла поворота плиты относительно опоры для плит с разными типами поперечной арматуры. PL6 – образец, оснащенный арматурой с высаженными головками, PF1 – образец, армированный хомутами, PL1 – плита без поперечной арматуры.

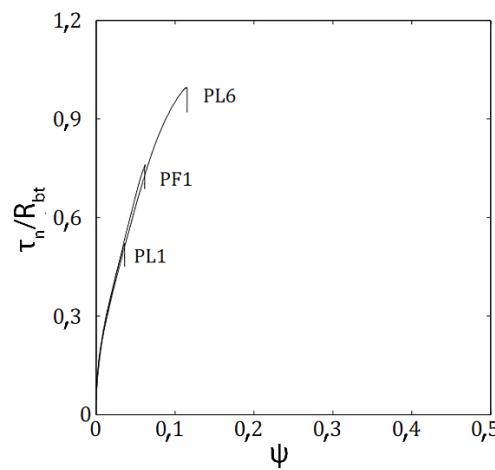


Рисунок 1.9 – График зависимости величины τ_n/R_{bt} от угла поворота плиты вокруг опоры для плит с разными типами поперечной арматуры

1.2.6. Масштабный эффект

Масштабный энергетический эффект (далее – масштабный эффект) представляет собой тенденцию к уменьшению величины нормализованных касательных напряжений τ_n/R_{bt} , воспринимаемых плитой, с ростом ее рабочей высоты h_0 . В процессе стабильного роста трещины существует баланс между поверхностной энергией Γ (энергия, которую необходимо затратить на образование новой поверхности при продвижении трещины) и энергией U_E , высвобождаемой при образовании новой поверхности. Величина поверхностной энергии Γ пропорциональна длине трещины l . В то же время, высвобождение энергии при образовании новых поверхностей происходит из некоторой области вокруг трещины, и величина U_E пропорциональна квадрату ее длины l^2 . На рисунке 1.10 представлено изменение энергий Γ и U_E в зависимости от длины трещины.

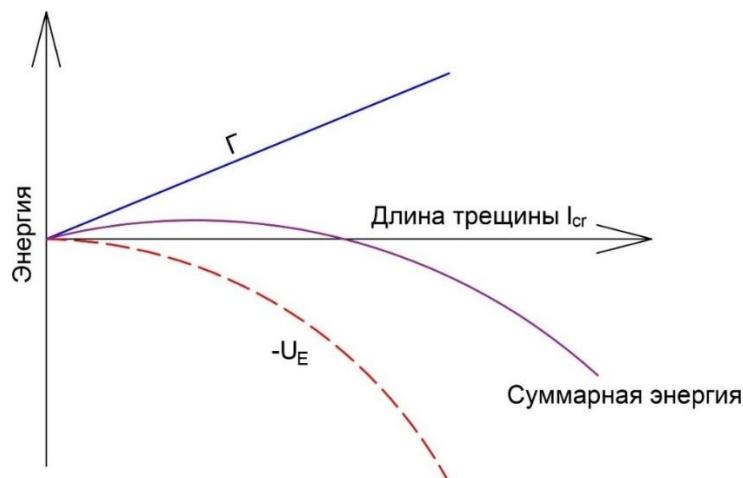


Рисунок 1.10 – Баланс энергии при росте трещины

После достижения определенной длины трещины, величина U_E превышает Γ из-за более высокой скорости роста. В результате, трещина производит больше энергии чем потребляет, что выражается в ее лавинообразном росте, ведущем к разрушению конструкции. Длина трещины, после достижения которой начинается лавинообразный рост деформаций, называется критической. Вследствие этого абсолютная величина критической длины трещины растет вместе с рабочей высотой конструкции, а ее относительная длина (относительно h_0) – падает. Подобная ситуация наблюдается и с ее несущей способностью. Изменение τ_n с ростом h_0 в общем виде может быть описано с помощью выражения (1.3), представляющего собой закон масштабного эффекта З. Бажанта [56] (Z. Bažant's size effect law).

$$\tau_n = B \cdot R_{bt} \cdot \left(1 + \frac{h_0}{d_0}\right)^{-1/2}, \quad (1.3)$$

где: d_0 – переходный размер, представляющий собой эмпирическую величину, характерную для данного материала и механизма разрушения конструкции (величина d_0 пропорциональна энергии разрушения материала); R_{bt} – предел прочности бетона при одноосном растяжении; B – функция, учитывающая геометрию конструкции.

Наличие зависимости τ_n от величины рабочей высоты плиты h_0 отмечалась О. Graf в его серии опытов, выполненной в 1938 году [99]. Плиты имели толщину 300 и 500 мм; половина плит была оснащена поперечной арматурой из наклонных стержней. Для плит без поперечной арматуры при толщине 300 мм $\tau_n = 3,3$ МПа, для плиты толщиной 500 мм $\tau_n = 2,8$ МПа. Для образцов с поперечной арматурой влияние масштабного эффекта было менее существенным.

В работах Н. Н. Коровина [19] и К. К. Li [128] выполнялись испытания серии плит без поперечной арматуры с разными величинами рабочей высоты. Зависимость величины τ_n/R_{bt} от h_0 , полученная в опытах, представлена на рисунке 1.11.

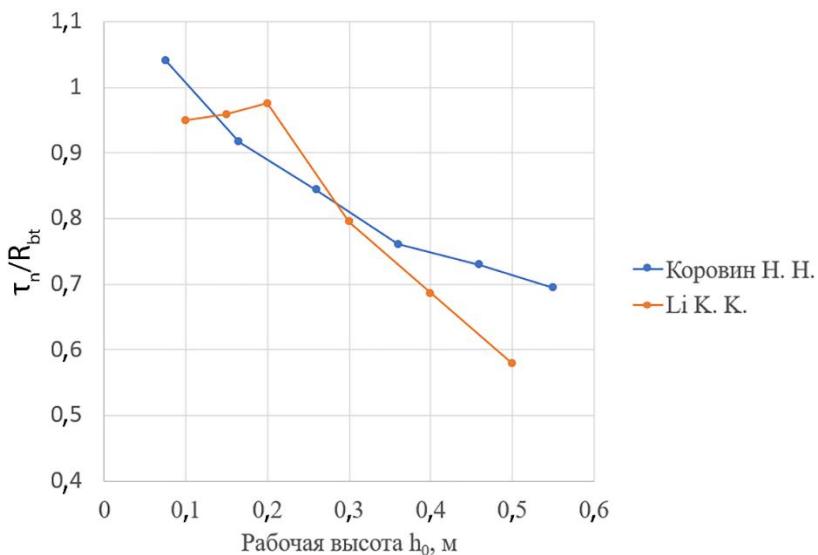


Рисунок 1.11 – Зависимость величины τ_n/R_{bt} от h_0

Авторы обеих работ отмечают снижение τ_n с ростом величины h_0 . Также, в работе Н. Н. Коровина дополнительно отмечалось, что результаты, полученные с помощью СНиП 2.03.01-84 «Бетонные и железобетонные конструкции» [34] завышают реальную несущую способность плит с большой рабочей высотой из-за отсутствия учета масштабного эффекта. Наличие и важность учета масштабного эффекта также отмечается в работах О. В. Кабанцева и С. Б. Крылова [15, 24, 113].

1.2.7. Сжимающее усилие со стороны вышележащей опоры

В диссертационной работе А. Н. Болгова [4] выполнялось исследование влияния величины сжимающего усилия со стороны вышележащей опоры на несущую способность железобетонных плит без поперечной арматуры при их разрушении от продавливания. Автор установил, что дополнительное сжимающее усилие, действующее со стороны вышележащей опоры, приводит к росту несущей способности плиты. Данные выводы также подтверждаются результатами лабораторных испытаний плит с поперечной арматурой и без, представленных в работе А. З. Сокурова [35]. Увеличение несущей способности конструкции можно объяснить изменением напряженного состояния в приопорной зоне плиты. Рост вертикального сжимающего усилия ведет к увеличению степени гидростатического обжатия бетона приопорной области сжатой зоны плиты. Чем сильнее материал обжат, тем большее усилие необходимо приложить для достижения предела прочности материала.

Из-за небольшого объема данных о влиянии данного фактора на несущую способность плиты при продавливании нельзя сделать однозначных выводов о степени его влияния (образцы с различными конструктивными параметрами демонстрируют разную степень влияния). Как правило, влияние данного фактора не учитывается в методиках расчета железобетонных плит на продавливание.

1.3. Методики вычисления несущей способности плит на продавливание, представленные в нормативных документах

За весь период изучения механизма разрушения плит от продавливания было создано множество методик, позволяющих оценить несущую способность плиты в рамках данного типа разрушения. Методики, созданные различными авторами, существенно отличаются друг от друга: они учитывают разные конструктивные и механические параметры, коэффициенты и могут давать различные результаты. Оценка точности расчетной методики может быть выполнена путем сравнения величины предельного продавливающего усилия, полученного с помощью рассматриваемой методики (F_{calc}), с величиной предельного продавливающего усилия, полученного в результате лабораторных испытаний (F_{exp}). Ниже приведена оценка точности методик расчета железобетонных плит на продавливание, представленных в следующих нормативных документах: Eurocode 2 [89], СП 63.13330.2018 [37], ACI 318-25 [44], Model Code 2020 [93]. Для выполнения данной задачи были собраны результаты испытаний 590 плит на продавливание, представленные в работах [9, 13, 18, 19, 35, 46, 47, 60-66, 71, 72, 74, 76, 78, 82-86, 88, 90, 92, 96, 97, 99, 102-108, 115-117, 120, 123, 128, 129, 131-134, 136, 137, 140, 141, 143, 145-152, 154-156, 157, 158, 162, 163, 165, 167-169, 172, 173, 175-180, 183]. Сравнение выполнялось без учета коэффициентов надежности по материалу. В таблице 1.1 представлены максимальные и минимальные значения параметров испытанных плит.

Таблица 1.1 – Параметры испытанных плит

Все плиты		
Параметр	Минимум	Максимум
h_0 , мм	41	594
a_1 , мм	54	1000
a_2 , мм	25	901
r_λ	0,60	13,55
B	12	150
d_g , мм	4	38
μ , %	0,2	3,7
μ' , %	0	1,8
R_s , МПа	255	720
Плиты с поперечным армированием		
R_{sw} , МПа	238	917
n_r	2	10
s_0 , мм	20	200
s_1 , мм	40	500
\emptyset_{sw} , мм	5	25

где: h_0 – рабочая высота плиты; a_1 – размер стороны квадратной колонны; a_2 – диаметр круглой колонны; r_λ – пролет среза плиты (расстояние от грани опоры до точки приложения нагрузки деленное на рабочую высоту); B – класс бетона; d_g – максимальный диаметр крупного заполнителя; μ – процент армирования растянутой зоны; μ' – процент армирования сжатой зоны; R_s – предел текучести продольной арматуры; R_{sw} – предел текучести поперечной арматуры; n_r – количество рядов поперечного армирования; s_0 – расстояние от грани колонны до центра тяжести стержня первого периметра поперечной арматуры; s_1 – шаг поперечной арматуры; \emptyset_{sw} – диаметр поперечной арматуры.

Из подборки были исключены плиты, разрушение которых происходило в результате изгиба ($M \geq M_{ult}$) либо в результате нарушения конструктивных

требований (например, разрушение от продавливания с формированием пирамиды продавливания между стержнями поперечной арматуры из-за слишком большого шага поперечного армирования). Для плит с поперечной арматурой учитывалась форма распределения поперечной арматуры (см. рисунок 1.12) и ее тип (см. рисунок 1.8).

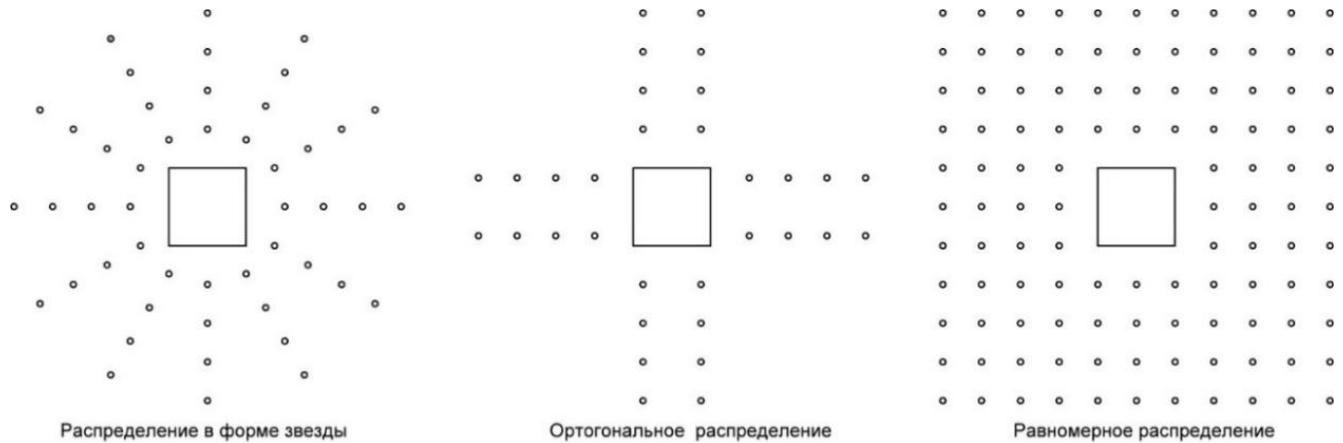


Рисунок 1.12 – Распределение поперечной арматуры вокруг опоры

Результаты сравнения характеризуются с помощью коэффициента детерминации и коэффициента вариации. Коэффициент детерминации (R^2) является показателем соответствия математической модели данным лабораторных испытаний. Величина R^2 принимает значения от 0 до 1: чем ближе значение R^2 к 1, тем выше степень соответствия (1.4).

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (F_{exp,i} - F_{calc,i})^2}{\sum_{i=1}^n (F_{exp,i} - \bar{F}_{exp})^2}. \quad (1.4)$$

В данной работе используется следующая условная шкала оценки значения коэффициента детерминации:

- $R^2 \geq 0,9$ – высокая степень соответствия опытным данным;
- $0,8 \leq R^2 < 0,9$ – хорошая степень соответствия данным;
- $0,7 \leq R^2 < 0,8$ – удовлетворительная степень соответствия данным;
- $R^2 < 0,7$ – низкая степень соответствия опытным данным.

Коэффициент вариации (Coefficient of Variation – CV) является показателем стабильности вычислений и характеризует относительную меру отклонения

измеренных значений от среднего арифметического. Чем ближе значение CV к нулю, тем стабильнее результаты.

Согласно обзору, представленному в работе [2], основа методики расчета железобетонных плит на продавливание, представленной в СП 63.13330.2018 [37], была заложена А. А. Гвоздевым [10]. Методика получила дальнейшее развитие в работах Н. Н. Коровина [20, 21], А. С. Залесова [12], М. Ф. Фишеровой [42], С. Г. Качановского [17], А. Д. Сергиевского [32] и др. В СП 63.13330.2018 [37] несущая способность плиты на продавливание без поперечной арматуры может быть вычислена с помощью формулы (1.5). Несущая способность плит с поперечной арматурой вычисляется как минимальная величина среди выражений (1.6)-(1.8).

$$F_b = u_{\text{СП63}} \cdot h_0 \cdot R_{bt}, \quad (1.5)$$

$$F_w = F_b + F_{sw} = u_{\text{СП63}} \cdot h_0 \cdot R_{bt} + 0,8 \cdot \frac{A_{sw,\text{СП63}} \cdot R_{sw}}{s_w} \cdot u_{\text{СП63}}, \quad (1.6)$$

$$F_{out} = u_{\text{СП63,out}} \cdot h_0 \cdot R_{bt}, \quad (1.7)$$

$$F_{cr} = 2 \cdot F_b, \quad (1.8)$$

где: F_b – предельное усилие, воспринимаемое бетоном; $u_{\text{СП63}}$ – длина контрольного периметра, расположенного на расстоянии $h_0/2$ от опоры; R_{bt} – прочность бетона на одноосное растяжение; $A_{sw,\text{СП63}}$ – площадь поперечной арматуры, расположенной в расчетном сечении; $u_{\text{СП63,out}}$ – длина расчетного периметра, расположенного на расстоянии $h_0/2$ от границы размещения поперечной арматуры.

На рисунке 1.13 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью СП 63.13330.2018 (F_{calc}). В таблице 1.2 представлены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

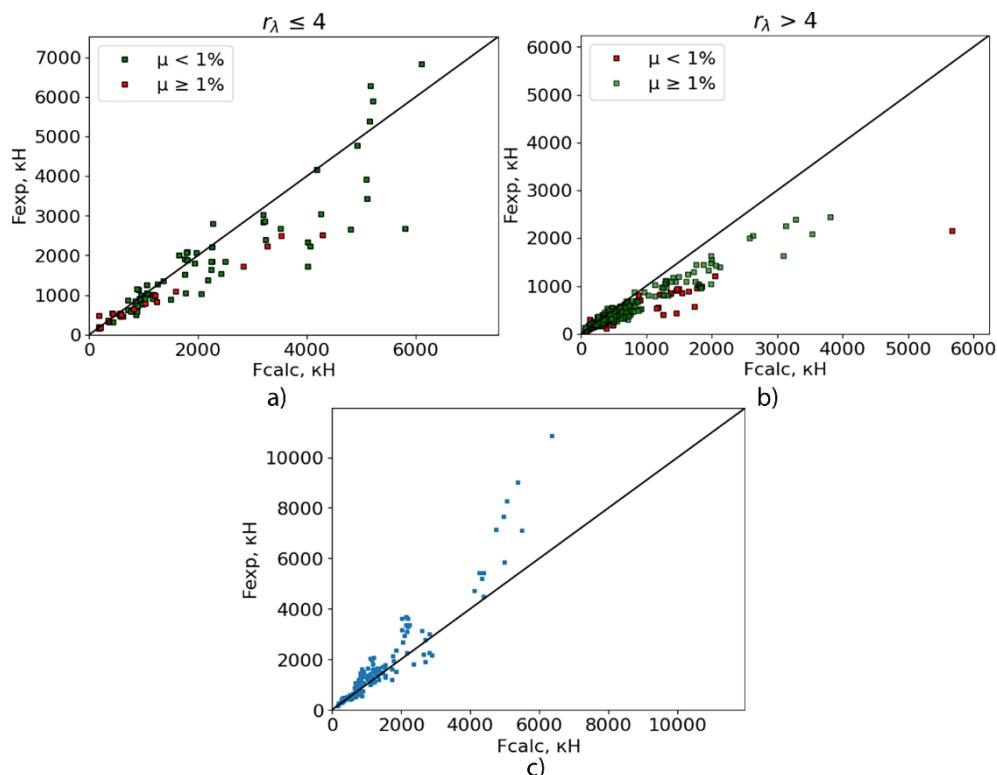


Рисунок 1.13 – Сравнение величины предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью СП 63.13330.2018 (F_{calc}): а) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; б) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; в) плиты с поперечной арматурой

Таблица 1.2 – Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью СП 63.13330.2018

Плиты без поперечной арматуры				Плиты с поперечной арматурой	
Показатель	$r_\lambda \leq 4$		$r_\lambda > 4$		
	$\mu < 1\%$	$\mu \geq 1\%$	$\mu < 1\%$	$\mu \geq 1\%$	
CV	0,24	0,51	0,49	0,33	0,49
R^2	0,80	0,70	-0,07	0,81	0,81

Результаты, полученные с помощью СП 63.13330.2018 для плит без поперечной арматуры, имеют хорошую степень соответствия опытным данным для плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1\%$, а также для плит с $r_\lambda > 4$ и $\mu \geq 1\%$. Для плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu \geq 1\%$ наблюдается удовлетворительное соответствие опытным данным. Для плит с $r_\lambda > 4$ и $\mu < 1\%$ – низкая степень соответствия. Результаты для плит без поперечной арматуры обладают тенденцией к завышению несущей способности плиты, что

связано с отсутствием учета влияния процента продольного армирования и учета масштабного эффекта [19, 80]. В представленной выборке максимальное завышение несущей способности составляет $F_{\text{calc}}/F_{\text{exp}} = 2,3$ и наблюдается для образца PG-3 из работы [102]. Для $r_\lambda \leq 4$ влияние масштабного эффекта частично компенсируется за счет отсутствия учета величины пролета среза, увеличивающей несущую способность плиты. Для плит с поперечной арматурой наблюдается хорошая степень соответствия опытным данным.

Предельное продавливающее усилие для плит без поперечной арматуры согласно Eurocode 2 [89] может быть вычислено на основании формул (1.9) и (1.10). Предельное продавливающее усилие для плит с поперечной арматурой может быть вычислено на основании выражения (1.11).

$$\frac{F_b}{u_{\text{EC2}} \cdot h_0} = \tau_{\text{Rd,c}} = 0,6 \cdot k_{\text{pb}} \cdot \left(\mu \cdot f_c \cdot \frac{d_{\text{dg}}}{a_{\text{pd}}} \right)^{1/3} \leq 0,5 \cdot \sqrt{f_c}, \quad (1.9)$$

$$1 \leq k_{\text{pb}} = 3,6 \sqrt{1 - b_0 / u_{\text{EC2}}} \leq 2,5, \quad (1.10)$$

$$\rho_{\text{sw}} \cdot f_{ywd} \leq \frac{F_{\text{ult}}}{u_{\text{EC2}} \cdot h_0} = \eta_c \cdot \tau_{\text{Rd,c}} + \eta_s \cdot \rho_{\text{sw}} \cdot f_{ywd} \leq \eta_{\text{sys}} \cdot \tau_{\text{Rd,c}}, \quad (1.11)$$

где: d_{dg} – функция, учитывающая шероховатость трещины; u_{EC2} – контрольный периметр, расположенный на расстоянии $h_0/2$ от грани опоры; f_c – цилиндрическая прочность бетона на одноосное сжатие; μ – процент продольного армирования растянутой зоны; b_0 – периметр опоры; a_{pd} – коэффициент, зависящий от расстояния между опорой и точкой изменения знака радиального момента в плите; η_c , η_s – понижающие коэффициенты к вкладу бетона и арматуры соответственно; f_{ywd} – предел текучести арматуры; η_{sys} – коэффициент, зависящий от типа поперечной арматуры; ρ_w – коэффициент поперечного армирования.

На рисунке 1.14 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью Eurocode 2 (F_{calc}). В таблице 1.3 представлены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

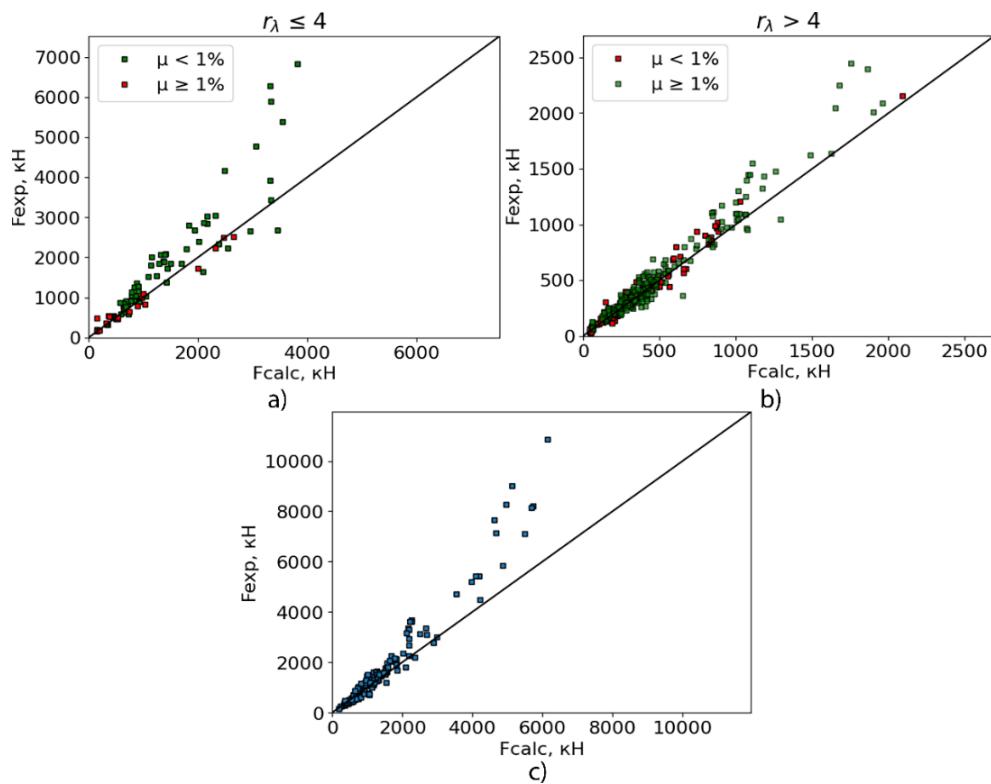


Рисунок 1.14 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью Eurocode 2 (F_{calc}): а) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; б) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; в) плиты с поперечной арматурой

Таблица 1.3 – Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью Eurocode 2

Плиты без поперечной арматуры				Плиты с поперечной арматурой	
Показатель	$r_\lambda \leq 4$		$r_\lambda > 4$		
	$\mu < 1\%$	$\mu \geq 1\%$	$\mu < 1\%$	$\mu \geq 1\%$	
CV	0,20	0,36	0,20	0,19	0,20
R^2	0,68	0,95	0,97	0,96	0,81

Результаты, полученные с помощью Eurocode 2 для плит без поперечной арматуры, показывают высокую степень соответствия опытным данным, кроме плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1\%$, где наблюдается низкая степень. Для плит с поперечной арматурой наблюдается хорошая степень соответствия опытным данным с тенденцией к занижению несущей способности.

Согласно ACI 318-25 [44] предельное продавливающее усилие для плит без поперечной арматуры вычисляется как минимальное значение среди условий (1.12)-(1.14). λ_s – функция, учитывающая влияние масштабного эффекта (1.15).

$$F_b = 0,333 \cdot u_{ACI} \cdot h_0 \cdot \lambda_s \cdot \phi \cdot \sqrt{f_c}, \quad (1.12)$$

$$F_b = u_{ACI} \cdot h_0 \cdot 0,17 \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdot \lambda_s \cdot \phi \cdot \sqrt{f_c}, \quad (1.13)$$

$$F_b = u_{ACI} \cdot h_0 \cdot 0,083 \cdot \left(2 + \frac{\alpha_s \cdot h_0}{u_{ACI}}\right) \cdot \lambda_s \cdot \phi \cdot \sqrt{f_c}, \quad (1.14)$$

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{h_0}{0,25 \text{ [м]}}}} \leq 1, \quad (1.15)$$

где: $\beta = c_{max}/c_{min}$ – функция, учитывающая соотношение между наибольшей (c_{max}) и наименьшей (c_{min}) сторонами опоры; α_s – параметр, принимаемый равный 40 для внутренних колонн 30 для колонн, расположенных вдоль грани плиты и 20 для угловых колонн; $\phi = 0,75$ – понижающий коэффициент.

Предельное продавливающее усилие для плит с поперечной арматурой вычисляется как минимальная величина среди выражений (1.16)-(1.18), представляющих различные механизмы разрушения плиты. Величина вклада бетона F_b в формуле (1.16) вычисляется в соответствии со следующими условиями:

- Для плит с поперечной арматурой типов а-с, согласно рисунку 1.8, величина F_b принимается как наименьшее значение среди условий (1.12)-(1.14). При этом в условии (1.12) вместо множителя 0,333 используется множитель 0,25.
- Для плит с поперечной арматурой типов d-h, согласно рисунку 1.8, величина F_b принимается согласно условию (1.12) с заменой множителя 0,333 на множитель 0,167.

$$F_w = F_b + A_{sw,ACI} \cdot R_{sw} \cdot \frac{h_0}{s_w}, \quad (1.16)$$

$$F_{out} = 0,167 \cdot u_{ACI,out} \cdot h_0 \cdot \phi \cdot \sqrt{f_c}, \quad (1.17)$$

$$F_{cr} = C_1 \cdot u_{ACI} \cdot h_0 \cdot \phi \cdot \sqrt{f_c}, \quad (1.18)$$

где: $A_{sw,ACI}$ – площадь поперечной арматуры одного периметра армирования вокруг колонны; R_{sw} – предел текучести арматуры; s_w – шаг поперечной арматуры; $u_{ACI,out}$ – длина расчетного периметра, расположенного на расстоянии $h_0/2$ от границы размещения поперечной арматуры; C_1 – коэффициент, величина которого зависит от типа поперечного армирования и принимаемая равной 0,66 для типов а-с и 0,5 для типов d-h согласно рисунку 1.8.

На рисунке 1.15 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью ACI 318-25 (F_{calc}). В таблице 1.4 представлены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

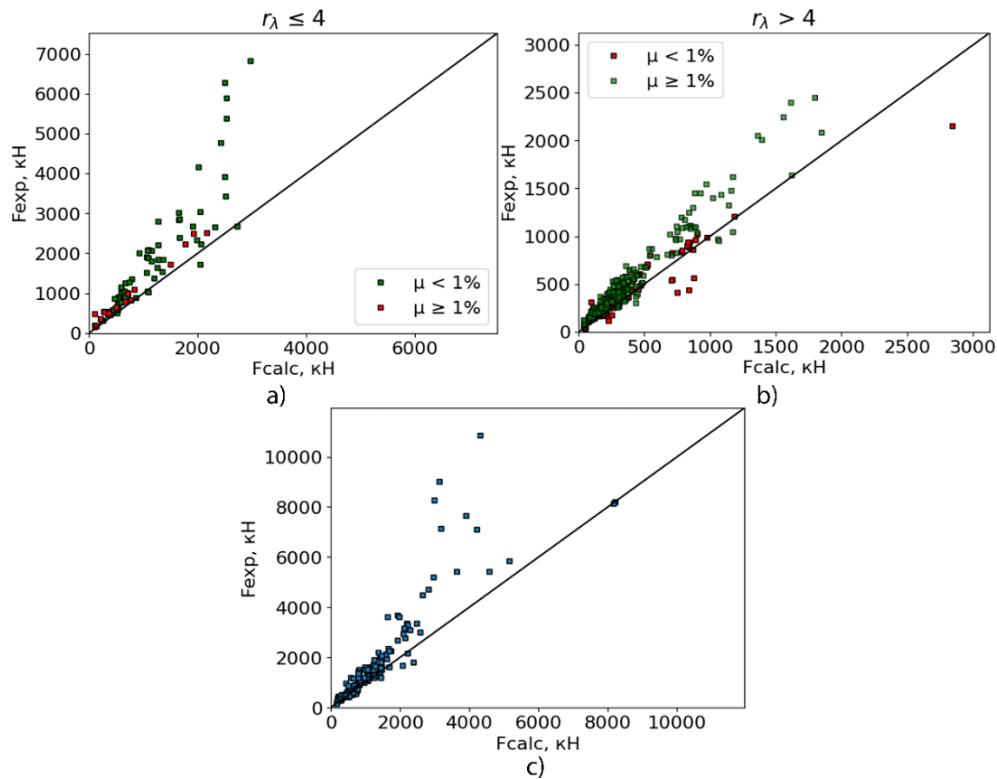


Рисунок 1.15 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью ACI 318-25 (F_{calc}): а) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; б) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; в) плиты с поперечной арматурой

Таблица 1.4 – Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью ACI 318-25

Плиты без поперечной арматуры				Плиты с поперечной арматурой	
Показатель	$r_\lambda \leq 4$		$r_\lambda > 4$		
	$\mu < 1\%$	$\mu \geq 1\%$	$\mu < 1\%$	$\mu \geq 1\%$	
CV	0,23	0,52	0,31	0,23	0,31
R^2	0,41	0,88	0,85	0,80	0,59

Результаты, полученные с помощью ACI 318-25 для плит без поперечной арматуры, имеют хорошую степень соответствия опытным данным, кроме плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1\%$. В формуле (1.12) отсутствует учет величины r_λ , что приводит к занижению реальной несущей способности плит с величинами $r_\lambda \leq 4$. Для плит с поперечной арматурой наблюдается низкое соответствие опытным данным.

Согласно Model Code 2020 [93], предельное продавливающее усилие для плит без поперечной арматуры может быть вычислено на основании формул (1.19)-(1.22). Документ предполагает четыре уровня уточнения результата. Выбор уровня влияет на содержание формул (1.19), (1.20). Уровень I используется для предварительных расчетов, позволяющих назначить размеры конструкции, уровень II рекомендуется для проектирования новых конструкций, применение уровня III рекомендуется для проверки несущей способности существующих конструкций, уровень IV используется для задач, включающих детальное изучение существующих конструкций и нестандартных проектных решений. В данной работе используются формулы уровня II.

$$F_b = k_\psi \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC} \cdot h_0, \quad (1.19)$$

$$k_\psi = \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot \psi \cdot h_0 \cdot k_{dg}} \leq 0,6, \quad (1.20)$$

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r}{h_0} \cdot \frac{R_s}{E_s} \cdot \left(\frac{m_s}{m_R} \right)^{3/2} = 1,5 \cdot \frac{r}{h_0} \cdot \frac{R_s}{E_s} \cdot \left(\frac{F}{m_R \cdot 8} \right)^{3/2}, \quad (1.21)$$

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g [\text{мм}]} \geq 0,75, \quad (1.22)$$

где: k_ψ – функция, учитывающая снижение несущей способности плиты в результате раскрытия изгибных трещин; k_{dg} – функция, учитывающая шероховатость трещин; ψ – угол поворота плиты в результате раскрытия изгибных трещин возле опоры; r – расстояние от центра опоры до линии изменения знака радиального изгибающего момента; R_s, E_s – предел текучести и модуль упругости продольной арматуры соответственно; m_s – изгибающий момент, действующий в плите (может быть принят равным $F/8$, где F – действующее на опоре продавливающее усилие); m_R – предельный изгибающий момент, при котором происходит разрушение плиты от изгиба; d_g – максимальный диаметр крупного заполнителя. Поскольку изгибающий момент m_s , требуемый для вычисления угла поворота ψ , связан с величиной продавливающего усилия F , предельное продавливающее усилие F_b может быть найдено путем совместного решения уравнений (1.19) и (1.20) с подстановкой F_b вместо F .

Предельное продавливающее усилие для плит с поперечной арматурой может быть вычислено как минимальная величина среди выражений (1.23), (1.25) и (1.26). Напряжения в поперечной арматуре вычисляются на основании выражения (1.24).

$$F_w = F_b + F_{sw} = k_\psi \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC} \cdot h_0 + \sum A_{sw,MC} \cdot \sigma_{sw}, \quad (1.23)$$

$$\sigma_{sw} = E_{sw} \cdot \frac{\psi}{6} \cdot \left(1 + \frac{f_{bd} \cdot h_0}{R_{sw} \cdot \phi} \right) \leq R_{sw}, \quad (1.24)$$

$$F_{out} = k_\psi \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC,out} \cdot h_0, \quad (1.25)$$

$$F_{cr} = k_{sys} \cdot k_\psi \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC} \cdot h_0, \quad (1.26)$$

где: $A_{sw,MC}$ – площадь всей поперечной арматуры, расположенной в границах $0,35 \cdot h_0 \dots h_0$ вокруг опоры; E_{sw} – модуль упругости поперечной арматуры; f_{bd} – прочность связи бетона и арматуры (для арматуры периодического профиля может быть принята равной 3 МПа); ϕ – диаметр поперечной арматуры; $u_{out,MC}$ – длина расчетного периметра, расположенного на расстоянии $h_0/2$ от границы размещения

поперечной арматуры; k_{sys} – эмпирический коэффициент, принимаемый на основе опытных данных в зависимости от типа поперечной арматуры (согласно работе [131] величину коэффициента можно принять равной 2,4 для типов поперечной арматуры а-с и 2,8 для типов d-h согласно рисунку 1.8.

На рисунке 1.16 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью Model Code 2020 (F_{calc}). В таблице 1.5 представлены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

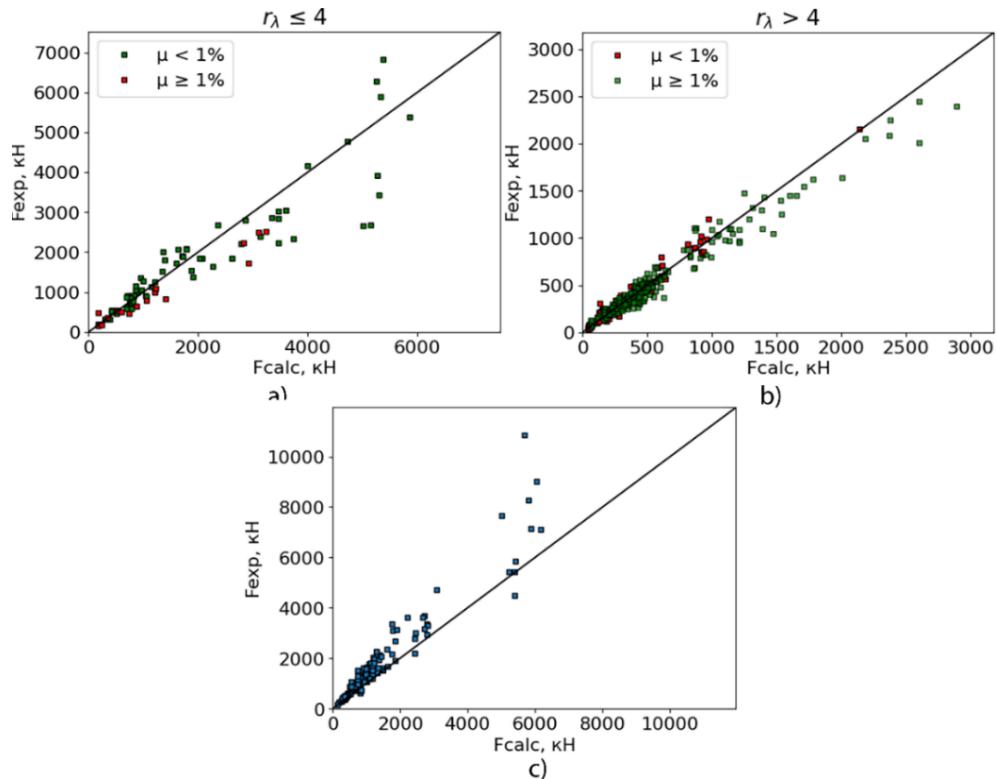


Рисунок 1.16 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью Model Code 2020 (F_{calc}): а) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; б) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; в) плиты с поперечной арматурой

Таблица 1.5 – Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} вычисленной с помощью Model Code 2020

Показатель	Плиты без поперечной арматуры				Плиты с поперечной арматурой	
	$r_\lambda \leq 4$		$r_\lambda > 4$			
	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$		
CV	0,22	0,49	0,22	0,19	0,19	
R^2	0,79	0,67	0,96	0,94	0,83	

Для плит без поперечной арматуры с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu \geq 1 \%$ наблюдается низкое соответствие опытным данным, для плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1 \%$ – удовлетворительная степень соответствия опытным данным. Для плит с $r_\lambda > 4$ наблюдается высокая степень соответствия опытным данным. Масштабный эффект в функции (1.19) учитывается с помощью использования в функции k_ψ произведения $k_{dg} \cdot h_0$ в знаменателе. Согласно работе [80], подобный подход к учету масштабного эффекта является некорректным и приводит к занижению реальной несущей способности плит с большой рабочей высотой. Для плит с поперечной арматурой наблюдается хорошее соответствие опытным данным с тенденцией к занижению реальной несущей способности плит.

Таким образом, актуальной является задача разработки методики расчета железобетонных плит на продавливание, отражающей основные конструктивные и механические параметры, оказывающие влияние на несущую способность конструкции. Методика, имеющая лучшее соответствие опытным данным, может быть получена с помощью регрессионного анализа методом наименьших квадратов на основании результатов лабораторных испытаний. Проблема состоит в том, что большая часть лабораторных испытаний выполнялась на образцах сравнительно малого размера рабочей высоты (240 мм и менее), что не позволяет достоверно судить о возможности применения разрабатываемой методики для оценки несущей способности плит с большой рабочей высотой. Плиты с рабочей высотой 480 мм и более составляют менее 4 % от общего числа испытаний. Наибольшая рабочая высота в испытаниях – 669 мм [149], в то время как в зданиях и сооружениях

встречаются плиты с большей рабочей высотой. На рисунке 1.17 представлена диаграмма процентного распределения плит в лабораторных испытаниях в зависимости от рабочей высоты.

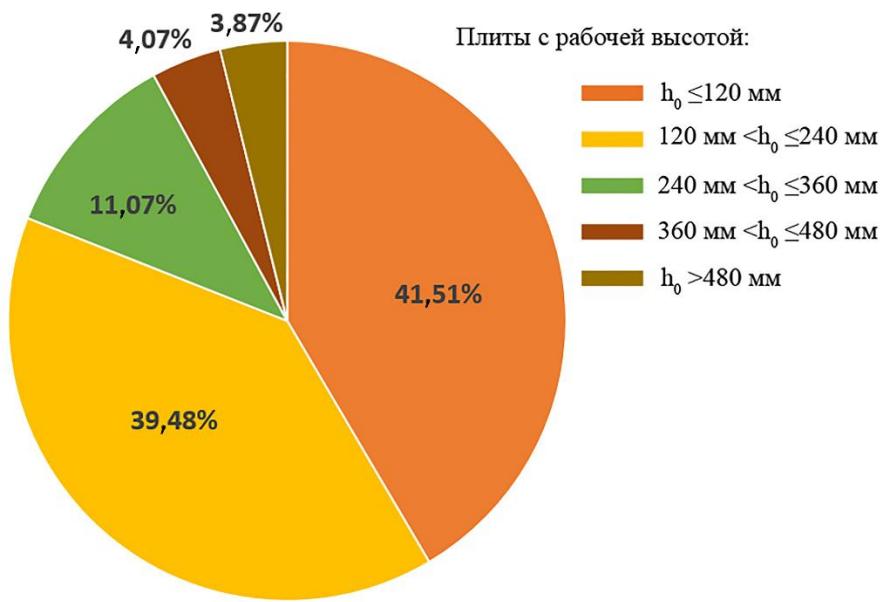


Рисунок 1.17 – Процентное распределение плит в зависимости от рабочей высоты в лабораторных испытаниях

Еще одной проблемой является то, что большая часть испытанных в лаборатории плит с рабочей высотой 480 мм и более имела относительно небольшие величины пролета среза ($r_\lambda = 1,5 \dots 2,5$), что дополнительно накладывает влияние этого фактора и затрудняет оценку влияния масштабного эффекта. Малое количество испытаний для плит с рабочей высотой 480 мм и более связано с высокими финансовыми и трудовыми затратами на испытание подобных плит. Практически все рассмотренные выше методики расчета на продавливание либо не учитывают масштабный эффект, либо учитывают его некорректно, что подчеркивает наличие и актуальность данной проблемы.

Результаты испытаний плит с большой рабочей высотой, необходимые для валидации методики, могут быть получены с помощью численных испытаний методом конечных элементов с использованием нелинейных моделей материала. Для получения корректных результатов модели должны соответствовать ряду требований и пройти процедуру валидации.

1.4. Обзор моделей нелинейного деформирования бетона

1.4.1. Требования к модели бетона

Модель материала представляет собой модель механики твердого деформируемого тела, устанавливающую связь между напряженным и деформированным состояниями (тензорами напряжений и деформаций). Можно сформулировать ряд требований, которым должна отвечать модель бетона.

1. Модель должна соответствовать результатам опытных данных. Это требование также подразумевает:

- Зависимость прочности материала от вида напряженного состояния.

Условие прочности в модели материала описывается с помощью предельной поверхности. Девиаторные сечения предельной поверхности, соответствующие разным степеням гидростатического обжатия, не должны обладать аффинным подобием (со стремлением величины гидростатического обжатия к минус бесконечности форма девиаторного сечения меняется от треугольной к круглой). Геометрическая интерпретация данного условия изображена на рисунке 1.18.

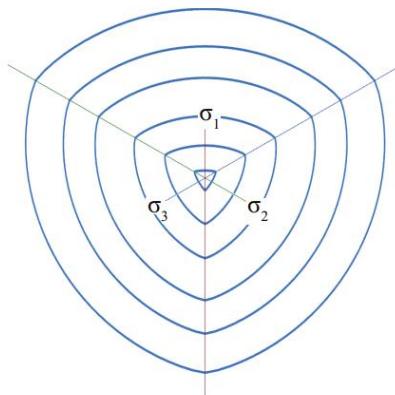


Рисунок 1.18 – Отсутствие аффинного подобия девиаторных плоскостей

Функция, описывающая предельную поверхность, должна зависеть от трех инвариантов: I_1 (первый инвариант тензора напряжений), J_2 и J_3 (второй и третий инварианты девиатора тензора напряжений соответственно). Влияние I_1 на функцию предельной поверхности изменяет предел прочности в зависимости от величины гидростатического обжатия. Учет зависимости от J_3 позволяет описывать предельную поверхность с формой девиаторного сечения, отличной от круга.

Демонстрация влияния вышеуказанных инвариантов на форму предельной поверхности представлена на рисунке 1.19.

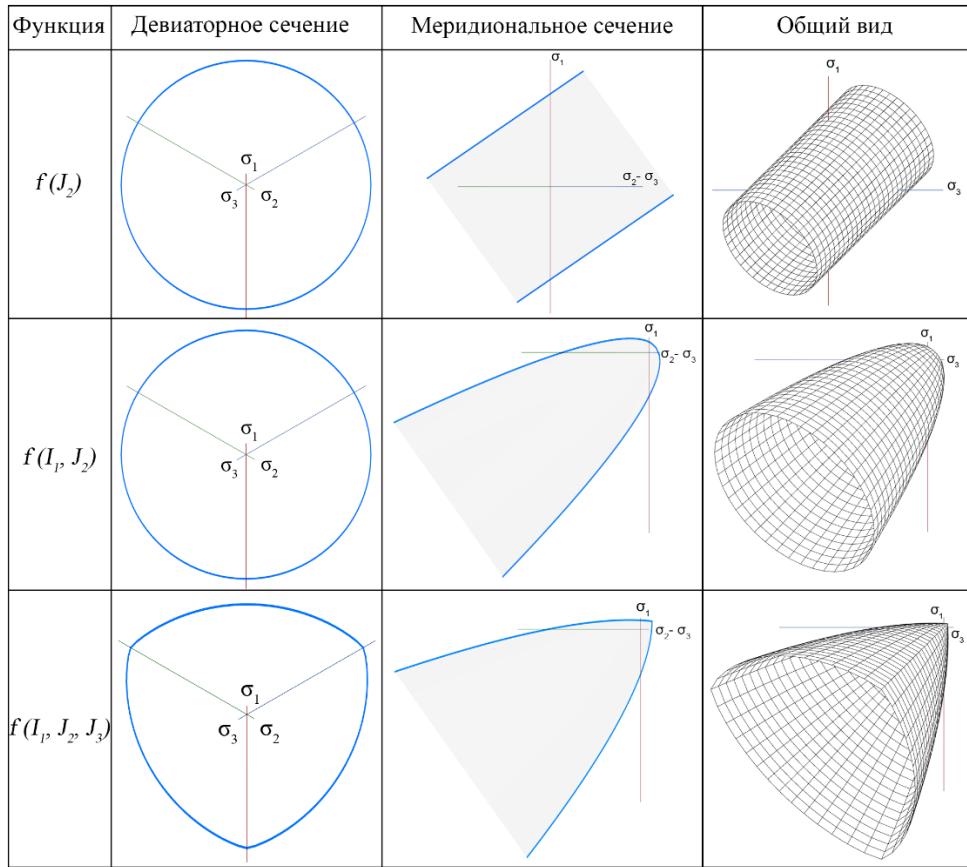


Рисунок 1.19 – Зависимость формы предельной поверхности от инвариантов тензора напряжений

Функция, описывающая предельную поверхность, должна зависеть от второго главного напряжения. Данное условие позволяет отразить криволинейность поверхности в девиаторном сечении (см. рисунок 1.20).

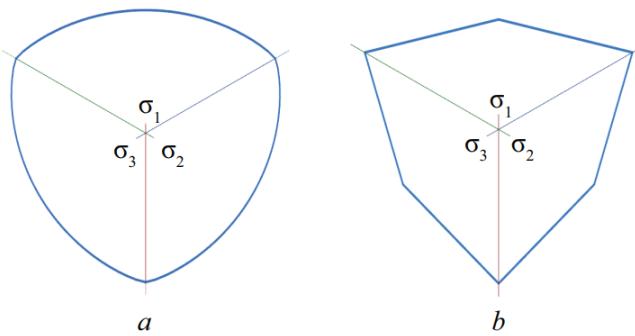


Рисунок 1.20 – Влияние второго главного напряжения σ_2 на форму девиаторного сечения поверхности: а — поверхность, зависимая от σ_2 ; б — поверхность, независимая от σ_2

- Зависимость величины деформаций, соответствующих пределу прочности материала от вида напряженного состояния. Для удовлетворения данного требования правила эволюции предельной поверхности должны зависеть от вида напряженного состояния.
- Учет эффекта дилатации. Дилатация – пластическое увеличение объема бетона, вызванное накоплением и развитием микротрещин.
- Учет эффекта контракции. Контракция – проявление пластических деформаций при трехстороннем сжатии, связанное с разрушением пор в материале.
- Изменение жесткости материала в рамках циклического и знакопеременного нагружений может быть учтено путем введения раздельных параметров поврежденности материала при сжатии и растяжении.
- Корректное воспроизведение механизма роста трещин и учет масштабного эффекта. Даные задачи могут быть решены с помощью введения энергетического или нелокального подходов при моделировании разупрочнения материала при растяжении. Энергетический подход подразумевает использование зависимости напряжений от ширины раскрытия трещины. Данная зависимость контролируется величиной энергии разрушения G_f , представляющей собой количество энергии, которое необходимо сообщить материалу для разрыва межатомных связей между берегами трещины. Графически данная величина может быть представлена как площадь под графиком зависимости напряжений от ширины раскрытия трещины (см. рисунок 1.21).

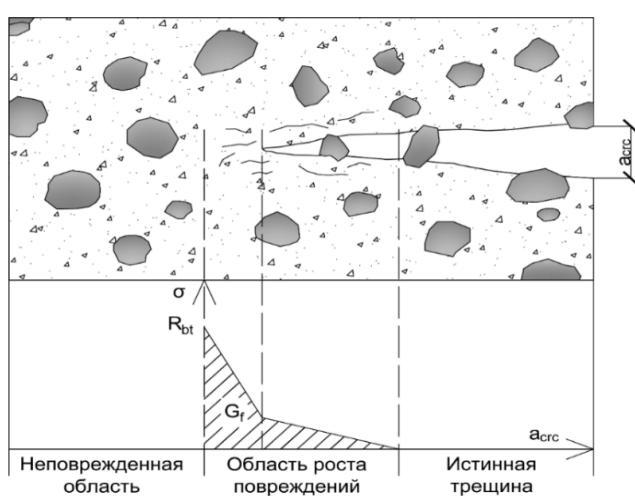


Рисунок 1.21 – Геометрическая интерпретация величины энергии разрушения G_f

Переход от деформаций к ширине раскрытия трещины может быть осуществлен с помощью характерного размера конечного элемента l_{char} , равного размеру конечного элемента в плоскости, перпендикулярной направлению образования трещины (вычисляется индивидуально для каждого конечного элемента). Геометрическая интерпретация параметра l_{char} изображена на рисунке 1.22.

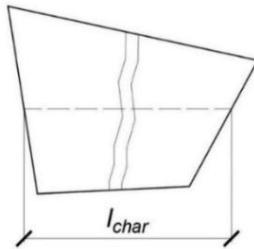


Рисунок 1.22 – Геометрическая интерпретация параметра l_{char}

В нелокальном подходе результат решения в точке интегрирования зависит от результатов в соседних точках. Для этого в модель вводится дополнительный параметр – радиус взаимодействия точки интегрирования. Вычисление величины внутренней переменной, отвечающей за разупрочнение материала, происходит на основании осреднения результатов между точками, попадающими в радиус взаимодействия. Осреднение происходит по определенной функции, в которой влияние точки на результат зависит от ее удаления от центра (чем дальше точка от центра радиуса, тем меньше ее влияние). Иллюстрация нелокального подхода представлена на рисунке 1.23.

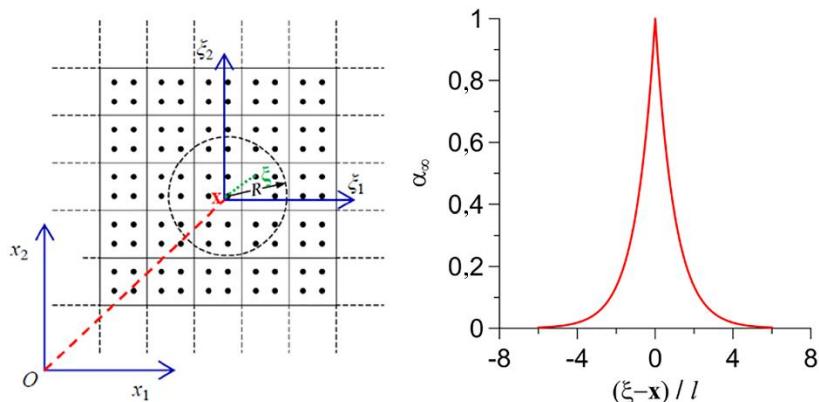


Рисунок 1.23 – Иллюстрация нелокального подхода: радиус влияния точки интегрирования (слева), графическая интерпретация закона влияния результатов при удалении от центра радиуса (справа) (источник – [109])

В нелокальном и энергетическом подходах напряженное состояние зависит от параметра, связанного с размером (характерная длина l_{char} для энергетического подхода и радиус взаимодействия для нелокального).

2. Модель должна обеспечивать математически стабильное и уникальное решение, результат которого не будет иметь патологической зависимости от размера конечно-элементной сетки. Данное требование делает необходимым выполнение следующих условий:

- В предельной поверхности модели не должно быть мнимых упругих областей. На рисунке 1.24, а изображено меридиональное сечение предельной поверхности. Выполняя нагрузку образца при фиксированном гидростатическом обжатии последовательным увеличением девиаторного напряжения, точка будет принимать положения 1-5. Точка 1 находится в упругой зоне ($f < 0$), точка 2 соответствует выходу на поверхность ($f = 0$), в точке 3 происходит пластическая работа материала ($f > 0$). Для того чтобы результат решения численной задачи был уникальным и не зависел от размера шага нагрузления, необходимо, чтобы в точках 4 и 5 выполнялось условие $f > 0$ (рисунок 1.25). Однако для критерия с мнимой упругой зоной в точке 4 снова удовлетворяется условие $f = 0$ с дальнейшим переходом в область упругой работы (точка 5, $f < 0$). Таким образом, для траектории нагрузления существуют две точки (точки 2 и 4), в которых выполняется условие $f = 0$ (см. рисунок 1.24, б).

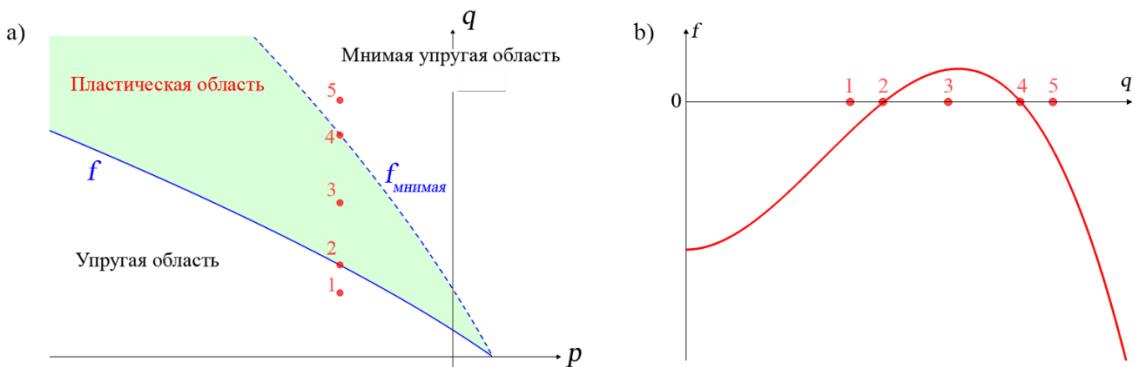


Рисунок 1.24 – Предельная поверхность с мнимой упругой областью: а — траектория нагрузления в меридиональном сечении; б — зависимость значения функции f от девиаторного инварианта q при фиксированном значении p и угла подобия

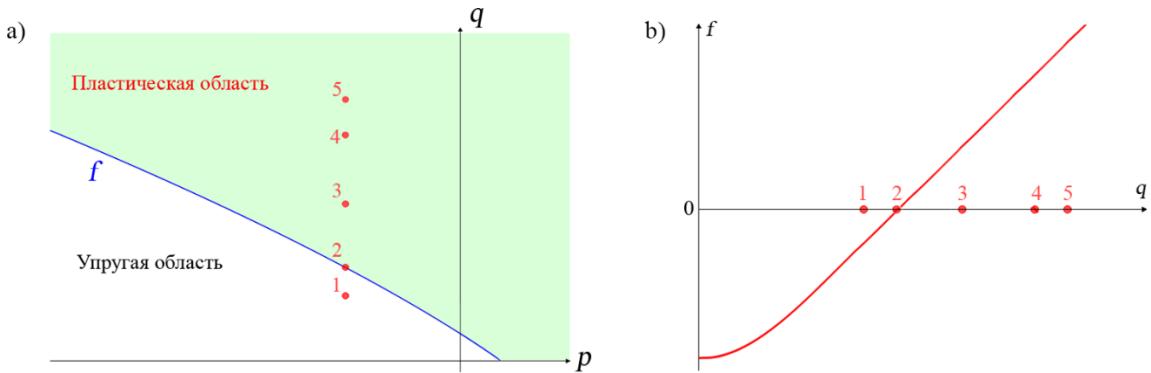


Рисунок 1.25 – Предельная поверхность без мнимой упругой области: а — траектория нагружения в меридиональном сечении; б — зависимость значения функции f от девиаторного инварианта q при фиксированном значении p и угле подобия

Для численных методов теории пластического течения дополнительно необходимо удовлетворение следующих требований:

- Предельная поверхность модели должна удовлетворять условию выпуклости поверхности. Согласно постулату устойчивости Друкера (Drucker's stability postulate) в цикле нагружения–разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации. Из данного постулата следует, что меридиональные и девиаторные сечения предельной поверхности должны быть выпуклыми.
- Предельная поверхность должна обладать минимальным количеством сингулярных зон. Под зоной сингулярности подразумевается область, в которой поверхность недифференцируема. Наличие сингулярных зон требует введения дополнительных условий, являющихся одной из причин проблем со стабильностью решения и точностью результатов.

3. Параметры модели материала должны легко определяться на основании широко распространенных опытов или эмпирических зависимостей. Данное требование оказывает существенное влияние на удобство применения модели.

4. В модели должна присутствовать регуляризация проблемы локализации необратимых деформаций. Процесс разупрочнения бетона при растяжении сопровождается локализацией необратимых деформаций на участках

сравнительно малого размера. Локализация необратимых деформаций, возникающая в оклонулевом объеме в рамках конечно-элементного решения, ведет к патологической чувствительности результатов решения к размеру конечно-элементной сетки, а также возникновению тенденции к ухудшению сходимости с уменьшением размера конечного элемента [56, 112]. С математической точки зрения подобное явление вызвано локальной потерей эллиптичности дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих стационарные процессы [95]. Регуляризация данной проблемы может быть выполнена путем использования энергетического или нелокального подхода. На рисунке 1.26 представлена разница между результатами решения с моделями без регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций и с регуляризацией.

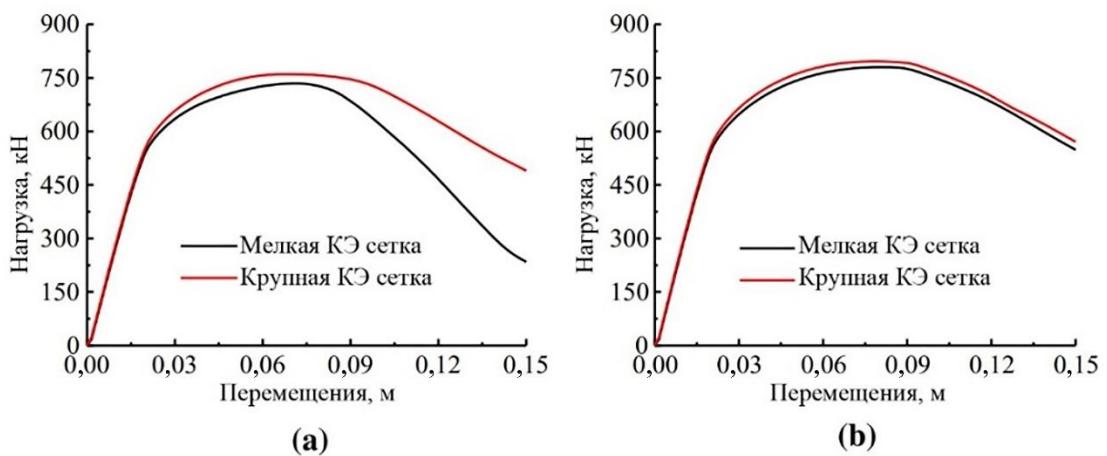


Рисунок 1.26 – Кривые нагрузка-перемещения для модели без регуляризации проблемы локализации (а) и с регуляризацией проблемы (б) (источник – [109])

1.4.2. Модель Г. А. Гениева

Модель Г. А. Гениева [11] использует в основе теорию малых упругопластических деформаций. Модели данной группы устанавливают конечные зависимости между тензорами напряжений и деформаций. Предельная поверхность модели описывается уравнением (1.27) и изображена на рисунке 1.27.

$$3 \cdot J_2 - \left[R_b \cdot R_{bt} + I_1 \cdot (R_b - R_{bt}) \right] \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{3 \cdot T_c^2}{R_b \cdot R_{bt}} \right) \cdot \left(1 + \frac{J_3}{2} \cdot \left(\frac{J_2}{3} \right)^{-3/2} \right) \right) \leq 0, \quad (1.27)$$

где: I_1 – первый инвариант тензора напряжений; J_2, J_3 – второй и третий инварианты девиатора тензора напряжений соответственно; R_b, R_{bt} – пределы прочности при одноосном сжатии и растяжении соответственно; T_c – предел прочности при чистом сдвиге.

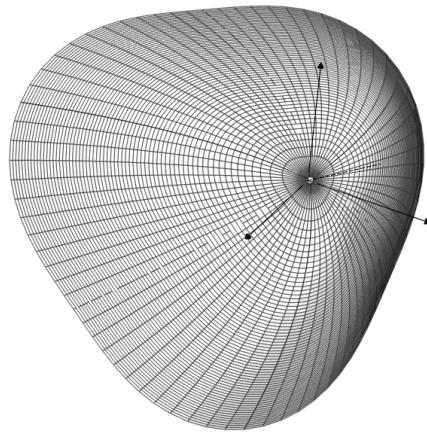


Рисунок 1.27 – Предельная поверхность Г. А. Гениева

На рисунке 1.28 представлено сравнение предельной поверхности с результатами опытных данных, представленных в работах [57-59, 67, 68, 73, 75, 81, 91, 94, 110, 119, 122, 126, 130, 144, 159, 171, 181, 185].

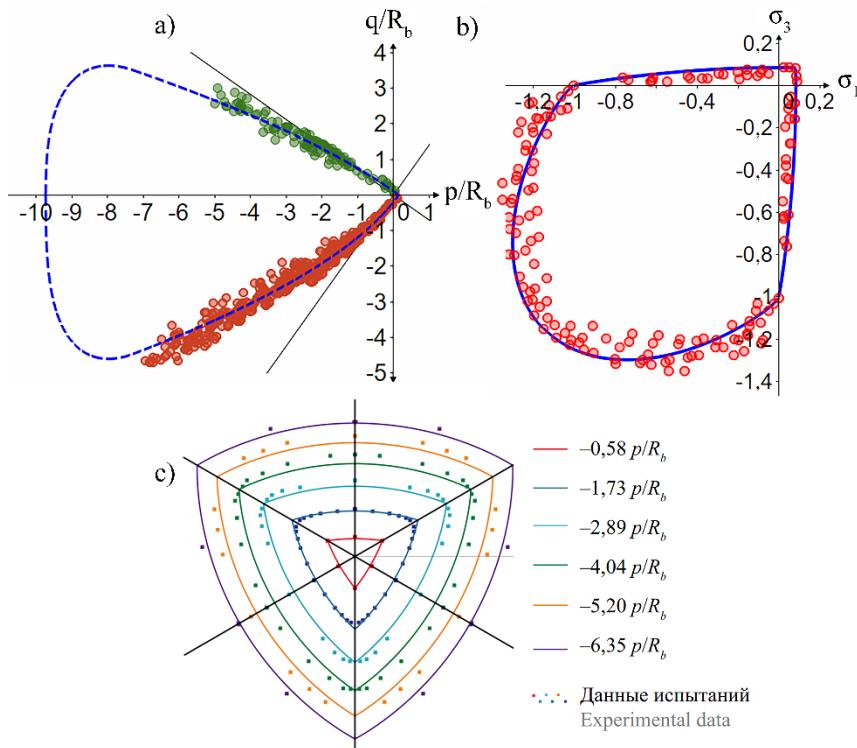


Рисунок 1.28 – Сравнение предельной поверхности Г. А. Гениева с результатами опытов: меридиональное сечение (а), сечение $\sigma_1-\sigma_3$ (б), девиаторные сечения (с)

Для определения уровня соответствия предельной поверхности опытным данным использована следующая оценочная шкала: отлично (поверхность соответствует результатам опытов во всех рассмотренных сечениях); хорошо (присутствует отклонение в одном из сечений – меридиональном, девиаторных или сечении $\sigma_1 - \sigma_3$); удовлетворительно (отклонение в двух сечениях); неудовлетворительно (отклонение во всех трех сечениях).

Можно заключить, что поверхность Г. А. Гениева имеет существенные отклонения от опытных данных во всех рассматриваемых сечениях (см. рисунок 1.28). Согласно работе [27], в модели используются следующие предпосылки:

- 1) Принята нелинейная связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций;
- 2) Связь между вторыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций принята в предположении геометрического подобия кривых деформирования бетона вне зависимости от вида напряженного состояния;
- 3) Величина объемных деформаций, обусловленных дилатацией, одинакова для всех главных осей.

Использование в основе теории малых упругопластических деформаций накладывает существенные ограничения на области применимости модели: модель может быть использована только для случаев монотонного пропорционального нагружения без разгрузки. Деформационная теория Г. А. Гениева получила развитие в работах Е. С. Лейтеса [26], В. М. Круглова [25], В. И. Корсун [22] и др.

1.4.3. Ортотропная модель В. И. Корсун

Ортотропная модель В. И. Корсун [22] является дальнейшим развитием модели Г. А. Гениева [11]. В данной модели для построения связи между напряжениями и деформациями используется ортотропная матрица жесткости. Модули сдвиговых (G) и объемных (K) деформаций бетона вычисляются на основании формул (1.28) и (1.29):

$$G = G_0 \cdot F(\eta_\gamma), \quad (1.28)$$

$$K = K_0 \cdot F(\eta_\gamma), \quad (1.29)$$

где: G_0 , K_0 – начальные величины сдвигового и объемного модулей; $F(\eta_\gamma)$ – функция изменения текущего модуля, зависящая от вида напряженного состояния.

Компоненты тензора деформаций вдоль направлений осей ортотропии в модели определяются соотношением (1.30):

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} - \frac{\mu_o}{E} \cdot (\sigma_j + \sigma_k) + b_i \cdot \theta_{pc} + a_i \cdot \theta_d, \quad (1.30)$$

где: θ_{pc} – объемная деформация уплотнения, обусловленная деформациями сдвига; θ_d – объемная деформация дилатации; b_i , a_i ($i = 1, 2, 3$) – коэффициенты разложения деформаций θ_{pc} и θ_d на составляющие вдоль главных осей, позволяющие учесть направленность развития эффектов сжимаемости и дилатации. Значения коэффициентов b_i , a_i определяются из расчетной модели разрушения структуры бетона в предположении, что развитие микроразрушений происходит по сдвигово-отрывному механизму с образованием "зигзаг-трещин" а также увеличение объема бетона при сжатии обусловлено образованием трещин нормального отрыва (см. рисунок 1.29).

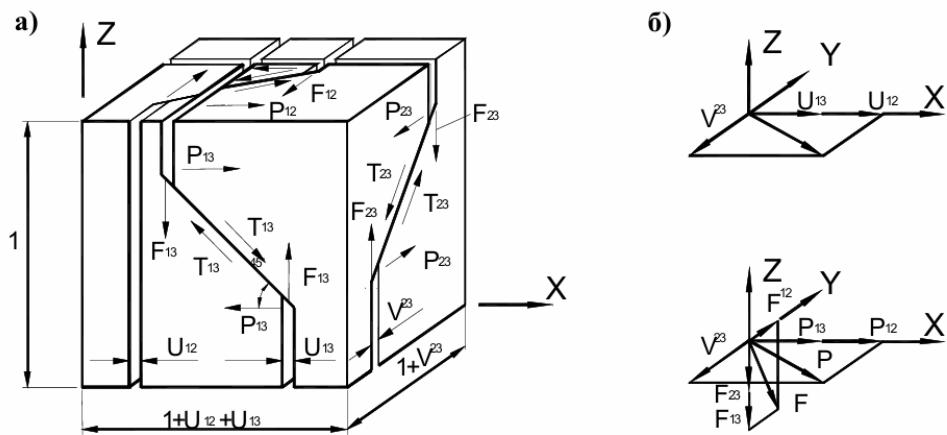


Рисунок 1.29 – К построению сдвигово-отрывной модели разрушения структуры бетона: а) схема деформирования элементарного объема при развитии зигзаг-трещин б) главные векторы деформаций уплотнения и разуплотнения Р структуры бетона и их проекции на координатные оси (из работы [23])

Величина объемной деформации θ_d определяется на основе аналитического выражения, представленного в работе Е. С. Лейтеса [26]. В модели отсутствуют механизмы, позволяющие учесть масштабный эффект и решить проблему локализации необратимых деформаций.

1.4.4. Модель бетона по нормативным документам

Методическое пособие «Автоматизированные методы расчета массивных железобетонных конструкций при объемном напряженном состоянии» [1] разработано авторским коллективом НИИСФ РААСН, членами и советниками РААСН: Н. И. Карпенко, В. И. Травуш, С. Н. Карпенко, В. И. Корсун, А. Н. Петров, В. А. Ерышев, Л. И. Ярин, И. Г. Чепизубов, Г. А. Моисеенко, М. В. Степанов, Н. Г. Семенова. Связь между тензорами напряжений и деформаций в модели, представленной в методическом пособии для кратковременного активного нагружения, может быть описана с помощью формул (1.31) и (1.32):

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_b\}_n = [\mathbf{C}_b]\{\boldsymbol{\sigma}_b\}_n, \quad (1.31)$$

$$[\mathbf{C}_b] = \frac{1}{E_b} \begin{bmatrix} 1/v_{b1} & -\mu_{b12}/v_b^- & -\mu_{b13}/v_b^- & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{b12}/v_b^- & 1/v_{b2} & -\mu_{b32}/v_b^- & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{b13}/v_b^- & -\mu_{b32}/v_b^- & 1/v_{b3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/v_{G12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/v_{G23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/v_{G13} \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

где: v_{be} ($e = 1, 2, 3$) – коэффициенты изменения секущих модулей деформации бетона; v_b^- – доля v_{be} , зависящая от уровня максимальных по модулю напряжений сжатия; v_{Gek} ($ek = 12, 23, 13$) – коэффициенты изменения секущих модулей сдвига; μ_{bek} – коэффициент поперечной деформации; E_b – начальный модуль упругости бетона. Величины коэффициентов, составляющих матрицу податливости C_b зависят от вида напряженного состояния, а также случая нагружения (активное нагружение, разгрузка, повторное нагружение). В случае разгрузки и повторной нагрузки выражение (1.31) записывается в приращениях. Главные относительные деформации в момент исчерпания прочности бетона ε_{be} и предельные напряжения

σ_{be} , зависящие от рассматриваемого вида напряженного состояния, связаны зависимостью (1.33):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{b1} \\ \varepsilon_{b2} \\ \varepsilon_{b3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b} \begin{bmatrix} 1/v_{b1} & -\mu_{b12}/v_b^- & -\mu_{b13}/v_b^- \\ -\mu_{b12}/v_b^- & 1/v_{b2} & -\mu_{b32}/v_b^- \\ -\mu_{b13}/v_b^- & -\mu_{b32}/v_b^- & 1/v_{b3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{b1} \\ \sigma_{b2} \\ \sigma_{b3} \end{Bmatrix}, \quad (1.33)$$

где v_{be} – величина коэффициента v_{be} в точке диаграммы, соответствующей предельным напряжениям. Величины предельных напряжений σ_{be} могут быть выражены из условия прочности (1.34), представленного в работе Н. И. Карпенко [16]:

$$\begin{aligned} a \cdot \sigma_1^2 + b \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1 \cdot (\gamma_b \cdot (f - b) + \gamma_{bt}) \cdot R_b + \sigma_3 \cdot (\gamma_b \cdot b - f \cdot \gamma_{bt}) \cdot R_b - \\ - \sigma_1 \cdot \sigma_3 \cdot (a + b + 1 - f) - \gamma_b \cdot f \cdot \gamma_{bt} \cdot R_b^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где: γ_b – коэффициент, учитывающий влияние вида напряженного состояния на изменение прочности бетона в области трехосного или двухосного (плоского) сжатия; γ_{bt} – коэффициент, учитывающий влияние вида напряженного состояния на изменение прочности бетона в области трехосного и двухосного растяжения; f – параметр, отвечающий за замыкание поверхности в области трехосного сжатия (при $f = 1$ поверхность не замкнутая, при $f > 1$ – замкнутая). Предполагается использовать разомкнутую поверхность для плотных бетонов, а замкнутую – для пористых. На рисунке 1.30 представлено сравнение предельной поверхности, описываемой с помощью условия (1.34), с результатами опытных данных, представленных в работах [57-59, 67, 68, 73, 75, 81, 91, 94, 110, 119, 122, 126, 130, 144, 159, 171, 181, 185].

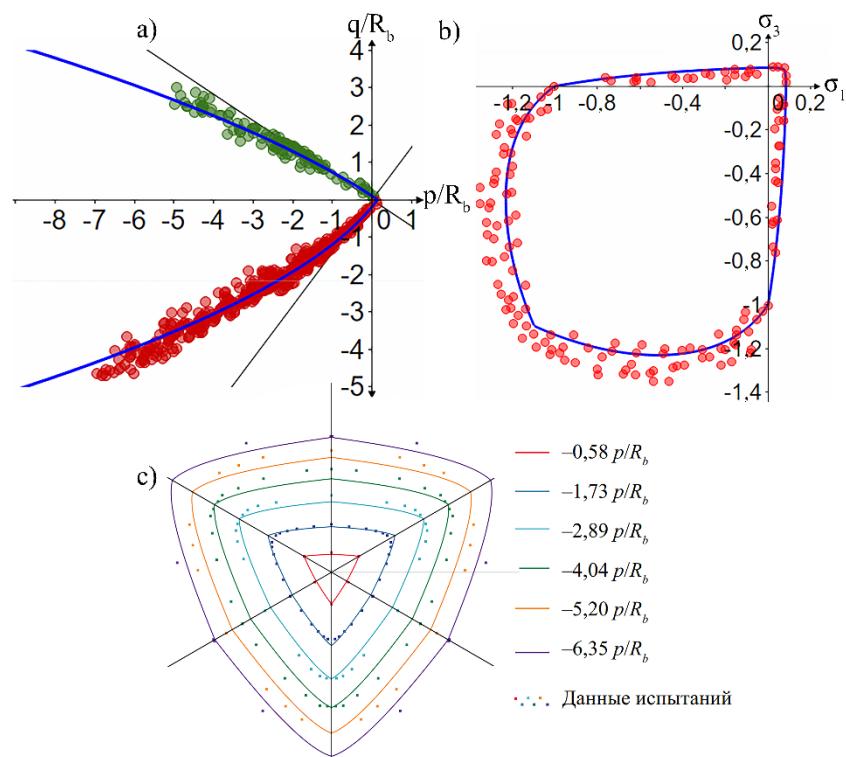


Рисунок 1.30 – Сравнение предельной поверхности Н. И. Карпенко с результатами опытов: меридиональное сечение (а), сечение σ_1 - σ_3 (б), девиаторные сечения (с)

Поверхность соответствует опытным данным во всех рассматриваемых сечениях. На рисунке 1.31 представлены осевые диаграммы напряжение-деформация для разных видов напряженного состояния (одноосное и трехосное неравномерное сжатие). На рисунке 1.32 представлены диаграммы напряжение-деформация в цикле нагрузка-разгрузка-повторное нагружение, полученные для одноосного сжатия.

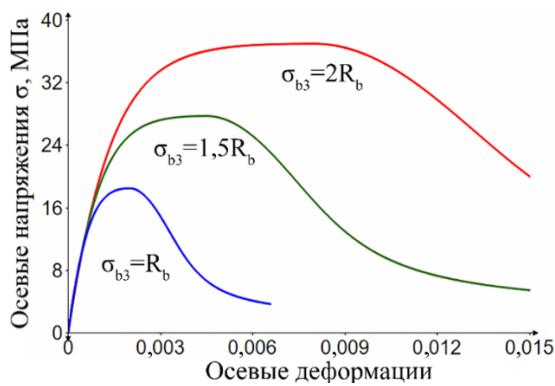


Рисунок 1.31 – Диаграммы напряжения-деформации для разных видов напряженного состояния: а) одноосное сжатие б) трехосное сжатие с предельной прочностью $1,5 R_b$ с) трехосное сжатие с предельной прочностью $2 R_b$

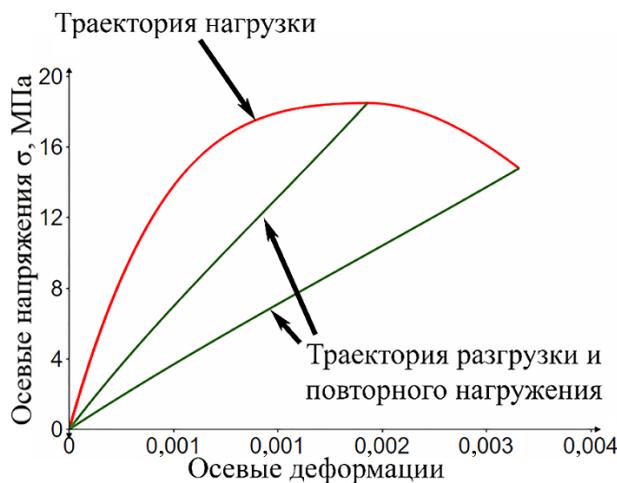


Рисунок 1.32 – Диаграммы напряжение–деформация в цикле нагрузка-разгрузка–повторное нагружение

В модели отсутствуют механизмы, позволяющие учесть масштабный эффект и решить проблему локализации необратимых деформаций. Траектория разгрузки и повторного нагружения в модели не соответствует результатам опытных данных [98].

1.4.5. Модель Concrete

Модель Concrete реализована в программном комплексе (ПК) «ANSYS» [51]. В модели отсутствует разделение деформаций на упругие и пластические, а нелинейная связь между тензорами напряжений и деформаций осуществляется путем модификации матрицы жесткости. Изначально матрица жесткости железобетонного элемента является упругой и работает изотропно. Далее, после достижения предельной поверхности, в зависимости от вида напряженного состояния выполняется модификация матрицы жесткости. В модели используется составная предельная поверхность Willam–Warnke представленная на рисунке 1.33.

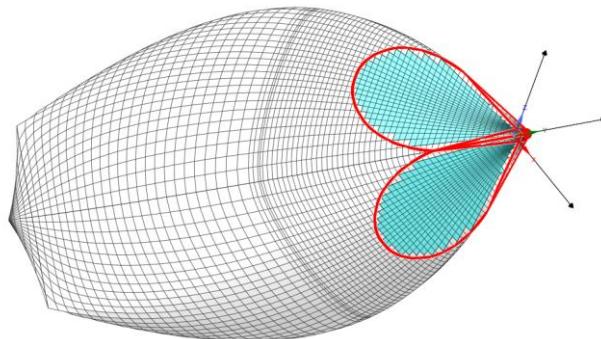


Рисунок 1.33 – Предельная поверхность Willam–Warnke ANSYS

На рисунке 1.33 красным цветом выделены зоны сингулярности, голубым – области, нарушающие постулат Друкера. На рисунке 1.34 представлено сравнение поверхности с результатами опытов [57-59, 67, 68, 73, 75, 81, 91, 94, 110, 119, 122, 126, 130, 144, 159, 171, 181, 185], выполненное в работе [29]:

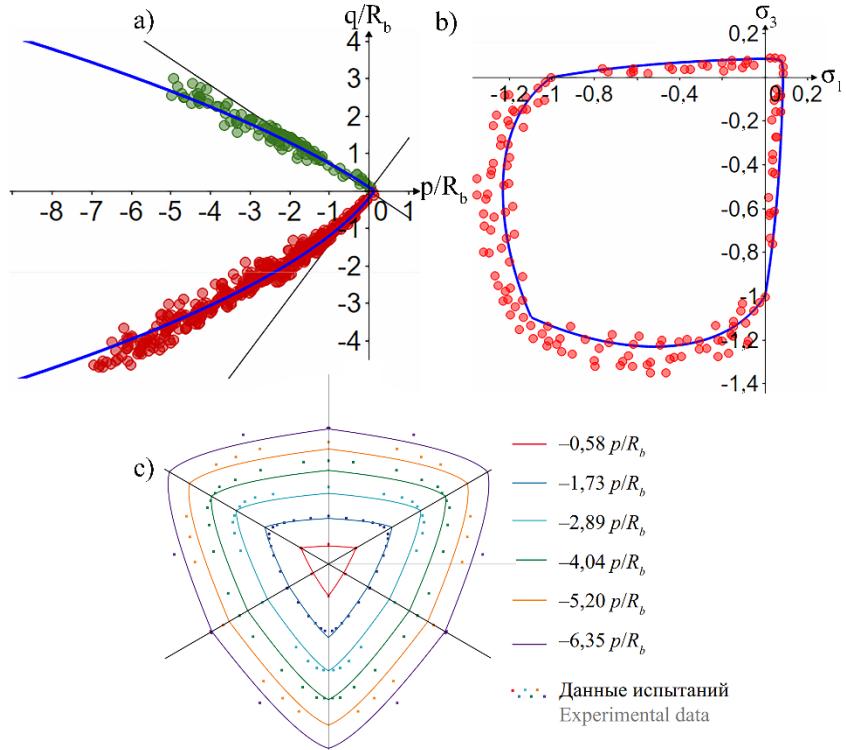


Рисунок 1.34 – Сравнение предельной поверхности Willam–Warnke с результатами опытов: меридиональное сечение (а), сечение σ_1 - σ_3 (б), девиаторные сечения (с)

Составная поверхность соответствует опытным данным в меридиональном и девиаторных сечениях (рисунок 1.34, б) при величинах гидростатических обжатий $p/R_b > -2$ и существенно занижает прочность бетона при величинах $p/R_b \leq -2$. Кроме того, поверхность завышает прочность бетона в сечении σ_1 - σ_3 (рисунок 1.34, б). В ПК «ANSYS» есть возможность задания минимального количества параметров, ограниченного прочностями на одноосное сжатие R_b и одноосное растяжение R_{bt} . Значения остальных параметров выбираются программой автоматически согласно рекомендациям [51]. В этом случае вместо шатра сжатия при больших гидростатических обжатиях используется цилиндрическая поверхность Mises, обозначенная пунктирной красной линией на рисунке 1.34, а.

При достижении предельной поверхности в областях «сжатие–сжатие–растяжение», «сжатие–растяжение–растяжение», «растяжение–растяжение–растяжение» в материале образуется трещина. При образовании трещины матрица жесткости модифицируется: происходит обнуление жесткости в направлении, перпендикулярном трещине [30]. Также допускается развитие касательных напряжений в результате работы сил зацепления. Допускается независимое образование, открытие и закрытие трещин в трех взаимно перпендикулярных направлениях. При закрытии трещины происходит восстановление жесткости материала. Для описания работы трещин используется деформационный подход: величина напряжений растяжения при разупрочнении зависит от тензора деформаций. Данный подход, в отличие от энергетического и нелокального, не позволяет корректно учесть масштабный эффект и решить проблему локализации необратимых деформаций. При достижении предельной поверхности в области «сжатие–сжатие–сжатие» происходит полное разрушение материала с обнулением матрицы жесткости во всех направлениях без возможности восстановления. В модели отсутствует стадия упрочнения при сжатии – сразу после достижения предельной поверхности происходит хрупкое разрушение. Таким образом, модель не позволяет корректно учесть явления контракции и дилатации, связанные с пластическим деформированием бетона.

1.4.6. Menetrey-Willam

Модель Menetrey-Willam (MW) реализована в ПК «ANSYS» [52] и представляет собой модификацию модели P. Menetrey [138]. Модель использует в основе теорию пластического течения. Предельная поверхность модели описывается уравнением (1.35) и представлена на рисунке 1.35. Сопоставление поверхности с результатами опытных данных [57-59, 67, 68, 73, 75, 81, 91, 94, 110, 119, 122, 126, 130, 144, 159, 171, 181, 185], выполненное в работе [29], представлено на рисунке 1.36.

$$f_{MW} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{q}{R_b} \right)^2 + m_0 \cdot \left(\frac{q}{R_b \cdot \sqrt{6}} \cdot r(\theta, e) + \frac{p}{R_b \cdot \sqrt{3}} \right) - 1, \quad (1.35)$$

где $r(\theta, e)$ – эллиптическая функция, контролирующая степень скругления девиаторного сечения.

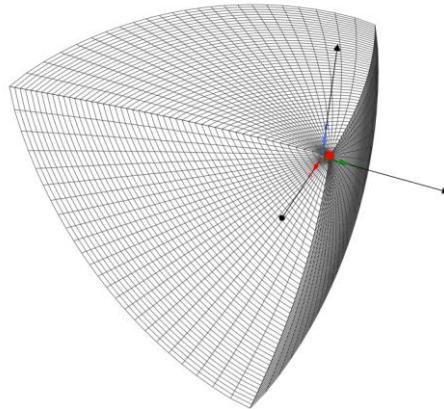


Рисунок 1.35 – Предельная поверхность модели MW

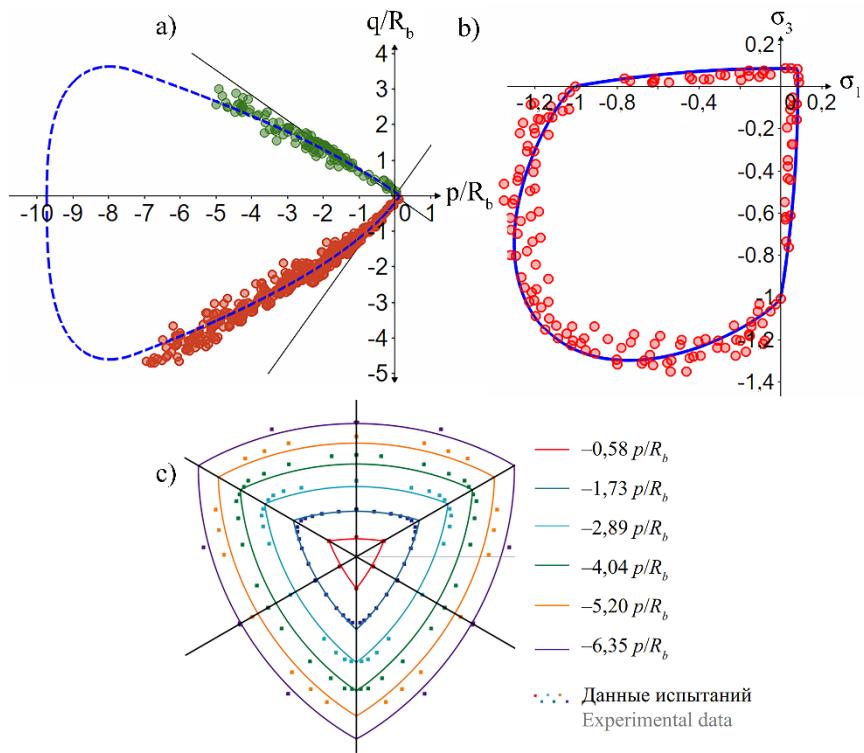


Рисунок 1.36 – Сравнение предельной поверхности MW с результатами опытов:
меридиональное сечение (а), сечение σ_1 - σ_3 (б), девиаторные сечения (с)

Предельная поверхность имеет зону сингулярности в вершине в области трехосного растяжения и соответствует результатам опытов во всех рассматриваемых сечениях. Поверхность пластического потенциала модели MW описывается уравнениями (1.36)-(1.38).

$$Q_{MW} = q^2 + \mathbf{B}_g \cdot q + \mathbf{C}_g \cdot p, \quad (1.36)$$

$$B_g = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} \cdot R_b \cdot \tan \Psi_c - R_{bt})}{\sqrt{3} \cdot (1/\sqrt{2} - \tan \Psi_c)}, \quad (1.37)$$

$$C_g = \frac{\mathbf{B}_g}{\sqrt{2}} + \frac{2 \cdot \mathbf{R}_{bt}}{\sqrt{3}}, \quad (1.38)$$

где Ψ_c – угол дилатации при одноосном сжатии.

Поверхность ПП модели MW представляет собой криволинейную поверхность, построение которой происходит таким образом, чтобы угол между вертикалью и нормалью к поверхности ПП Ψ принимал определенные значения в характерных точках. Данный угол характеризует соотношение между компонентами тензора пластических деформаций. Значение угла Ψ определяется на основании формулы (1.39).

$$\Psi = \text{atan} \left(\frac{\partial g / \partial p}{\partial g / \partial q} \right), \text{рад}, \quad (1.39)$$

где g – уравнение поверхности пластического потенциала.

Условие $\Psi=0^\circ$ соответствует девиаторному нагружению, для которого шаровой тензор пластических деформаций имеет нулевую норму (длину). Условие $\Psi=90^\circ$ соответствует случаю, когда девиатор тензора пластических деформаций имеет нулевую норму (длину). В модели используются следующие предпосылки для построения поверхности ПП:

1. При одноосном растяжении угол Ψ совпадает с траекторией нагружения и равен $1/\sqrt{2}$;
2. При одноосном сжатии угол Ψ равен углу дилатации Ψ_c , представляющему собой параметр модели;
3. При стремлении величины гидростатического инварианта p к минус бесконечности величина угла Ψ стремиться к 0° .

В модели реализованы упрочнение и разупрочнение. Механизм упрочнения и разупрочнения в модели реализован с помощью изменения размера предельной поверхности в зависимости от величины пластических деформаций.

Использование подобного подхода требует введения параметра остаточных напряжений (поверхность не может быть уменьшена до нулевого размера), что может приводить к завышению реальной несущей способности. Для регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций и учета масштабного энергетического эффекта используется энергетический подход. Однако переход между деформациями и напряжениями осуществляется не с помощью величины размера элемента, перпендикулярного направлению трещины, а с помощью величины объема, принадлежащего точке интегрирования. Подобный подход делает регуляризацию неэффективной для КЭ-моделей с элементами различной формы.

1.4.7. Concrete Damage–Plasticity Model 2 (CDPM2)

Модель Concrete Damage-Plasticity Model 2 [100], реализованная в конечно-элементном комплексе OOFEM, в качестве основы использует комбинацию теории пластического течения и механики разрушения. Предельная поверхность модели представляет собой модификацию предельной поверхности Menetrey-Willam и описывается уравнением (1.40).

$$f_G = \left((1 - c_h) \cdot \left(\frac{q}{R_b \cdot \sqrt{6}} + \frac{\sigma_0}{R_b} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{q}{R_b} \right)^2 + m_0 \cdot c_h^2 \cdot \left(\frac{q \cdot r(\theta, e)}{R_b \cdot \sqrt{6}} + \frac{\sigma_0}{R_b} \right) - c_h^2, \quad (1.40)$$

где: σ_0 – средние напряжения; c_h – параметр упрочнения поверхности, величина которого меняется от начального значения (соответствует нижней границе микротрецинообразования) до 1. В процессе упрочнения ($c_h < 1$) предельная поверхность является замкнутой в области трехосного сжатия для моделирования эффекта контракции. При достижении величины $c_h = 1$ поверхность, описываемая уравнением (2.4), превращается в поверхность Menetrey-Willam. Таким образом, поверхность совпадает с опытными данными во всех областях и имеет сингулярность в вершине в области трехосного растяжения, а также в вершине в области трехосного сжатия при $c_h < 1$. Упрочнение модели зависит от вида напряженного состояния (угла подобия θ и величины гидростатического инварианта p).

Поверхность пластического потенциала модели описывается уравнением (1.41), полученного путем модификации уравнения (1.40).

$$G_G = \left((1 - c_h) \cdot \left(\frac{q}{R_b \cdot \sqrt{6}} + \frac{\sigma_0}{R_b} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{q}{R_b} \right)^2 + c_h^2 \cdot \left(\frac{m_0 \cdot q}{R_b \cdot \sqrt{6}} + \frac{m_g(D_f) \cdot \sigma_0}{R_b} \right). \quad (1.41)$$

Поверхность пластического потенциала криволинейная и строится исходя тех же предпосылок, что и поверхность пластического потенциала в модели MW. Для регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций и учета масштабного эффекта в модели используется энергетический подход.

1.5. Выводы по главе

На основании проведенного анализа нормативных документов, теоретических и экспериментальных работ, а также ряда моделей нелинейного деформирования бетона можно сделать следующие выводы:

1. Продавливание представляет собой один из видов разрушения плитных железобетонных конструкций. Основными факторами, влияющими на несущую способность плит при продавливании, являются: масштабный эффект, величина периметра опоры, отнесенная к рабочей высоте конструкции, пролет среза плиты, процент продольного армирования растянутой зоны плиты, тип поперечного армирования. В методике расчета железобетонных плит на продавливание, представленной в действующем нормативном документе СП 63.13330.2018 [37], отсутствует учет данных факторов, что негативно влияет на точность расчетной методики.

2. Более совершенная методика расчета железобетонных плит на продавливание может быть получена с помощью регрессионного анализа на основании результатов лабораторных испытаний. Основная проблема заключается в том, что большая часть лабораторных испытаний выполнялась на плитах сравнительно малой рабочей высоты. Это связано с высокими трудовыми и финансовыми затратами при испытании плит с большой рабочей высотой. Для решения данной проблемы результаты лабораторных испытаний могут быть

дополнены результатами численных испытаний, выполненных с помощью метода конечных элементов с использованием нелинейных моделей материала.

3. Значительная часть моделей бетона содержит проблемы, влияющие на точность результатов моделирования и стабильность конечно-элементного решения. К основным проблемам можно отнести: значительное отклонение формы предельной поверхности от результатов опытных данных, отсутствие учета эффектов дилатации и контракции, отсутствие механизмов, позволяющих учесть влияние масштабного энергетического эффекта и выполнить регуляризацию проблемы локализации необратимых деформаций.

По результатам проведенного анализа формулируется цель диссертационного исследования: разработать модель пластичного деформирования и разрушения бетона с учетом повреждаемости, а также разработать методику расчета плит на продавливание.

Для достижения поставленной цели требуется решить ряд задач:

1. Разработать нелинейную модель бетона, отражающую основные особенности напряженно-деформированного состояния материала в рамках кратковременного статического нагружения: эффекты контракции и дилатации, зависимость деформаций, соответствующих пределу прочности бетона от вида напряженного состояния, учет масштабного эффекта.

2. Реализовать модель в ПК «ANSYS» в качестве пользовательской модели материала. Выполнить процедуру валидации модели путем сравнения результатов лабораторных и численных испытаний образцов и конструкций при различных видах НДС.

3. Выполнить численные исследования с использованием разработанной модели бетона с целью изучения влияния различных конструктивных параметров на механизм разрушения плоских железобетонных плит от продавливания.

4. Разработать методику расчета плит на продавливание, отражающую влияние основных конструктивных и механических параметров и обладающую хорошим соответствием результатам лабораторных и численных испытаний.

2. ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ БЕТОНА

В качестве основы в модели используется комбинация теории пластического течения и механики разрушения. Часть модели, использующая в качестве основы теорию пластического течения, не зависит от механики разрушения и включает в себя предельную поверхность, поверхность пластического потенциала и правила эволюции предельной поверхности.

2.1. Основные положения теории пластического течения и описание механизма накопления повреждений

В основе теории пластического течения лежат следующие положения:

1. Приращение тензора деформаций делится на упругую и пластическую части (2.1).

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}, \quad (2.1)$$

где: $d\boldsymbol{\varepsilon}_{el}$ – приращение тензора упругих деформаций; $d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$ – приращение тензора пластических деформаций. Тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ может быть выражен на основании обобщенного закона Гука (Hooke's law) (2.2).

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}) \cdot \mathbf{D}_{el}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{D}_e – упругая матрица жесткости.

2. Область упругой работы материала ограничена предельной поверхностью $f(R, k, \boldsymbol{\sigma})$. Предельная поверхность строится в пространстве главных напряжений Хейга-Вестергаарда (Haigh-Westergaard stress space) и выражается в виде условия (критерия прочности) (2.3).

$$f(R, k, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad (2.3)$$

где: k – внутренние переменные, характеризующие состояние материала в текущий момент нагружения; R – прочностные параметры материала.

3. Приращение пластических деформаций описывается с помощью закона пластического течения (2.4).

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} = d\lambda \cdot \frac{\partial g(R, k, \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.4)$$

где: $g(R, k, \boldsymbol{\sigma})$ – уравнение поверхности пластического потенциала; $d\lambda$ – пластический множитель (безразмерная скалярная величина, определяющая длину приращения тензора пластических деформаций). Уравнение пластического потенциала определяет соотношение между компонентами тензора пластических деформаций (направление тензора). Если уравнение пластического потенциала совпадает с уравнением предельной поверхности, то закон пластического течения называется ассоциированным, в противном случае – неассоциированным.

4. Изменение внутренних переменных описывается с помощью следующего уравнения (2.5).

$$dk = d\lambda \cdot h, \quad (2.5)$$

где h – оператор, определяющий скорость изменения внутренней переменной в зависимости от приращения пластического множителя.

5. Приращение пластического множителя должно удовлетворять условиям Каруша-Куна-Такера (Karush-Kuhn-Tucker conditions) (2.6)-(2.9).

$$d\lambda \cdot f(R, k, \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (2.6)$$

$$d\lambda \cdot df(R, k, \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (2.7)$$

$$d\lambda \geq 0, \quad (2.8)$$

$$f(R, k, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0. \quad (2.9)$$

На основании данных условий можно выделить четыре характерных случая нагружения:

- $f(R, k, \boldsymbol{\sigma}) < 0, d\lambda = 0$ – упругое нагружение;
- $f(R, k, \boldsymbol{\sigma}) = 0, df(R, k, \boldsymbol{\sigma}) < 0, d\lambda = 0$ – упругая разгрузка;
- $f(R, k, \boldsymbol{\sigma}) = 0, df(R, k, \boldsymbol{\sigma}) = 0, d\lambda = 0$ – нейтральное нагружение;
- $f(R, k, \boldsymbol{\sigma}) = 0, df(R, k, \boldsymbol{\sigma}) = 0, d\lambda > 0$ – пластическое нагружение.

Задача модели материала в точке интегрирования заключается в получении тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на основе тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для решения данной задачи используется схема «упругий предиктор – пластический корректор». В рамках данной схемы вначале делается предположение об упругой работе материала.

Затем данное предположение проверяется с помощью условия (2.3). Если условие удовлетворяется, то материал работает упруго. В ином случае происходит *пластическое нагружение*, и величина тензора напряжений должна быть скорректирована таким образом, чтобы условие (2.3) удовлетворялось. Для этого необходимо найти величины тензора пластических деформаций $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}$ и внутренних переменных k , при которых условие (2.3) будет удовлетворяться. Данные величины могут быть найдены с помощью условия согласованности Друкера (Drucker's consistency condition). Данное условие может быть получено путем разложения условия (2.3) в ряд Тейлора с линеаризацией путем отсечения всех членов выше первого порядка, используя один из следующих итеративных алгоритмов [77]:

1. Метод секущих плоскостей (Cutting Plane Algorithm – CPA). В данном алгоритме используется следующий вид условия согласованности (2.10) (аргументы функций опущены для сокращения).

$$f^n = f_{\text{tr}}^n + \frac{\partial f_{\text{tr}}^n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f_{\text{tr}}^n}{\partial k} \cdot k = f_{\text{tr}}^n - d\lambda \cdot \frac{\partial f_{\text{tr}}^n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}_{\text{el}} : \frac{\partial g_{\text{tr}}^n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + d\lambda \cdot \frac{\partial f_{\text{tr}}^n}{\partial k} \cdot h = 0. \quad (2.10)$$

Величина пластического множителя может быть выражена из (2.10) следующим образом (2.11).

$$d\lambda = \frac{f_{\text{tr}}}{\frac{\partial f_{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}_{\text{el}} : \frac{\partial g_{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial f_{\text{tr}}}{\partial k} \cdot h}. \quad (2.11)$$

Графически данный метод представляет собой итеративный возврат пробной точки на предельную поверхность, где в качестве исходного состояния каждой новой итерации используется результат предыдущей. Графическое представление алгоритма CPA показано на рисунке 2.1.

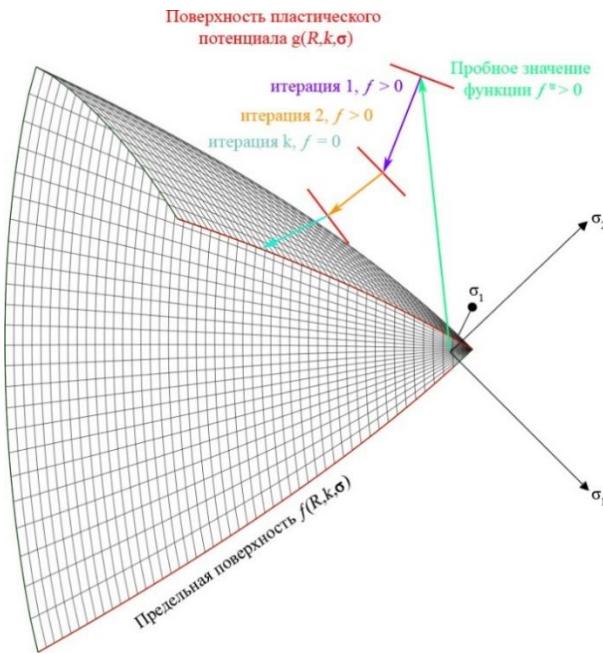


Рисунок 2.1 – Графическое представление алгоритма CPA

2. Метод проекции ближайшей точки (Closest Point Projection Method – CPPM). В методе CPPM используется следующий алгоритм для получения величины пластического множителя. Вначале, с помощью формул (2.2) и (2.3) вычисляется пробное значение тензора напряжений σ_{tr} и пробное значение функции (точка А на рисунке 2.2). Далее выполняется пробный возврат с помощью формулы (2.11) на основании алгоритма CPA (точка В₁). Затем, используя в качестве начального значения результаты пробного возврата (тензор напряжений σ_{B1} , величина пластического множителя $d\lambda_{B1}$, функция f_{B1} , первая и вторая производные поверхности пластического потенциала по тензору напряжений в точке В₁), происходит итеративный возврат на поверхность с помощью формул (2.12)-(2.15) (точки В₂...В_m).

$$\delta d\lambda_{Bm} = \frac{f_{Bm} - \frac{\partial f_{Bm}}{\partial \sigma} \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{Bm}}{\frac{\partial f_{Bm}}{\partial \sigma_{Bm}} : \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{el} : \frac{\partial g_{Bm}}{\partial \sigma_{Bm}} - \frac{\partial f_{Bm}}{\partial q_{Bm}} \cdot h_{Bm}}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + d\lambda_{Bm} \cdot \mathbf{D}_{el} : \frac{\partial \partial g_{Bm}}{\partial \partial \sigma_{Bm}}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{r}_{Bm} = \boldsymbol{\sigma}_{Bm} - \left(\boldsymbol{\sigma}^{tr} - d\lambda_{Bm} \cdot \mathbf{D}_{el} : \frac{\partial g_{Bm}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{Bm}} \right), \quad (2.14)$$

$$d\lambda_{Bm} = d\lambda_{Bm-1} + \delta d\lambda_{Bm}, \quad (2.15)$$

где: \mathbf{r} – матрица невязок; m – порядковый номер итерации возврата.

Итерации выполняются до тех пор, пока норма матрицы невязок не станет меньше порогового значения сходимости (например, 10^{-5}). Графическая интерпретация алгоритма CPPM представлена на рисунке 2.2.

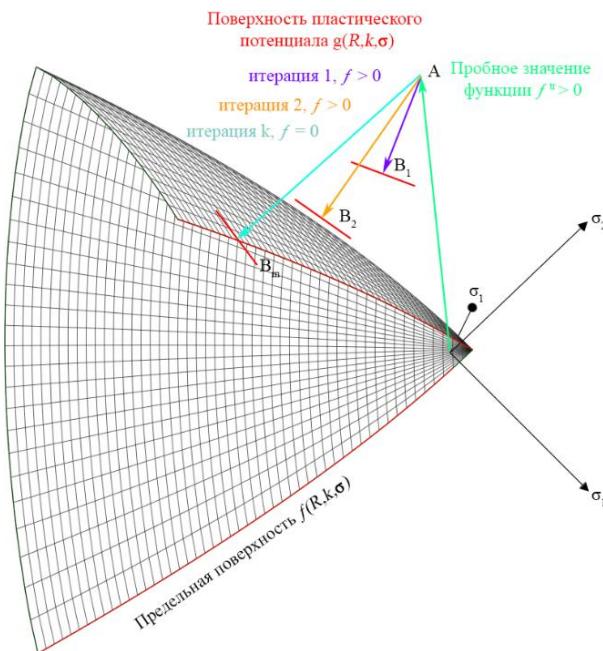


Рисунок 2.2 – Графическое представление алгоритма CPPM

Алгоритм CPPM имеет квадратичную сходимость и требует меньше итераций, чем алгоритм CPA, но менее стабилен с точки зрения сходимости.

Механизм накопления повреждений позволяет выполнить моделирование разупрочнения материала путем корректировки тензора эффективных напряжений $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ (тензор напряжений без учета поврежденности материала), полученного с помощью теории пластического течения или теории упругости (2.16).

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (1 - W(q)), \quad (2.16)$$

где: $W(q)$ – коэффициент поврежденности материала, принимающий значения от 0 (неповрежденный материал) до 1 (полностью поврежденный материал); $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор номинальных напряжений (с учетом поврежденности материала).

2.2. Предельная поверхность модели

В качестве предельной поверхности модели может быть использована поверхность Menetrey-Willam [139], модифицированная путем добавления шатра сжатия. Поверхность имеет единственную зону сингулярности, находящуюся в вершине поверхности ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3>0$). Девиаторные сечения поверхности, соответствующие разным степеням гидростатического обжатия, не обладают аффинным подобием. Предельная поверхность изображена на рисунке 2.3 [5].

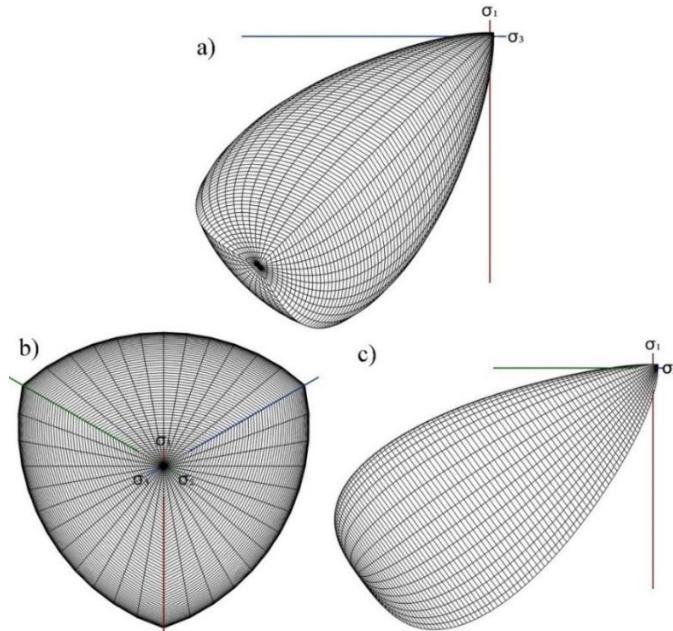


Рисунок 2.3 – Предельная поверхность модели: а) вид на плоскость $\sigma_1-\sigma_3$; б) вид на девиаторную плоскость; в) вид на плоскость $\sigma_1-\sigma_2=\sigma_3$

Поверхность модели определена в цилиндрических координатах Хейга-Вестергаарда: гидростатический инвариант p (2.17); девиаторный инвариант q (2.18); угол подобия θ (2.19), находящийся в диапазоне от 0 до 60 градусов.

$$p = I_1 / \sqrt{3}, \quad (2.17)$$

$$q = \sqrt{2 \cdot J_2}, \quad (2.18)$$

$$\cos(3 \cdot \theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Модифицированное уравнение предельной поверхности является квадратичной версией уравнения Menetrey-Willam и представлено формулой (2.20). Квадратичная функция (2.20) имеет «отражение» в области трехосного

растяжения (см. рисунок 2.4), что создает ошибочную мнимую упругую область. Решение проблемы может быть получено путем использования уравнения (2.21) для точек с $p > 0$.

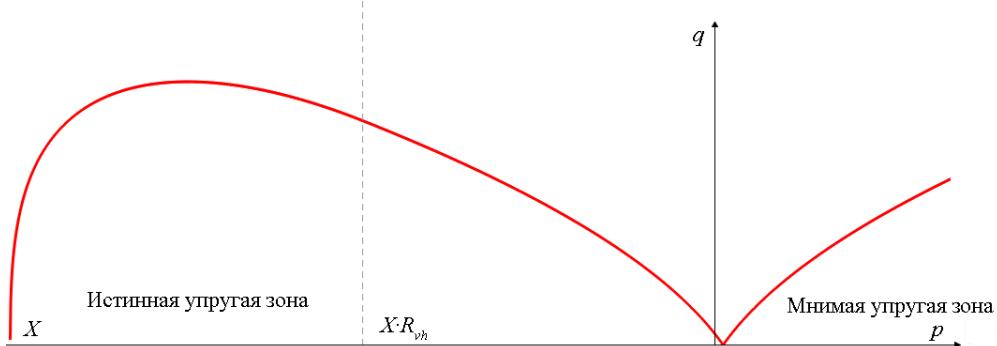


Рисунок 2.4 – Меридианное сечение функции (2.20)

$$f = \left(\left(\frac{q}{R_b} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \frac{c_h \cdot m \cdot q \cdot r(e, \theta)}{\sqrt{6} \cdot R_b} \right)^2 - f_{comp}(p) \cdot \left(c_h - c_h \cdot m \cdot \frac{p}{\sqrt{3} \cdot R_b} \right)^2, \quad (2.20)$$

$$f = \left(\frac{q}{R_b} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + c_h \cdot m \cdot \left(\frac{q}{\sqrt{6} \cdot R_b} \cdot r(e, \theta) + \frac{p}{\sqrt{3} \cdot R_b} \right) - c_h, \quad (2.21)$$

где R_b , R_{bt} , R_{2b} – пределы прочности бетона на одноосное сжатие, одноосное растяжение и двухосное равномерное сжатие соответственно. Значение R_{2b} может быть найдено по формуле (2.22) согласно документу [93]. c_h – параметр девиаторной эволюции поверхности нагружения; X – координата пересечения шатра сжатия с гидростатической осью, МПа; R_{vh} – безразмерный множитель к X , определяющий координату начала шатра сжатия по гидростатической оси. Значение R_{vh} может быть найдено по эмпирической формуле (2.23) согласно [111]; $f_{comp}(p)$ – понижающая функция, описывающая шатель сжатия поверхности (2.24).

$$R_{2b} = \left(1,2 - \frac{R_b [\text{МПа}]}{1000} \right) \cdot R_b, \quad (2.22)$$

$$R_{vh} = \left(4,46 \cdot \exp \left(- \frac{R_b [\text{МПа}]}{11,52} \right) + 1,95 \right)^{-1}, \quad (2.23)$$

$$f_{comp}(p) = 1 - \left(\frac{p - X \cdot R_{vh}}{X \cdot (1 - R_{vh})} \right)^2 \cdot H(X - p), \quad (2.24)$$

где: $H(X-p)$ – функция Хевисайда (Heaviside function); $r(e, \theta)$ – эллиптическая функция, контролирующая степень скругления девиаторного сечения которая описывается с помощью формул (2.25)-(2.28) согласно [138]. Использование понижающей функции $f_{comp}(p)$ позволяет создать плавный переход из регулярной функции в шатер сжатия без образования сингулярности.

$$r(e, \theta) = \frac{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\theta)^2 + 2 \cdot e - 1}{2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\theta) + (2 \cdot e - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\theta)^2 + 5 \cdot e^2 - 4 \cdot e}}, \quad (2.25)$$

$$e = \frac{1 + \xi}{2 - \xi}, \quad (2.26)$$

$$\xi = \frac{R_{bt}}{R_{2b}} \cdot \frac{R_{2b}^2 - R_b^2}{R_b^2 - R_{bt}^2}, \quad (2.27)$$

$$m = 3 \cdot \frac{R_b^2 - R_{bt}^2}{R_b \cdot R_{bt}} \cdot \frac{e}{e + 1}. \quad (2.28)$$

Сравнение предельной поверхности с результатами опытных данных представлено на рисунке 2.5.

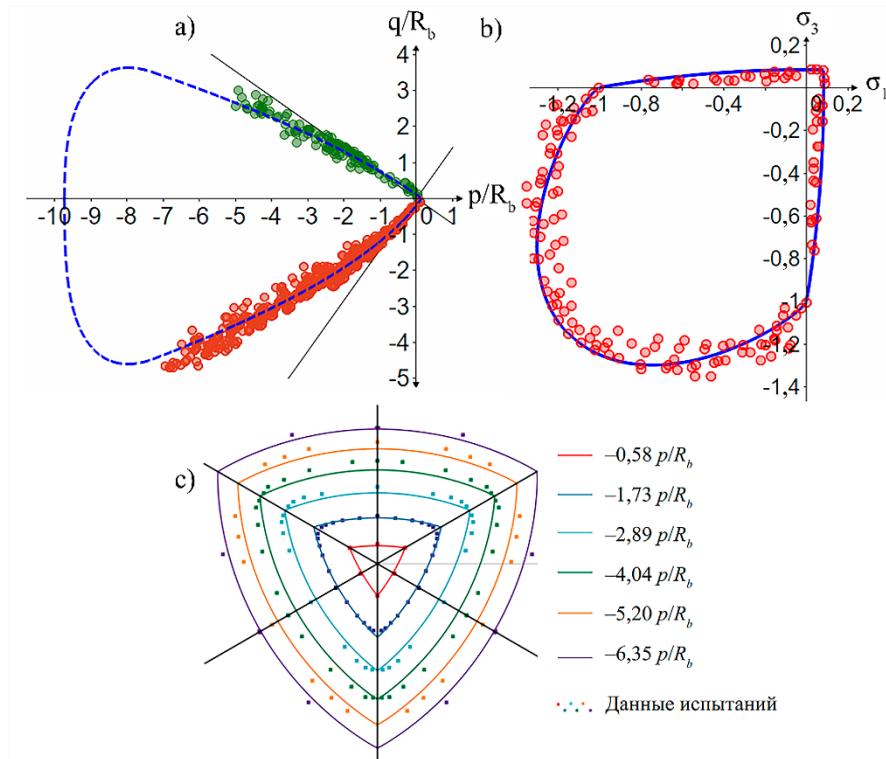


Рисунок 2.5 – Сравнение предельной поверхности с результатами опытов:
меридиональное сечение (а), сечение $\sigma_1-\sigma_3$ (б), девиаторные сечения (с)

Можно заключить, что поверхность соответствует результатам опытов во всех рассматриваемых сечениях. Поверхность соответствует постулату Друкера во всех областях и не имеет мнимых упругих зон.

2.3. Поверхность пластического потенциала

Поверхность пластического потенциала модели является комбинированной и состоит из трех поверхностей: g_{shear} , g_{tens} , g_{comp} (см. рисунок 2.6) [5].

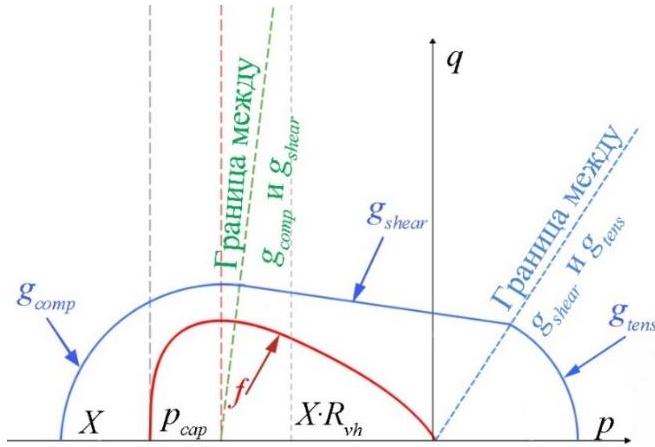


Рисунок 2.6 – Комбинированная поверхность пластического потенциала

Первая поверхность g_{shear} описывается уравнением (2.29) и позволяет моделировать эффект дилатации:

$$g_{shear} = \frac{r(e, \theta)}{R_b} \cdot \left(q \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \frac{q}{\sqrt{6}} \cdot m + m_g(p), \quad (2.29)$$

где $m_g(p)$ – корректирующая функция. Поскольку при вычислении пластического множителя используется не само уравнение пластического потенциала, а его частные производные по инвариантам тензора напряжений, то удобнее вместо функции $m_g(p)$ представить алгоритм вычисления производной функции по гидростатическому инварианту $\partial m_g(p)/\partial p$, значение которой равно производной $\partial g_{shear}(p)/\partial p$. Значение $\partial m_g(p)/\partial p$ может быть вычислено исходя из следующих предпосылок [6]:

1. При одноосном растяжении нормаль к поверхности g_{shear} совпадает с траекторией нагружения, что соответствует условию $\Psi=1/\sqrt{2}$ радиан [170].
2. При одноосном сжатии угол Ψ равен углу дилатации Ψ_b , значение которого может быть вычислено согласно формулам (2.30), (2.31). Формула (2.30)

построена на основании допущения о том, что при достижении поверхности с $c_h = 1$ в области одноосного сжатия полные объемные деформации равны нулю.

$$\Psi_b = \frac{R_b \cdot (1 - 2 \cdot v) \cdot \sqrt{2}}{|2 \cdot R_b \cdot (v + 1) - 3 \cdot \epsilon_0 \cdot E_b|}, \text{рад,} \quad (2.30)$$

$$\epsilon_0 = \frac{(18 + R_b[\text{МПа}]) \cdot (62 \cdot R_b[\text{МПа}] + 0.675 \cdot R_b^2[\text{МПа}] + 22)}{(53000 - 62 \cdot R_b[\text{МПа}]) \cdot (7 \cdot R_b[\text{МПа}] + R_b^2[\text{МПа}] + 22)}, \text{м/м,} \quad (2.31)$$

где: E_b , v – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно; ϵ_0 – абсолютное значение полных осевых относительных деформаций, соответствующих пределу прочности при одноосном сжатии R_b , вычисляемых на основании формулы Н. И. Карпенко [16]. Значение производной функции $m_g(p)$ по гидростатическому инварианту p может быть вычислено с помощью формул (2.32)-(2.35).

$$\partial m_g(p) / \partial p = A_g \cdot \exp(C_g(p)^2 \cdot B_g), \quad (2.32)$$

$$A_g = \frac{\sqrt{3} \cdot (R_b \cdot m + 6 \cdot R_{bt} \cdot r(e, \theta))}{6 \cdot R_b}, \quad (2.33)$$

$$B_g = 3 \cdot \left(\frac{R_b}{R_{bt} + R_b} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{\Psi_b \cdot \sqrt{2} \cdot R_b \cdot (m + 6)}{R_b \cdot m + 6 \cdot R_{bt}} \right), \quad (2.34)$$

$$C_g(p) = (p - R_{bt} / \sqrt{3}) / R_b. \quad (2.35)$$

Функция $C_g(p)$ построена таким образом, чтобы принимать значение равное 0 в области одноосного растяжения. В этом случае производная $\partial m_g(p) / \partial p$ равна параметру A_g . Значение параметра B_g подбиралось таким образом, чтобы в области одноосного сжатия выполнялось условие $\Psi = \Psi_b$.

Для получения радиального возврата на предельную поверхность необходимо приравнять к нулю производную поверхности g_{shear} по углу подобия θ , используемую в уравнении для вычисления пластического множителя. В этом случае поверхность (2.29) превращается в серию поверхностей, каждая из которых соответствует определенному углу подобия.

Вторая поверхность g_{tens} представляет собой сферу с центром, расположенным в вершине предельной поверхности в области трехосного растяжения. Данная поверхность используется для обработки зоны сингулярности и описывается уравнением (2.36).

$$g_{tens} = q^2 + \left(p - R_b \cdot \sqrt{3} / m \right). \quad (2.36)$$

Третья поверхность g_{comp} представляет собой сферу и используется для возвращения точки на шатер сжатия. Центр сферы находится на гидростатической оси, при этом p – координата центра p_{cap} представляет собой координату экстремума функции предельной поверхности (место перегиба функции). Выразив из уравнения (2.20) координату q , находим производную полученного выражения по координате p . Значение p_{cap} может быть найдено, приравнивая числитель полученного выражения к нулю (единственное условие, при котором выражение может быть равно нулю). Результатом преобразований является квадратное уравнение, один из корней которого – искомая величина p_{cap} . Алгоритм получения величины p_{cap} может быть сведен к уравнениям (2.37)-(2.40).

$$A = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot c_h \cdot m, \quad (2.37)$$

$$B = -6 \cdot c_h \cdot \left(\sqrt{3} \cdot X \cdot R_{vh} \cdot m + R_b \right), \quad (2.38)$$

$$C = 2\sqrt{3} \cdot c_h \cdot (2 \cdot R_{vh} - 1) \cdot m \cdot X^2 + 6 \cdot R_b \cdot c_h \cdot X \cdot R_{vh}, \quad (2.39)$$

$$p_{cap} = \frac{-B - \sqrt{-B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}, \text{ МПа.} \quad (2.40)$$

Поверхность g_{comp} описывается уравнением (2.41).

$$g_{comp} = q^2 + (p - p_{cap})^2. \quad (2.41)$$

Переход между поверхностями в рамках комбинированной поверхности пластического потенциала осуществляется с помощью уравнений (2.42), (2.43).

$$g = g_{tens} \quad \text{если} \quad p > q \cdot \frac{\partial g_{shear} / \partial p}{m / \sqrt{6}} + \frac{R_b \cdot \sqrt{3}}{m}. \quad (2.42)$$

Условие (2.42) представляет собой уравнение прямой, проходящей через вершину предельной поверхности в области трехосного растяжения.

$$g = g_{comp} \text{ если } p_{cap} > p_{g_shear}. \quad (2.43)$$

Условие (2.43) заключается в сравнении двух гидростатических координат: p_{cap} — координата центра сферы для возврата на шатер сжатия; p_{g_shear} — гидростатическая координата точки, в которой линия, совпадающая с нормалью к поверхности g_{comp} , пересекает гидростатическую ось. Графическая интерпретация условия (2.43) представлена на рисунке 2.7.

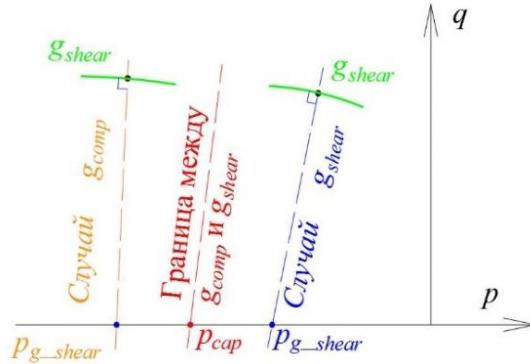


Рисунок 2.7 – Графическая интерпретация условия (2.43)

Значение p_{g_shear} может быть найдено с помощью формул (2.44)-(2.46).

$$k_{g_shear} = \frac{\partial g_{shear} / \partial p}{\partial g_{shear} / \partial q}, \quad (2.44)$$

$$b_{g_shear} = -k_{g_shear} \cdot p_{cap}, \quad (2.45)$$

$$p_{g_shear} = (q - b_{g_shear}) / k_{g_shear}, \text{ МПа}, \quad (2.46)$$

где: k_{g_shear} — угловой коэффициент прямой, получаемый из формулы (17) на основании условия совпадения угловых коэффициентов рассматриваемой прямой и нормали к поверхности g_{shear} ; b_{g_shear} — свободный член рассматриваемой прямой. Использование данного условия позволяет выполнить плавный переход между поверхностями g_{shear} и g_{comp} , исключающий «слепые» зоны, в которые возврат точки невозможен.

2.4. Эволюция предельной поверхности

В модели используется два независимых механизма эволюции предельной поверхности: девиаторная эволюция и эволюция шатра сжатия [36, 186]. Девиаторная эволюция представлена дисторсионным упрочнением и выполняется путем изменения безразмерного параметра упрочнения c_h ($c_{h0} \leq c_h \leq 1$). c_{h0}

представляет собой начальное значение параметра c_h , соответствующее нижней границе микротрешинообразования материала [3]. Значение параметра c_{h0} может быть найдено по эмпирической формуле (2.47) согласно [14] (формула модифицирована с учетом использования квадратичной предельной поверхности). Закон девиаторного упрочнения описывается с помощью системы (2.48).

$$c_{h0} = \sqrt{1 - \exp(-0,052 \cdot R_b^{0,642} [\text{МПа}])}, \quad (2.47)$$

$$c_h = \begin{cases} c_{h0} + (1 - c_{h0}) \cdot k_p \cdot (k_p^2 - 3 \cdot k_p + 3), & k_p < 1 \\ 1, & k_p \geq 1 \end{cases}. \quad (2.48)$$

Геометрическая интерпретация закона девиаторного упрочнения представлена на рисунке 2.8.

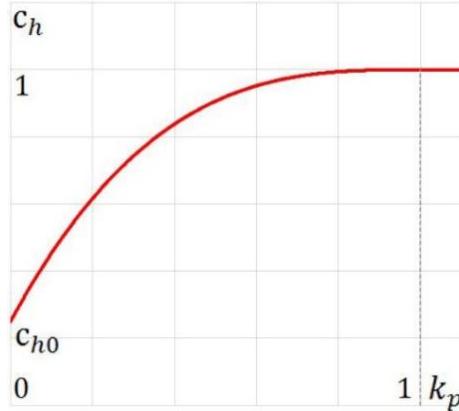


Рисунок 2.8 – Геометрическая интерпретация закона девиаторного упрочнения. Параметр c_h является функцией от внутренней переменной k_p . Эволюция k_p описывается уравнениями (2.49)-(2.52).

$$dk_p = d\lambda \cdot h_D(k_p, \sigma), \quad (2.49)$$

$$h_D(k_p, \sigma) = \frac{\|\mathbf{m}(k_p, \sigma)\|}{x_h(p) \cdot \beta} \cdot (2 \cdot \cos(\theta))^2 \cdot \beta \cdot \chi, \quad (2.50)$$

$$\beta = 1 + \exp(10 \cdot p / q), \quad (2.51)$$

$$\chi = \begin{cases} \cos(\Psi_b), & \Psi_b < 0 \\ 1, & \Psi_b \geq 0 \end{cases}, \quad (2.52)$$

где: $\mathbf{m}(k_p, \sigma) = \partial g(\sigma) / \partial \sigma$ – производная поверхности пластического потенциала по тензору напряжений; $x_h(p)$ – коэффициент хрупкости; β – множитель, предотвращающий девиаторную эволюцию предельной поверхности в области

растяжения; χ – множитель, контролирующий девиаторную эволюцию поверхности в случае контракции; $d\lambda$ – пластический множитель [31]. Коэффициент хрупкости контролирует скорость приращения параметра k_p и, соответственно, переменной c_h в зависимости от степени гидростатического обжатия материала. Чем выше степень гидростатического обжатия, тем большая норма тензора пластических деформаций требуется для достижения предельной поверхности, соответствующей $c_h = 1$. Концепция упрочнения с использованием коэффициента хрупкости была введена в исследовании [87]. В данной работе используется авторская модификация закона упрочнения, представленного в работах [100, 101]. Значение $x_h(p)$ может быть получено с помощью формул (2.53)–(2.56).

$$R_h = -p / R_b - 1 / \sqrt{3}, \quad (2.53)$$

$$x_h(p) = \begin{cases} E_h \cdot \exp(-R_{hs} / F_h) + D_h, & R_h < 0 \\ A_h - (A_h - B_h) \cdot \exp(-R_h / C_h), & R_h \geq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

$$E_h = B_h - D_h, \quad (2.55)$$

$$F_h = E_h \cdot C_h / (B_h - A_h). \quad (2.56)$$

Параметры A_h , B_h , C_h , D_h контролируют зависимость коэффициента хрупкости от гидростатического инварианта p . Данные параметры устанавливаются на основании результатов лабораторных испытаний. В случае отсутствия опытных данных могут быть использованы следующие значения параметров: $A_h = 0,08$; $C_h = 2$; $D_h = 0,000001$. Значение параметра B_h (параметр контролирует норму тензора пластических деформаций при одноосном сжатии) может быть найдено по эмпирической формуле (2.57).

$$B_h = 0,0032 - R_b [\text{МПа}] \cdot 0,000015. \quad (2.57)$$

Графическая интерпретация механизма девиаторной эволюции изображена на рисунке 2.9.

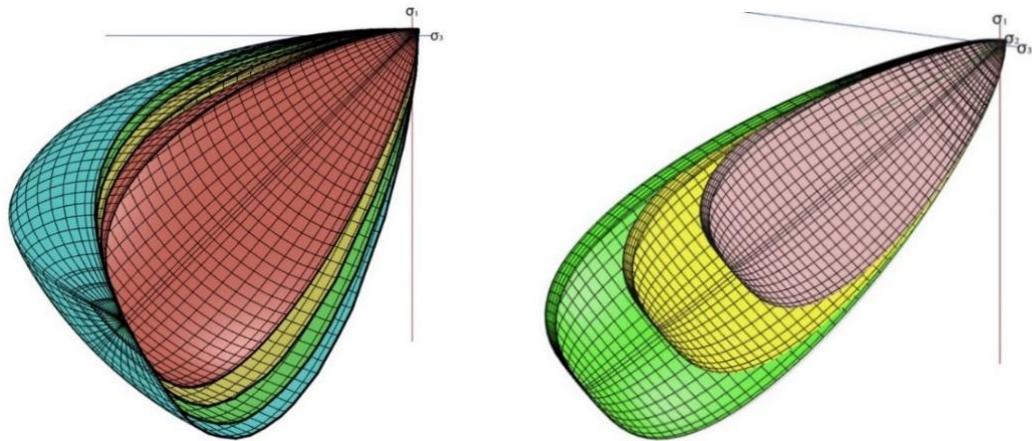


Рисунок 2.9 – Механизм девиаторной эволюции предельной поверхности (слева)
и механизм эволюции шатра сжатия (справа)

Эволюция шатра сжатия представлена дисторсионным упрочнением и контролируется внутренней переменной X (координата пересечения шатра сжатия и гидростатической оси). Приращение переменной X зависит от оператора h_V (2.58), являющегося функцией объемных пластических деформаций ε_{pv} . Эволюция шатра сжатия позволяет смоделировать необратимую сжимаемость бетона (контракцию) [54]. Параметр материала A_{hv} может быть получен на основании уравнения (2.58).

$$h_V = A_{hv} = \frac{3 \cdot E_b \cdot (1 - \nu)}{5 \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}. \quad (2.58)$$

Эволюция внутренней переменной X описывается уравнением (2.59). Текущее значение переменной X может быть получено на основании уравнения (2.60). Эволюция шатра сжатия осуществляется при условии $p < p_{cap}$.

$$dX = h_V \cdot d\varepsilon_{pv} = A_{hv} \cdot d\lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \mathbf{m}(k_p, \sigma), \quad (2.59)$$

$$X = X_0 + dX, \text{ МПа}, \quad (2.60)$$

где: X_0 – начальное значение X , которое может быть найдено с помощью эмпирической формулы (2.61) на основании [111]; δ_{ij} – дельта Кронекера (Kronecker delta).

$$X_0 = -17,1 - 1,89 \cdot R_b [\text{МПа}], \text{ МПа}. \quad (2.61)$$

Графическая интерпретация механизма эволюции шатра сжатия представлена на рисунке 2.9.

2.5. Механизм накопления повреждений

Механизм накопления повреждений позволяет моделировать разупрочнение материала, а также изменение жесткости при циклическом и знакопеременном нагружении. Использование данного механизма отражается на соотношении напряжения–деформации (2.62).

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_t \cdot (1 - W_t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_c) \cdot (1 - W_c), \quad (2.62)$$

где: $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_t$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_c$ – положительная и отрицательная части тензора эффективных напряжений соответственно (растягивающие напряжения принимаются положительными, сжимающие – отрицательными). Тензор эффективных напряжений описывает напряженное состояние неповрежденного материала и может быть найден согласно уравнению (2.63); $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор номинальных напряжений, характеризующий напряженное состояние поврежденного материала; W_t , W_c – скалярные безразмерные параметры поврежденности материала для растяжения и сжатия соответственно. Значения параметров варьируются от 0 (неповрежденный материал) до 1 (полностью поврежденный материал). Концепция использования параметров поврежденности для описания работы материалов освещалась в работе Ю. Н. Работнова [28].

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = D_e \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p), \quad (2.63)$$

где: D_e – упругая матрица жесткости; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций; $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ – тензор пластических деформаций.

Данный подход позволяет отразить разницу в поведении бетона при сжатии и растяжении, знакопеременном и циклическом нагружениях. На рисунке 2.10 изображен график напряжения–деформации для образца, подверженного знакопеременной нагрузке: голубая линия (1) соответствует нагружению в условиях одноосного растяжения; красная (2) – разгрузка после одноосного растяжения, переходящая в нагрузку в условиях одноосного сжатия; зеленая линия (3) – разгрузка после одноосного сжатия, переходящая в одноосное растяжение с остаточным значением предела прочности при одноосном растяжении, уменьшенным в результате роста параметров поврежденности W_t и W_c .

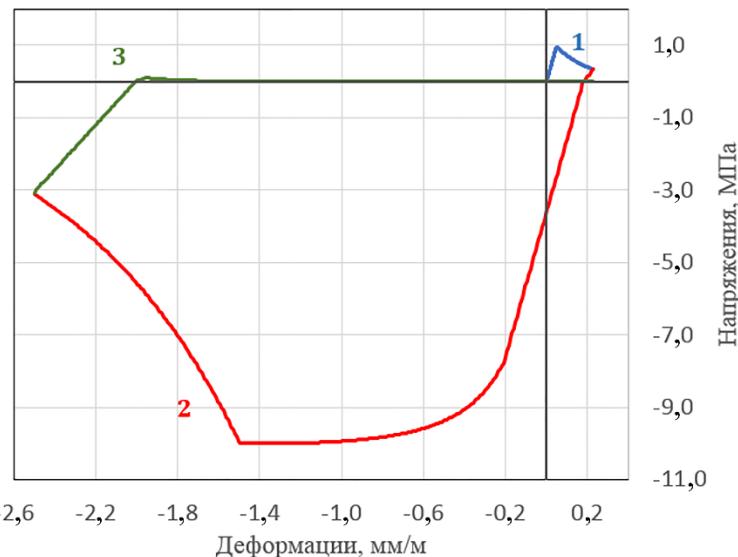


Рисунок 2.10 – Работа модели при знакопеременном нагружении в цикле
растяжение-сжатие-растяжение

Величины параметров поврежденности могут быть найдены с помощью уравнений (2.64), (2.65).

$$W_c = 1 - \exp(-\alpha_{dc} / \varepsilon_{fc}), \quad (2.64)$$

$$W_t = 1 - \exp(-\alpha_{dt} / \varepsilon_{ft}), \quad (2.65)$$

где: α_{dt} , α_{dc} – переменные, отвечающие за эволюцию параметров поврежденности при растяжении и сжатии соответственно [53]; ε_{ft} , ε_{fc} – параметры, контролирующие начальный наклон кривой закона поврежденности материала. Геометрическая интерпретация зависимости W_t (W_c) – α_{dt} (α_{dc}) представлена на рисунке 2.11.

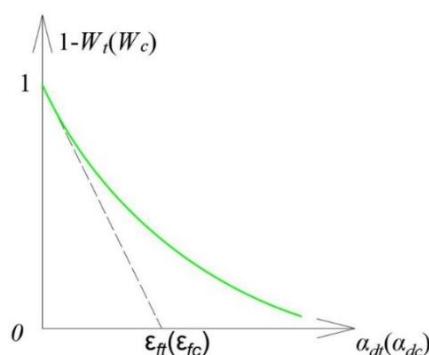


Рисунок 2.11 – Эволюция параметров поврежденности W_t (W_c) в зависимости от
функций α_{dt} (α_{dc})

Приращения величин α_{dt} , α_{dc} могут быть найдены с помощью уравнений (2.66), (2.67).

$$d\alpha_{dt} = (1 - \alpha_c) \cdot d\lambda \cdot \|\mathbf{m}(k_p, \sigma)\| / x_s(p), \quad (2.66)$$

$$d\alpha_{dc} = \alpha_c \cdot d\lambda \cdot \|\mathbf{m}(k_p, \sigma)\| / x_s(p), k_p \geq 1, \quad (2.67)$$

где: α_c – скалярный безразмерный коэффициент, обеспечивающий переход между режимами сжатия и растяжения (2.68); $x_s(p)$ – коэффициент хрупкости при разупрочнении, отражающий зависимость изменения энергии разрушения бетона от вида напряженного состояния и мода трещины [161]. Коэффициент $x_s(p)$ может быть получен с помощью формул (2.69) и (2.70).

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 \left(\bar{\sigma}_{ci} \cdot (\bar{\sigma}_{ci} + \bar{\sigma}_{ti}) / \|\bar{\sigma}\|^2 \right), \quad (2.68)$$

$$x_s(p) = 1 + (A_s - 1) \cdot R_s(p)^3, \quad (2.69)$$

$$R_s(p) = \begin{cases} -\frac{p \cdot \sqrt{2}}{q}, & p \leq 0 \\ 0, & p > 0 \end{cases}, \quad (2.70)$$

где A_s – безразмерный скалярный параметр, отвечающий за скорость изменения коэффициента хрупкости при разупрочнении в зависимости от гидростатического инварианта p . Значение параметра должно подбираться на основании трехосных испытаний бетона. В случае отсутствия опытных данных значение A_s может быть принято равным 20.

Процесс разупрочнения бетона при растяжении сопровождается локализацией необратимых деформаций на участках сравнительно малого размера. Локализация необратимых деформаций, возникающая в оклонулевом объеме в конечно-элементном решении, ведет к патологической чувствительности результатов решения к размеру конечно-элементной сетки, а также к возникновению тенденции к ухудшению сходимости с уменьшением размера конечного элемента [56, 112]. Для решения проблемы локализации в данной работе был использован метод регуляризации, основанный на теории полосы трещин (crack band theory) [55]. Основная идея подхода заключается в том, что параметр ε_{ft} , контролирующий разупрочнение при растяжении, является функцией от характерного размера элемента l_{char} . Значение l_{char} равно размеру конечного

элемента в плоскости, перпендикулярной направлению образования трещины (вычисляется индивидуально для каждого конечного элемента). Геометрическая интерпретация параметра l_{char} изображена на рисунке 1.22. Таким образом, значение параметра ε_{ft} может быть найдено согласно формуле (2.71).

$$\varepsilon_{ft} = \frac{G_f}{R_{bt} \cdot l_{char}}, \quad (2.71)$$

где G_f – энергия разрушения бетона для трещины первого мода. Величина энергии разрушения может быть найдена по формуле (2.72) согласно [93]. Концепция использования подобного способа регуляризации в модели бетона ранее применялась в работе [70]. Несмотря на то, что данный способ уступает в эффективности регуляризации нелокальным подходам, он является наиболее простым с точки зрения реализации.

$$G_f = 85 \cdot R_b^{0.15} [\text{МПа}], \text{Н/мм}, \quad (2.72)$$

где R_b – приизменная прочность бетона на одноосное сжатие. Значение параметра ε_{fc} должно устанавливаться на основании опытных данных либо эталонных диаграмм, представленных в нормативных документах. В случае отсутствия данных, параметр может быть принят равным 0,001.

2.6. Алгоритм работы модели

В модели используется следующий алгоритм решения в точке интегрирования:

1. *Исходные данные.* В качестве исходных данных выступают:

Пятнадцать параметров модели материала:

- Две упругие константы: начальный модуль упругости бетона E_b , коэффициент Пуассона v ;
- Пять параметров предельной поверхности R : пределы прочности на одноосное сжатие R_b , одноосное растяжение R_{bt} и двухосное равномерное сжатие R_{2b} , координата пересечения шатра сжатия с гидростатической осью X_0 и множитель, определяющий начало шатра сжатия R_{vh} ;
- Параметр поверхности пластического потенциала;
- Четыре параметра упрочнения A_h, B_h, C_h, D_h ;

- Три параметра для механизма разрушения: G_f , параметр разупрочнения при сжатии ϵ_{fc} , параметр, контролирующий зависимость поврежденности от степени обжатия A_s .

Параметры решения:

- n – номер текущего шага решения;
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{n-1}$ – тензор деформаций предыдущего шага решения;
- $d\boldsymbol{\varepsilon}^n$ – приращение тензора деформаций на текущем шаге решения;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^{n-1}$ – тензор пластических деформаций предыдущего шага решения;

Внутренние переменные предыдущего шага решения k^{n-1} :

- k_p^{n-1}, X^{n-1} – величины параметров упрочнения предыдущего шага решения;
- $\alpha_{dt}^{n-1}, \alpha_{dc}^{n-1}$ – величины параметров, отвечающих за накопление повреждений материала.

2. *Упругий предиктор.* Вычисление «пробного» тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{tr}$ и его инвариантов $p_{tr}, q_{tr}, \theta_{tr}$ исходя из допущения об упругой работе материала (2.73).

$$\boldsymbol{\sigma}_{tr}^n = (\boldsymbol{\varepsilon}^{n-1} + d\boldsymbol{\varepsilon}^n - \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^{n-1}) : \mathbf{D}_{el}. \quad (2.73)$$

Проверка критерия прочности. На основе полученного пробного тензора напряжений, а также величин прочностных параметров R и внутренних переменных k^{n-1} выполняется проверка условия прочности. Если величина $p_{tr} < 0$, то проверка выполняется по выражению (2.20); в ином случае – по выражению (2.21). Если условие $f(R, k^{n-1}, \boldsymbol{\sigma}_{tr}) < 0$ удовлетворяется, то материал работает упруго и решение найдено: $\boldsymbol{\sigma}^n = \boldsymbol{\sigma}_{tr}^n, \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^n = \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}^{n-1}, k^n = k^{n-1}$ (см. рисунок 2.12, слева). В ином случае переходим к шагу (4) (см. рисунок 2.12, справа).

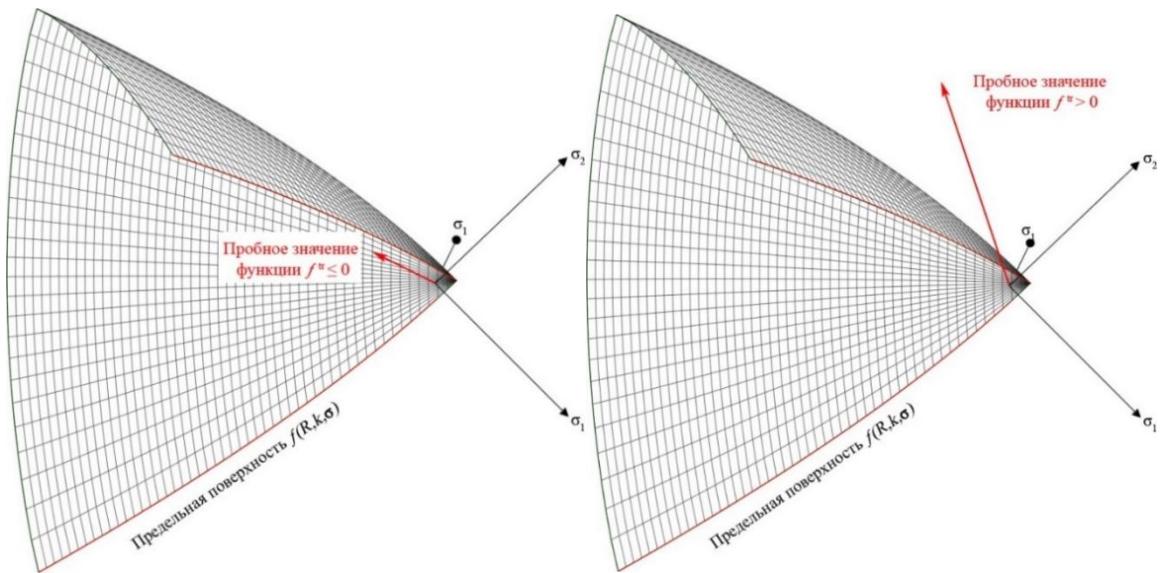


Рисунок 2.12 – Положение точки относительно предельной поверхности: условие $f(R, k^{n-1}, \sigma_{tr}) < 0$ удовлетворяется (слева), Условие $f(R, k^{n-1}, \sigma_{tr}) < 0$ не удовлетворяется (справа)

3. *Пластический корректор.* На данном шаге выполняется вычисление пластического множителя, внутренних переменных k^n и тензора напряжений σ^n . Искомые величины могут быть получены методом СПРМ путем совместного решения уравнений (2.49), (2.60), (2.74), (2.75) и условия $f(R, k^{n-1}, \sigma_{tr})=0$. Уравнения (2.74) и (2.75) отвечают за изменение инвариантов тензора напряжения, уравнения (2.49) и (2.60) – за изменение внутренних переменных.

$$q^n = q_{tr}^n - 2 \cdot G \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial g(R, k, \sigma)}{\partial \sigma} = q_{tr}^n - 2 \cdot G \cdot d\lambda \cdot m_D, \quad (2.74)$$

$$p^n = p_{tr}^n - \sqrt{3} \cdot K \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial g(R, k, \sigma)}{\partial \sigma} = p_{tr}^n - \sqrt{3} \cdot K \cdot d\lambda \cdot m_V, \quad (2.75)$$

где: G – модуль сдвига; K – объемный модуль упругости.

Линеаризация данных уравнений относительно их решения позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений, решаемую относительно \mathbf{u} (2.76) (на основании данных работы [101]).

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r}, \quad (2.76)$$

где: \mathbf{u} – матрица-столбец неизвестных (2.77); \mathbf{r} – матрица-столбец остатков решения (2.78); \mathbf{J} – матрица Якоби (см. приложение Б).

$$\mathbf{u} = [p \quad q \quad k_p \quad X \quad d\lambda]^T, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} p_{tr} - p - \sqrt{3} \cdot K \cdot m_v \\ q_{tr} - q - 2 \cdot G \cdot m_D \\ k_{ptr} - k_p - d\lambda \cdot h_D \\ X_{tr} - X - d\lambda \cdot h_v \\ f(R, k, \sigma) \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Решение выполняется итеративно: на каждой итерации происходит обновление тензора напряжений σ , внутренних переменных k_p и X , а также величины пластического множителя $d\lambda$. Пробные величины k_{ptr} и X_{tr} внутренних переменных принимаются равными значениям, полученным на предыдущем шаге нагружения. Для первой итерации значение пластического множителя $d\lambda$ принимается равным нулю. Итерации выполняются до тех пор, пока норма матрица-столбец остатков решения \mathbf{r} не станет меньше порога сходимости (например, 10^{-6}). После выполнения итераций происходит обновление величины тензора пластических деформаций на основании формулы (2.4).

4. *Вычисление параметров поврежденности.*
 - Вычисление коэффициента вида напряженного состояния α_c согласно формуле (2.68);
 - Вычисление характерной длины конечного элемента l_{char} в зависимости от координат его узлов и направления первых главных пластических деформаций;
 - Вычисление приращения внутренних переменных, отвечающих за эволюцию параметров поврежденности $d\alpha_{dt}^n, d\alpha_{dc}^n$ по формулам (2.66)-(2.70).

Вне зависимости от того, происходило приращение тензора пластических деформаций или нет, выполняется вычисление параметров поврежденности материала.

2.7. Выводы по главе

1. Разработана нелинейная модель бетона, использующая в качестве основы комбинацию теории пластического течения и механики разрушения.
2. Предельная поверхность модели соответствует опытным данным в девиаторных сечениях, меридиональной плоскости и плоскости $\sigma_1-\sigma_3$. Предельная

поверхность соответствует постулату Друкера и не содержит мнимых упругих зон. В модели используется комбинированная поверхность пластического потенциала, которая в комбинации с двойным независимым упрочнением предельной поверхности позволяет моделировать эффекты дилатации и контракции. Для моделирования процесса разупрочнения материала, а также для учета изменения жесткости в рамках циклического и знакопеременного нагружения в модели используется механизм накопления повреждений. Регуляризация проблемы локализации необратимых деформаций, а также учет масштабного эффекта выполняются с помощью энергетического подхода. Для использования модели необходимо 15 параметров. Параметры могут быть найдены на основании результатов лабораторных испытаний или с помощью эмпирических зависимостей на основании данных о классе бетона по прочности на одноосное сжатие.

3. Разработанная модель отвечает основным требованиям, предъявляемым к модели бетона для моделирования поведения материала в рамках кратковременного статического нагружения. Удовлетворение данных требований позволяет выполнить математически стабильное, уникальное решение, не обладающее патологической зависимостью результатов от размеров конечно-элементной сетки, а также отразить основные особенности напряженно-деформированного состояния материала. Для подтверждения возможности использования модели в численных исследованиях механизма разрушения железобетонных плит от продавливания модель должна пройти процедуру валидации. Валидация модели может быть выполнена путем сопоставления результатов лабораторных и численных испытаний бетонных образцов и железобетонных конструкций.

ГЛАВА 3. ВАЛИДАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ БЕТОНА

Разработанная нелинейная модель бетона реализована в конечно-элементном программном комплексе «ANSYS» в качестве пользовательской модели материала USERMAT с использованием языка программирования FORTRAN77. В данной главе представлены результаты валидации модели. Для численного моделирования бетона использовались трехмерные двадцатиузловые конечные элементы SOLID186. Армирование в железобетонных конструкциях моделировалось дискретно с помощью конечных элементов REINF264. Для моделирования арматуры использовалась модель Mises с билинейным изотропным упрочнением.

3.1. Опыты с бетонными образцами

3.1.1. Опыты Н. Kupfer

В опытах Н. Kupfer [122] на бетонных образцах-пластинах воссоздавалось двухосное напряженное состояние. Образцы разных серий испытывались при различных соотношениях главных напряжений. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 32000$ МПа; $\nu = 0,18$; $R_b = 32,8$ МПа; $R_{bt} = 3,3$ МПа. Сравнение результатов лабораторных и численных испытаний представлено на рисунке 3.1 (рядом с результатами каждого опыта указано соотношение ненулевых главных напряжений). На рисунке 3.1 линиями показаны результаты численных опытов, точками – результаты, полученные в лаборатории.

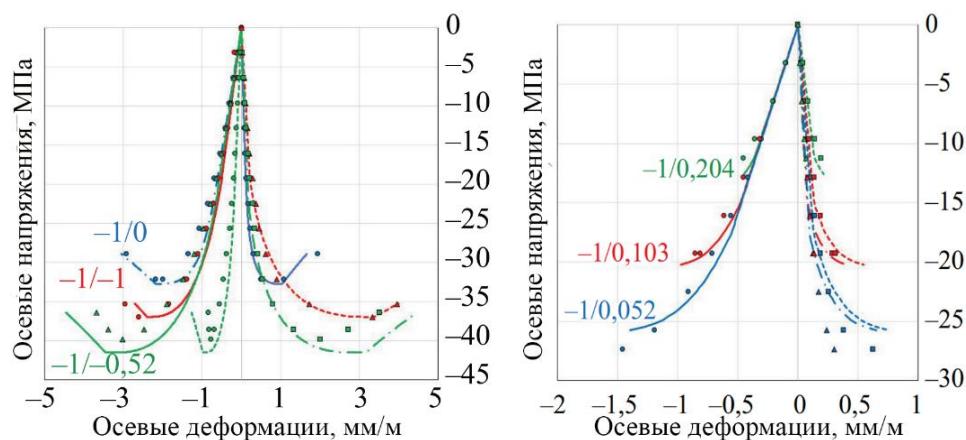


Рисунок 3.1 – Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний, выполненных Н. Kupfer [122]

Наибольшая разница между предельными осевыми напряжениями, полученными в лабораторных и численных испытаниях, наблюдается для опыта с

напряженным состоянием сжатие-растяжение при соотношении главных напряжений $-1/0,052$ и составляет 7,6 %. Результаты вычислительного эксперимента имеют хорошее соответствие опытным данным.

3.1.2. Опыты I. Imran

В опытах I. Imran [110] цилиндрические образцы подвергались трехосному неравномерному сжатию. Опыты выполнялись в два этапа: на первом этапе образец нагружался боковым давлением, на втором этапе происходило осевое нагружение образца при постоянной величине бокового давления. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 30000$ МПа; $\nu = 0,15$; $R_b = 47,4$ МПа; $R_{bt} = 4,74$ МПа. Сравнение результатов представлено на рисунке 3.2. Рядом с результатами каждого опыта указаны нормальные напряжения бокового давления.

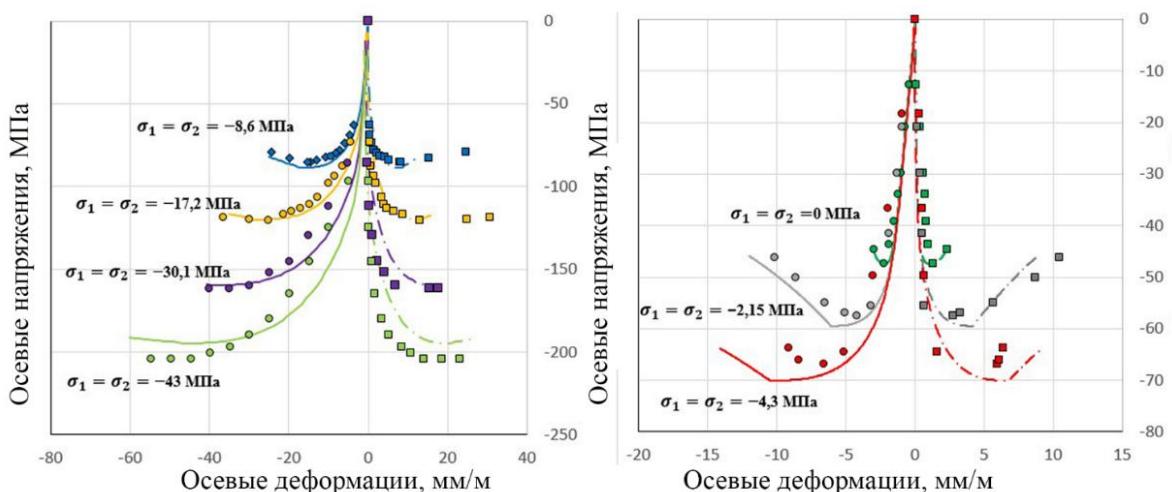


Рисунок 3.2 – Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний, выполненных I. Imran [110]

Наибольшая разница между предельными осевыми напряжениями, полученными в ходе лабораторных и численных испытаний, составляет 6,1 %. Результаты вычислительного эксперимента демонстрируют хорошее соответствие опытным данным.

3.1.3. Опыты F. C. Caner

В опытах, выполненных F.C. Caner [69], цилиндрические образцы подвергались трехосному сжатию. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 25000$ МПа, $\nu = 0,2$, $R_b = 45,7$ МПа, $R_{bt} = 4,57$ МПа. Было

выполнено две серии опытов. В первой серии опытов испытание образцов происходило в два этапа: на первом этапе образцы нагружались трехосным равномерным сжатием, на втором этапе при постоянном боковом давлении происходило осевое деформирование цилиндра. Образцы разных серий испытывались при различных значениях предварительного трехосного обжатия. Во второй серии опытов образцы подвергались трехосному равномерному сжатию. Сравнение результатов лабораторных и численных испытаний для обеих серий представлено на рисунке 3.3.

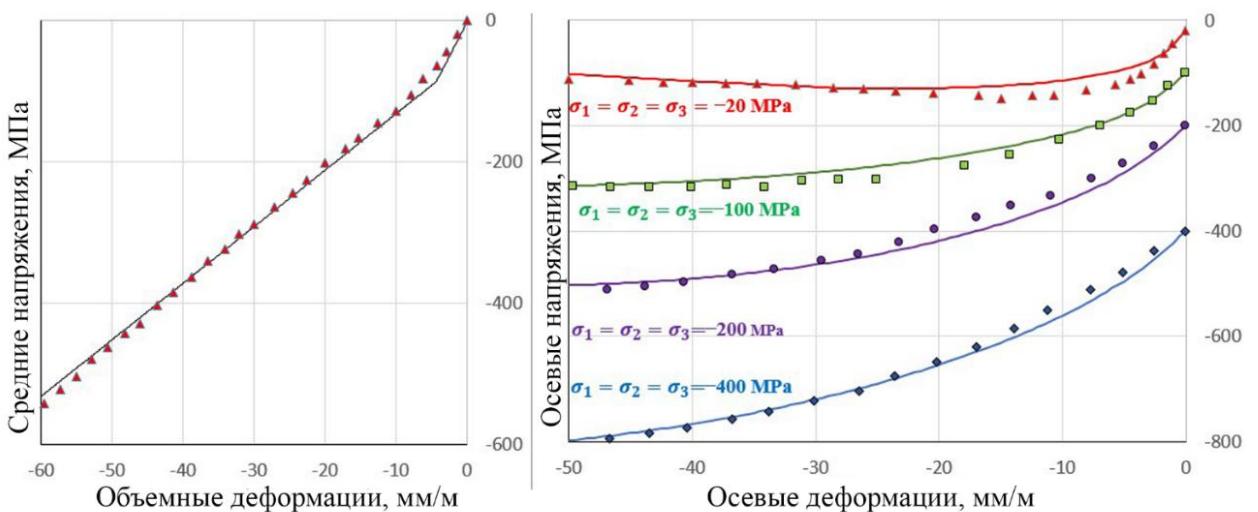


Рисунок 3.3 – Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний, выполненных F.C. Caner [69]

Наибольшая разница между предельными осевыми напряжениями, полученными в лабораторных и численных испытаниях, наблюдается для опыта с боковыми напряжениями, равными -20 МПа, и составляет 5,9 %. Результаты вычислительного эксперимента имеют хорошее соответствие опытным данным.

3.1.4. Балка с надрезом из испытаний Н. А. Kormeling

В отчете [118] представлены результаты испытаний шарнирно опертых бетонных балок с надрезом. Основная идея испытаний заключалась в создании искусственной зоны локализации необратимых деформаций для измерения энергии разрушения бетона. Данные опыты были включены в работу для тестирования зависимости результатов от размера конечно-элементной сетки. Длина балки составляет 500 мм, размер поперечного сечения – 100×100 мм,

глубина и ширина надреза составляют 50 и 5,5 мм соответственно. Схема балки изображена на рисунке 3.4.

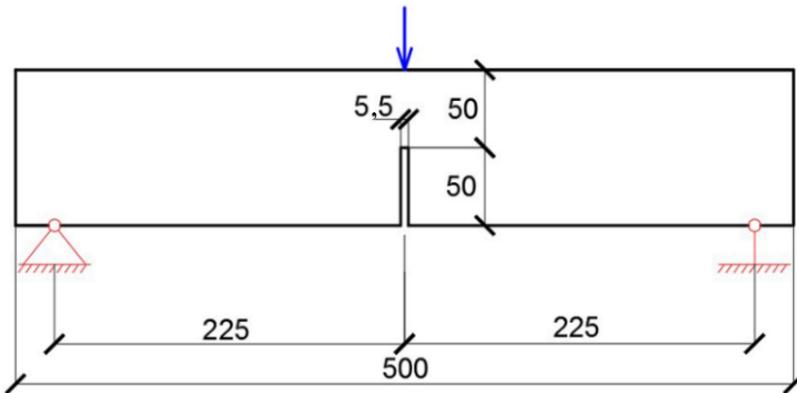


Рисунок 3.4 – Геометрическая схема балок с надрезом, использованных в испытаниях [118] (размеры в мм)

Бетон балок имеет следующие характеристики: $E_b = 20000$ МПа; $\nu = 0,2$; $R_b = 24$ МПа; $R_{bt} = 2,4$ МПа; $G_f = 100$ Н/м. Было выполнено три численных испытания с разными размерами конечно-элементной сетки (см. рисунок 3.5).

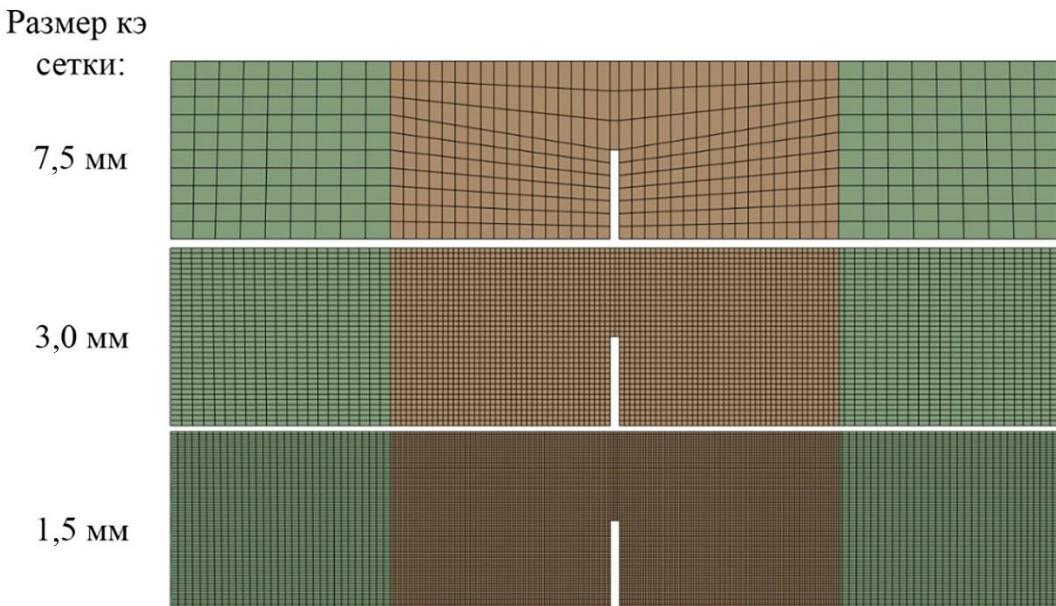


Рисунок 3.5 – Конечно-элементные модели балки с разным размером сетки

Сравнение кривых нагрузка-перемещение для лабораторных и численных образцов представлено на рисунке 3.6. Серая область на графике представляет собой огибающую, построенную на основании результатов испытаний нескольких балок-близнецов. Цветными линиями показаны результаты численного моделирования.

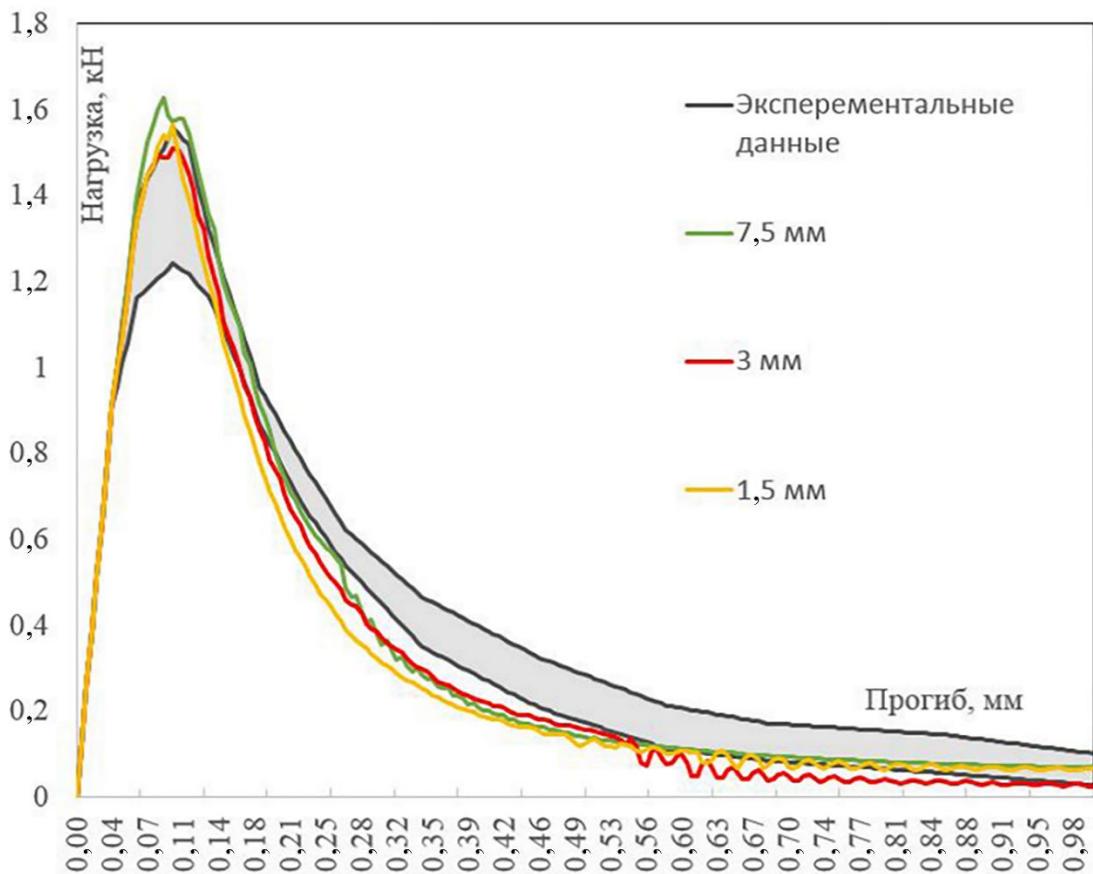


Рисунок 3.6 – Сравнение результатов лабораторных и численных испытаний

Можно заключить, что различие между результатами для образцов с разным размером конечно-элементной сетки несущественно.

3.1.5. Образцы, подверженные циклическому нагружению

В серии опытов, описанных в работе [98], бетонные образцы подвергались циклическому одноосному растяжению. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 28000$ МПа; $\nu = 0,2$; $R_b = 40$ МПа; $R_{bt} = 3,5$ МПа; $G_f = 55$ Н/м. В опытах, выполненных I. D. Karsan [114], бетонные образцы подвергались циклическому одноосному сжатию. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 30000$ МПа; $\nu = 0,2$; $R_b = 28$ МПа; $R_{bt} = 2,8$ МПа; $A_s = 25$; $\varepsilon_{fc} = 0,001$. Сравнение результатов лабораторных и численных испытаний для обеих серий представлено на рисунке 3.7 (пунктирной линией показаны результаты лабораторного испытания).

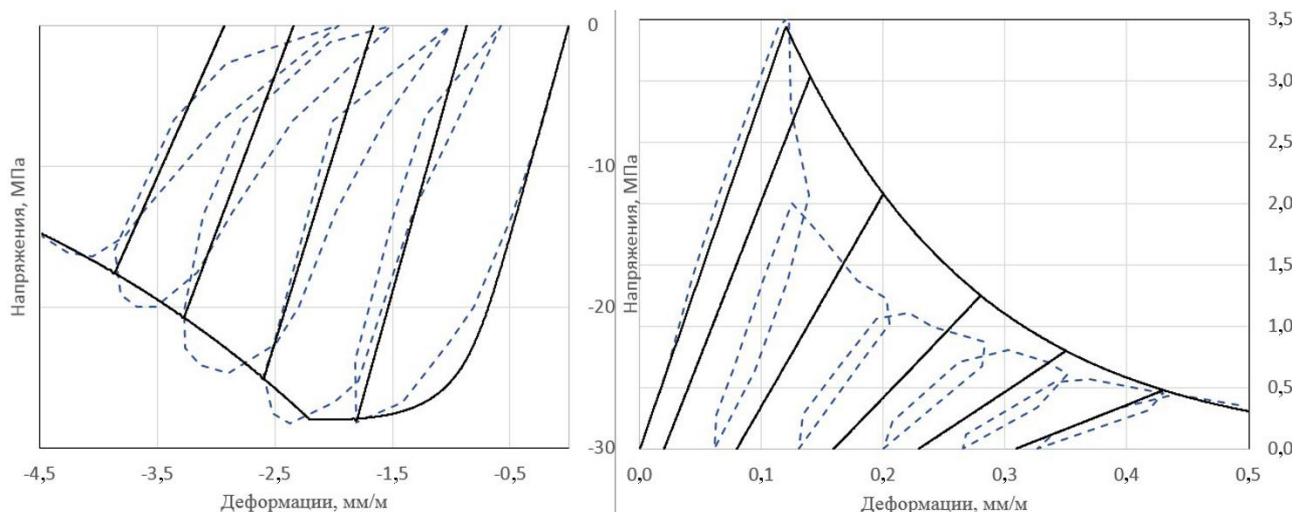


Рисунок 3.7 – Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний для образцов, подвергавшихся циклическому нагружению. Слева представлены результаты испытания образцов, подвергавшихся сжатию, справа – растяжении.

Результаты численного эксперимента имеют хорошее соответствие опытным данным.

3.2. Опыты с железобетонными конструкциями

3.2.1. Разрушение железобетонных балок по наклонному сечению

Лабораторные образцы, описанные в работе [182], представляют собой двенадцать шарнирно опертых железобетонных балок, нагруженных сосредоточенной силой в середине пролета. Схема и геометрические параметры балок представлены на рисунке 3.8, а характеристики бетона и арматуры балок – в таблице 3.1. Моделирование численных образцов выполнялось с учетом симметрии конструкции (половина балки).

Таблица 3.1 – Характеристики материалов испытанных образцов

Арматура			
Стержень	Диаметр, мм	R_s , МПа	E_s , МПа
M10	11,3	315	200000
M25A	25,2	440	210000
M25B	25,2	445	220000
M30	29,9	436	200000

Продолжение таблицы 3.1

D4	3,7	600	200000
D5	6,4	600	200000
Бетон			
Балка	R_b , МПа	E_b , МПа	ϵ_0
OA1, A1, B1, C1	22,6	36,500	-0,0016
OA2, A2, B2, C2	25,9	32,900	-0,0021
OA3, A3, B3, C3	43,5	34,300	-0,0019

где: R_s – расчетное сопротивление арматуры; E_s – модуль упругости арматуры; R_b – предел прочности бетона при одноосном сжатии; E_b – начальный модуль упругости бетона; ϵ_0 – осевые относительные деформации, соответствующие пределу прочности бетона при одноосном сжатии. В таблице 3.1 стержни M25A использовались для балок OA2, A2, B2, C2, а стержни M25B – для остальных балок.

На рисунке 3.9 представлено сравнение графиков нагрузка-перемещения для результатов испытания лабораторных (черные точки) и численных образцов (голубые линии). На рисунке 3.10 представлено сопоставление картин трещинообразования лабораторных и численных образцов.

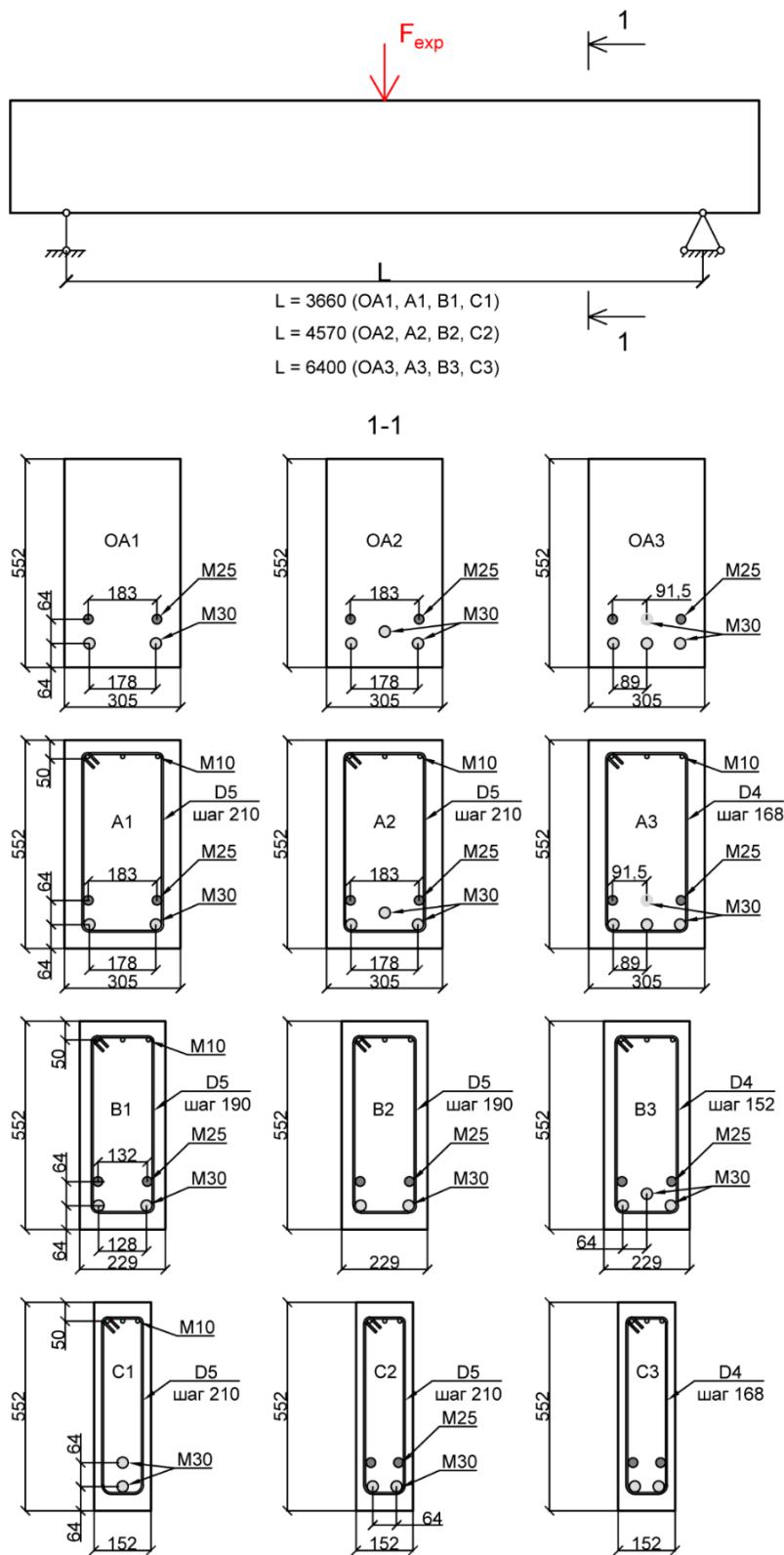


Рисунок 3.8 – Геометрические характеристики балок из работы [182]

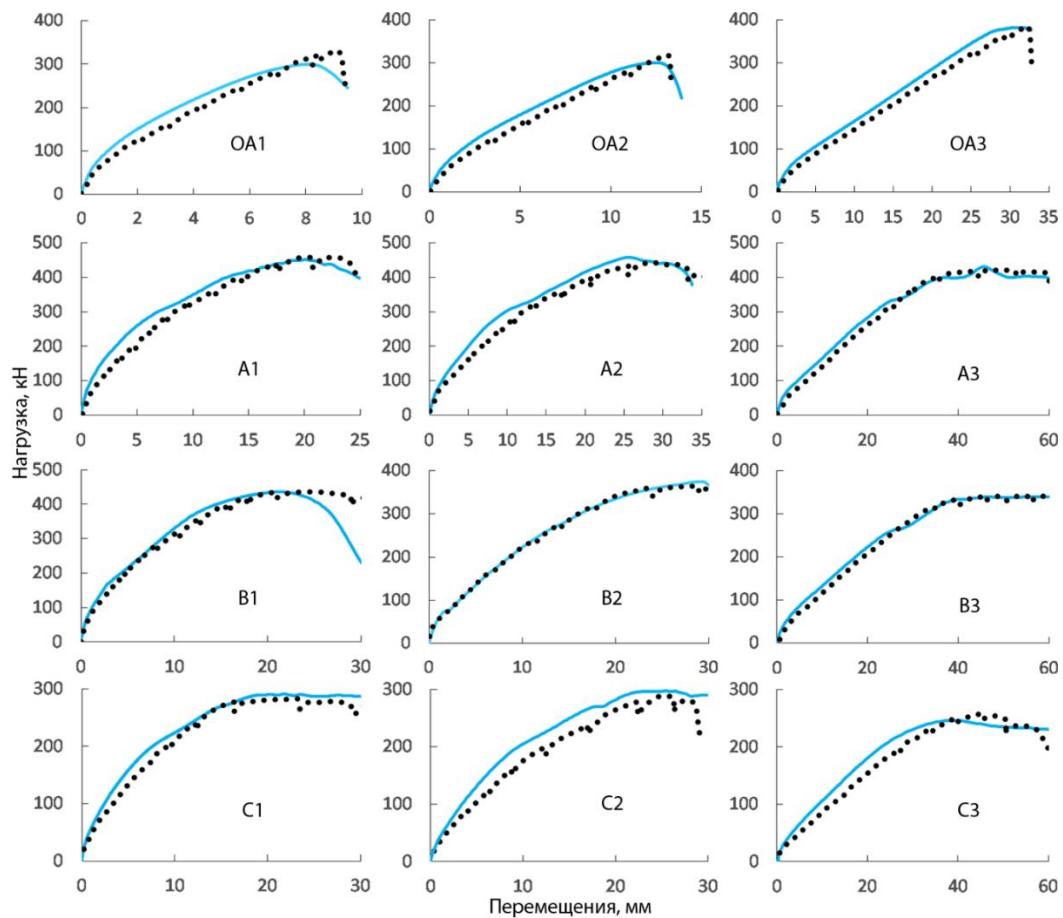


Рисунок 3.9 – Сравнение кривых нагрузка–перемещения для экспериментальных и численных образцов

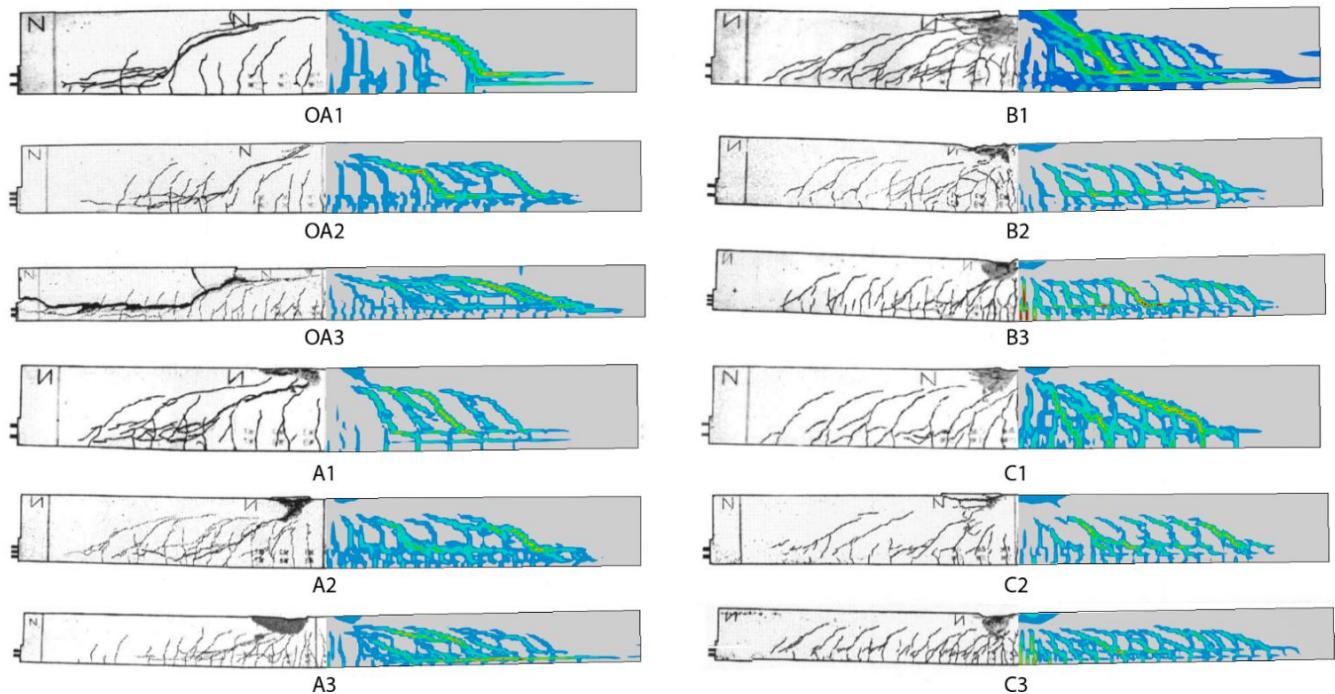


Рисунок 3.10 – Сопоставление картин трещинообразования для экспериментальных и численных образцов

Разрушение численных и лабораторных образцов произошло по наклонному сечению. Картина трещинообразования, графики нагрузка–перемещения имеют аналогичный характер. Максимальная разница между величинами разрушающей нагрузки, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 9,4 %. Максимальная разница между перемещениями балок, соответствующими разрушающей, полученными в лабораторных и численных испытаниях составила 13,2 %. Результаты численных испытаний имеют хорошее соответствие опытным данным.

3.2.2. Продавливание железобетонных плит

В работе [102] выполнялось испытание серии железобетонных плит. В общей сложности было испытано 11 образцов. Схема нагружения образцов представлена на рисунке 3.11. Геометрические параметры плит и физико-механические характеристики материалов представлены в таблице 3.2. На рисунке 3.12 представлено сравнение графиков нагрузка–перемещения для лабораторных и численных образцов.

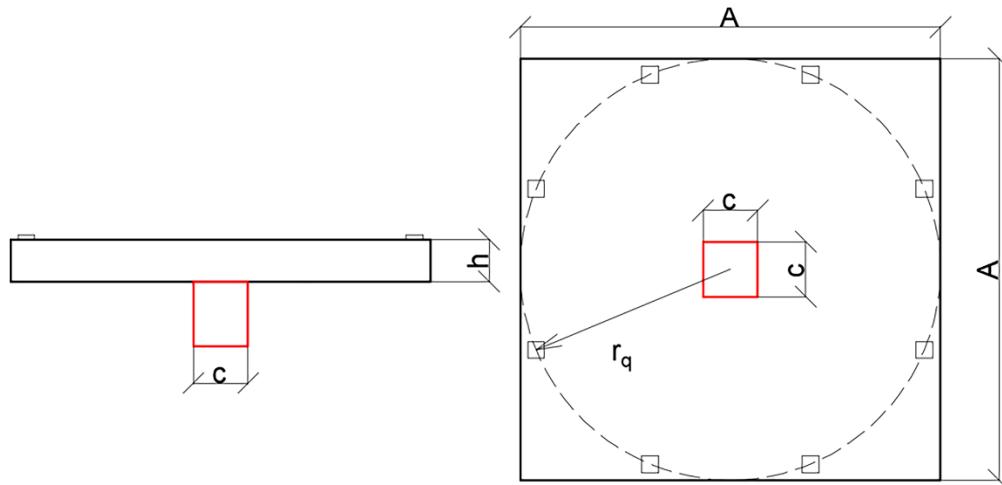


Рисунок 3.11 – Геометрические параметры и схема нагружения образцов

Таблица 3.2 – Геометрические параметры плит и физико-механические характеристики материалов

Размеры (A×A×h, мм)	Образец	h ₀ , мм	B, МПа	d _g , мм	μ, %	μ', %	R _s , МПа
3000×3000×250 c = 260, r _q = 1500	PG-1	210	34,5	16	1,50	0,2	573
	PG-2b		50,6	16	0,25	0,2	552
	PG-4		40,3	4	0,25	0,2	541
	PG-5		36,6	5	0,33	0,2	555
	PG-10		35,6	16	0,33	0,2	577
	PG-11		39,4	16	0,75	0,2	570
6000×6000×500 c = 520, r _q = 2850	PG-3	456	40,5	16	0,33	0,2	520
1500×1500×125 c = 130, r _q = 752	PG-6	96	43,4	16	1,50	0	526
	PG-7	100	43,4	16	0,75	0	550
	PG-8	117	43,4	16	0,28	0	525
	PG-9	117	43,4	16	0,22	0	525

где: В – класс бетона; h₀ – рабочая высота; d_g – максимальный размер крупного заполнителя; μ – процент продольного армирования растянутой зоны; μ' – процент продольного армирования сжатой зоны, R_s – предел текучести стали.

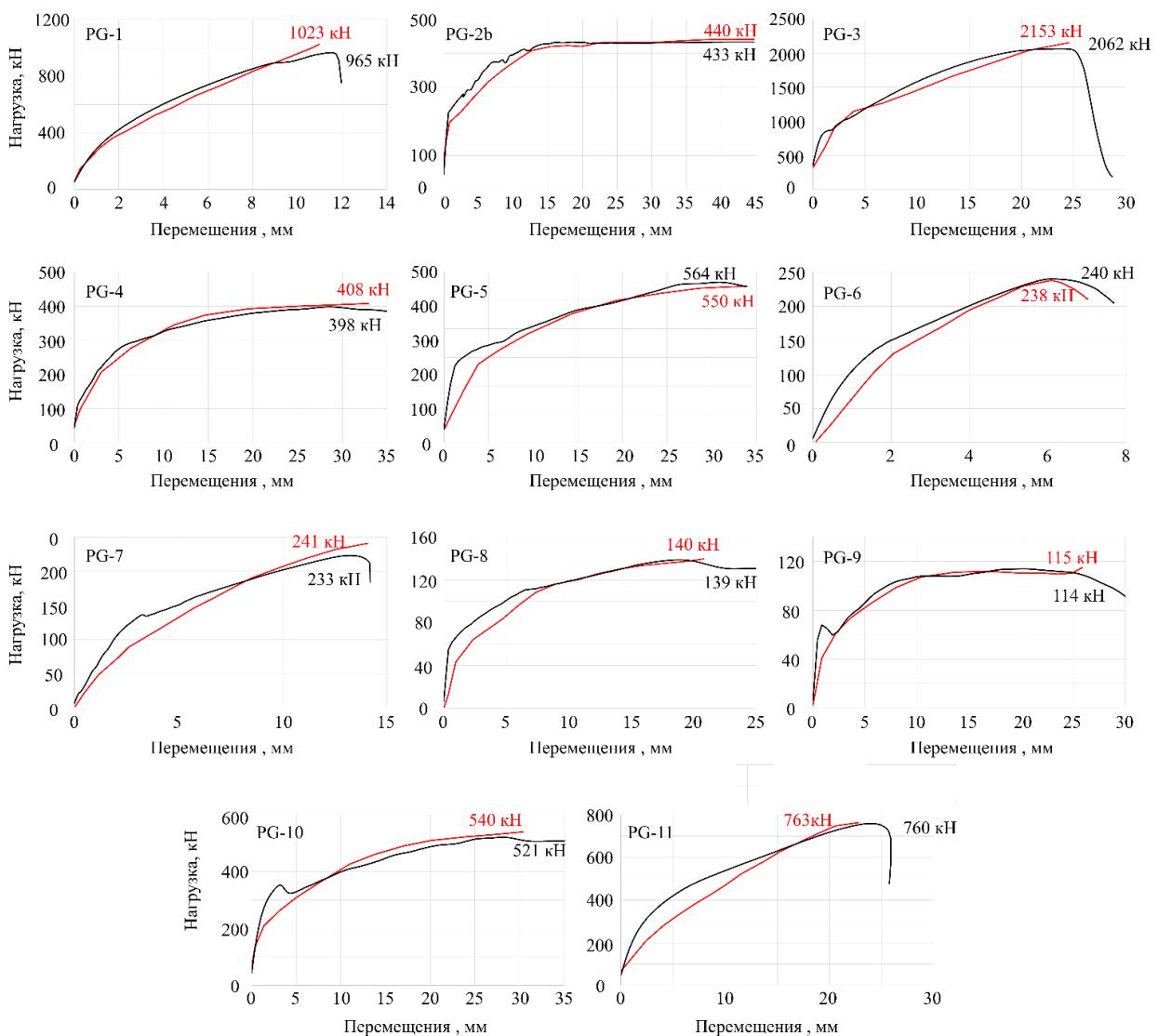


Рисунок 3.12 – Сравнение графиков нагрузка-перемещения для численных и лабораторных образцов

Разрушение численных и лабораторных образцов произошло от продавливания и имело схожий характер. Для плит с малым процентом продольного армирования и малой рабочей высотой, чья несущая способность на изгиб несущественно выше, чем их несущая способность на продавливание (PG-2b, PG-4, PG-5, PG-8, PG-9, PG-10), наблюдалось достижение продольной арматурой предела текучести и наличие площадки текучести на графике нагрузка-перемещение.

Для плит с высокими процентами продольного армирования (PG-1, PG-6, PG-7, PG-11) разрушение от продавливания происходило хрупко, без достижения

продольной арматурой предела текучести. Картина трещинообразования образца PG-6 представлена на рисунке 3.13:

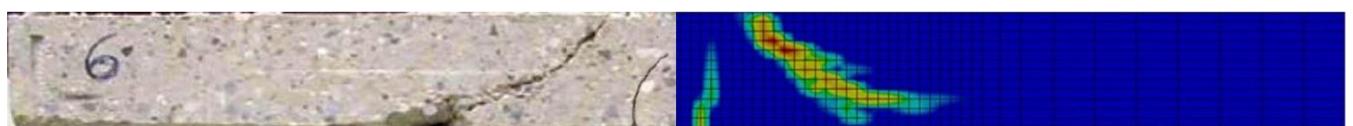


Рисунок 3.13 – Картина трещинообразования образца PG-6

Отдельно стоит отметить образец PG-3, который имел рабочую высоту 456 мм. Несмотря на малый процент продольного армирования растянутой зоны ($\mu = 0,33 \%$) разрушение данного образца произошло хрупко, без достижения продольной арматурой предела текучести и сопровождалось нестабильным ростом трещины. Подобное поведение связано с проявлением масштабного эффекта. Максимальная разница между величинами предельного продавливающего усилия, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 5,7 %. Максимальная разница между перемещениями плиты, соответствующими предельному продавливающему усилию, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 13,5 %. Результаты численных испытаний имеют хорошее соответствие опытным данным.

3.3. Выводы по главе

1. На основании данных известных экспериментальных исследований выполнено численное моделирование бетонных образцов, испытывающих разные виды напряженного состояния. В ходе опытов, в которых на бетонных образцах воссоздавалось двухосное напряженное состояние (двуосное сжатие и сжатие-растяжение), наиболее существенная разница между величинами предельных осевых напряжений, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 7,6 %. Для опытов, где бетонные образцы испытывали трехосное неравномерное сжатие, максимальное отклонение между величинами предельных осевых напряжений составило 6,1 % для первой серии опытов и 5,9 % для второй серии опытов.

2. Для тестирования зависимости результатов от размера конечно-элементной сетки было выполнено численное моделирование шарнирно опертой бетонной балки с надрезом при разных размерах конечно-элементной сетки.

Сравнение кривых нагрузка-перемещение показало, что различие между результатами для образцов с разным размером конечно-элементной сетки несущественно. Таким образом, используемый в разработанной модели энергетический подход является эффективным для решения проблемы локализации необратимых деформаций.

3. В работе выполнялось численное моделирование серии железобетонных балок, нагруженных сосредоточенной силой в середине пролета. Картина трещинообразования, а также графики нагрузка-перемещения имеют аналогичный характер для лабораторных и численных образцов. Максимальная разница между величинами разрушающей нагрузки, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 9,4 %. Максимальная разница между перемещениями балок, соответствующими разрушающей нагрузке, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 13,2 %.

4. В работе было выполнено численное моделирование 11 железобетонных плит, имеющих различную рабочую высоту и процент продольного армирования растянутой зоны. Разрушение численных и лабораторных образцов произошло от продавливания и имело схожий характер. В лабораторных и численных испытаниях наблюдалась схожая картина трещинообразования и графики нагрузка-перемещение. Максимальная разница между величинами предельного продавливающего усилия, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 5,7 %. Максимальная разница между перемещениями плиты, соответствующими предельному продавливающему усилию, полученными в лабораторных и численных испытаниях, составила 13,5 %.

5. Сопоставление результатов лабораторных испытаний и результатов численного эксперимента показывает, что разработанная нелинейная модель бетона позволяет с достаточной точностью моделировать работу бетона при кратковременном статическом нагружении и может быть использована для численных исследований механизма разрушения железобетонных плит от продавливания.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМА РАЗРУШЕНИЯ ПЛИТ ОТ ПРОДАВЛИВАНИЯ

В данной главе представлено описание численных испытаний плит на продавливание, выполненных в ПК «ANSYS» с использованием метода конечных элементов. Всего было выполнено 107 численных испытаний, разделенных на 4 серии. Каждая серия была посвящена исследованию влияния одного из параметров: рабочей высоты h_0 ; пролета среза r_λ ; относительного размера опоры u_0/h_0 ; процента продольного армирования растянутой зоны μ . Основной упор был сделан на испытания плит с большой рабочей высотой, мало представленных в рамках лабораторных испытаний. Все образцы моделировались с учетом симметрии конструкции (четверть плиты).

Нагружение образца выполнялось в два этапа. На первом этапе прикладывалась нагрузка от собственного веса, на втором – выполнялось нагружение перемещениями до разрушения образца. Продольное армирование образцов подбиралось таким образом, чтобы несущая способность на изгиб была больше несущей способности на продавливание и продавливание являлось доминирующим типом разрушения. Разрушение конструкции отслеживается по наличию лавинообразного роста деформаций и участку разупрочнения на графике нагрузка-перемещения. Величина нагрузки для построения графика нагрузка-перемещение отслеживается по реакции опоры конструкции. Для моделирования продольной и поперечной арматуры использовались конечные элементы BEAM188, моделирующие идеальное сцепление между бетоном и арматурой.

Каждому образцу был присвоен шифр в зависимости от его характеристик. Шифр имеет следующий вид:

$$h_0 _ r_\lambda _ u_0 / h_0 _ \mu _ F_{sw} / F_b _ distr,$$

где: h_0 – рабочая высота плиты; r_λ – пролет среза; u_0 / h_0 – периметр опоры, деленный на рабочую высоту; μ – процент продольного армирования растянутой зоны; F_{sw}/F_b – отношение вклада поперечной арматуры и бетона в несущую способность плиты на продавливание согласно СП 63.13330.2018; $distr$ – распределение поперечной

арматуры вокруг опоры: 0 – поперечная арматура отсутствует; 1 – равномерное распределение арматуры; 2 – крестообразное распределение.

4.1. Исследование влияния рабочей высоты

В первой серии исследовалось влияние рабочей высоты плиты на процесс разрушения от продавливания [7]. Всего было выполнено 20 образцов: 5 образцов без поперечного армирования; 15 образцов с поперечной арматурой, имеющие различную интенсивность поперечного армирования и рабочую высоту. Характеристики образцов серии №1 представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Значения параметров испытанных плит серии №1

<i>№</i>	<i>Шифр h₀_r_λ_u₀/h₀_μ_F_{sw}/F_b_distr</i>	<i>h₀, м</i>	<i>r_λ</i>	<i>u₀/h₀</i>	<i>μ, %</i>	<i>F_{sw}/F_b</i>	<i>Распред. попереч. арм.</i>
1	0,3_6_6_1_0_0	0,3	6	6	1	-	-
2	0,6_6_6_1_0_0	0,6	6	6	1	-	-
3	0,9_6_6_1_0_0	0,9	6	6	1	-	-
4	1,2_6_6_1_0_0	1,2	6	6	1	-	-
5	1,5_6_6_1_0_0	1,5	6	6	1	-	-
6	0,3_6_6_1_0,5_1	0,3	6	6	1	0,5	равномер.
7	0,6_6_6_1_0,5_1	0,6	6	6	1	0,5	равномер.
8	0,9_6_6_1_0,5_1	0,9	6	6	1	0,5	равномер.
9	1,2_6_6_1_0,5_1	1,2	6	6	1	0,5	равномер.
10	1,5_6_6_1_0,5_1	1,5	6	6	1	0,5	равномер.
11	0,3_6_6_1_0,75_1	0,3	6	6	1	0,75	равномер.
12	0,6_6_6_1_0,75_1	0,6	6	6	1	0,75	равномер.
13	0,9_6_6_1_0,75_1	0,9	6	6	1	0,75	равномер.
14	1,2_6_6_1_0,75_1	1,2	6	6	1	0,75	равномер.
15	1,5_6_6_1_0,75_1	1,5	6	6	1	0,75	равномер.
16	0,3_6_6_1_1_1	0,3	6	6	1	1,00	равномер.
17	0,6_6_6_1_1_1	0,6	6	6	1	1,00	равномер.
18	0,9_6_6_1_1_1	0,9	6	6	1	1,00	равномер.
19	1,2_6_6_1_1_1	1,2	6	6	1	1,00	равномер.
20	1,5_6_6_1_1_1	1,5	6	6	1	1,00	равномер.

На рисунке 4.1 представлены результаты испытания плит без поперечной арматуры. На рисунках 4.2-4.4 представлены результаты испытания плит с поперечной арматурой. В левой части рисунка изображены графики зависимости нагрузки F от перемещений w, в правой – зависимость величины τ_n/R_{bt} от перемещений, нормализованных относительно рабочей высоты плиты w/h_0 :

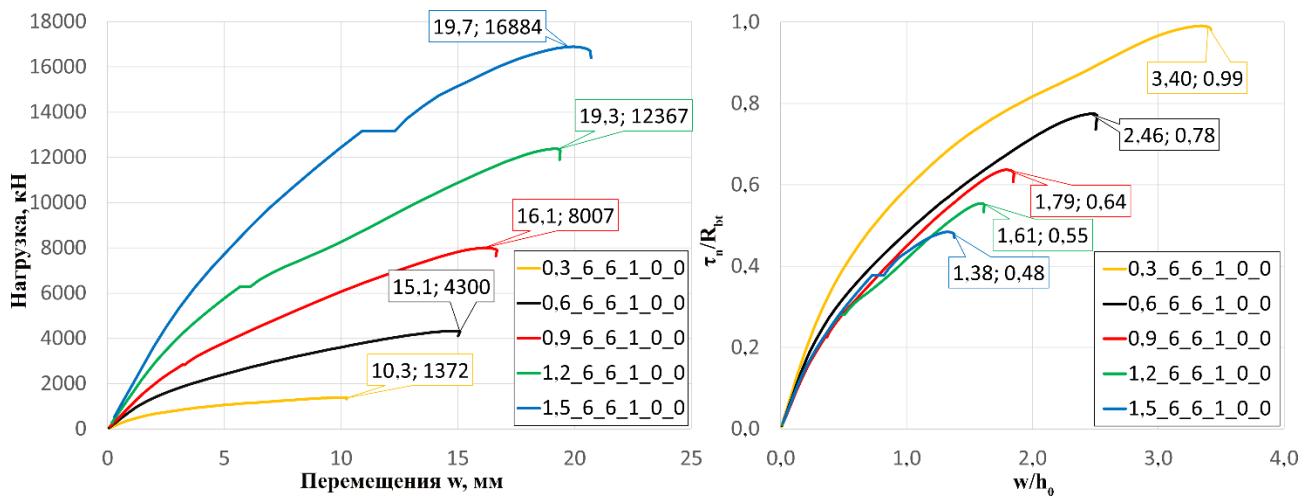


Рисунок 4.1 – Серия №1. Результаты испытаний плит без поперечной арматуры:
зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0
(справа)

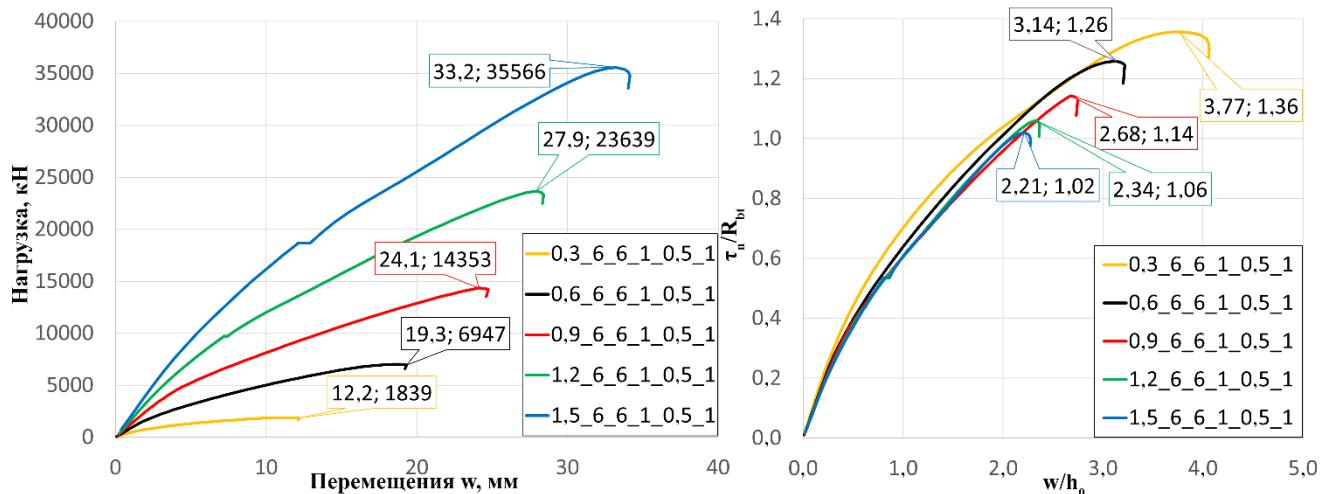


Рисунок 4.2 – Серия №1. Результаты испытаний плит с поперечной арматурой при
 $F_{sw}/F_b = 0,5$: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt}
от w/h_0 (справа)

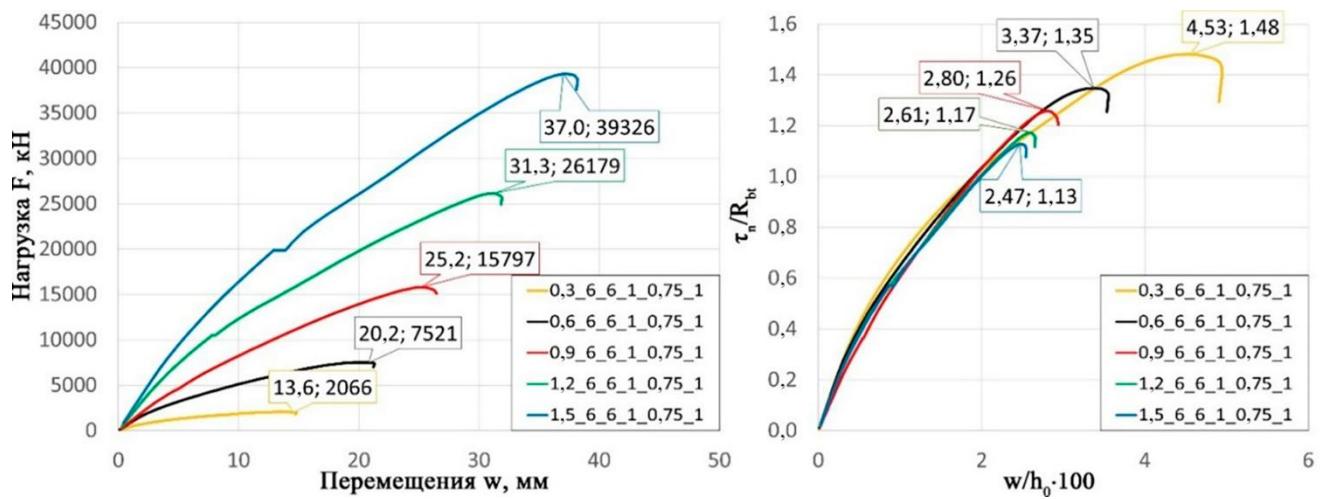


Рисунок 4.3 – Серия №1. Результаты испытаний плит с поперечной арматурой при $F_{sw}/F_b = 0,75$: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

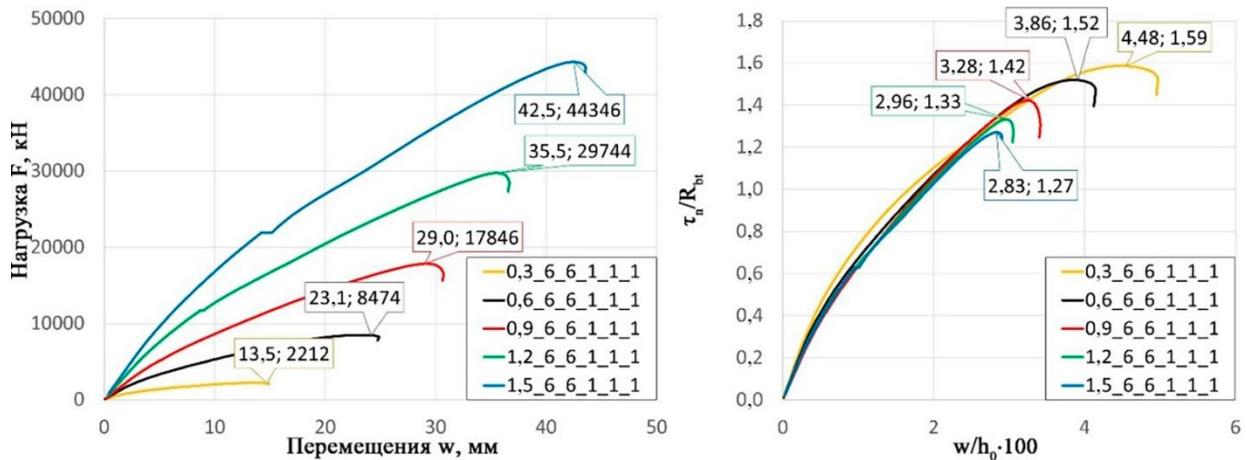


Рисунок 4.4 – Серия №1. Результаты испытаний плит с поперечной арматурой при $F_{sw}/F_b = 1,00$: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

На рисунках 4.5-4.7 представлены картины трещинообразования для плит без поперечной арматуры.

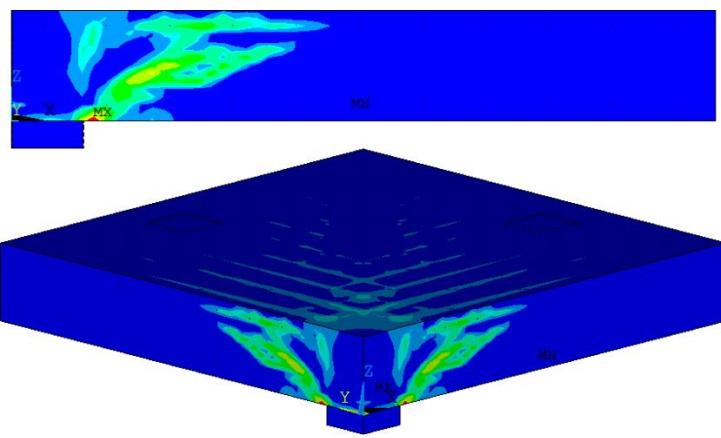


Рисунок 4.5 – Серия №1. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,3$ м без поперечной арматуры

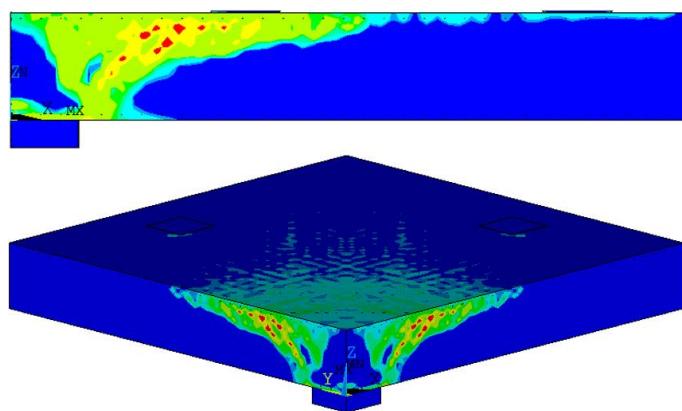


Рисунок 4.6 – Серия №1. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,9$ м без поперечной арматуры

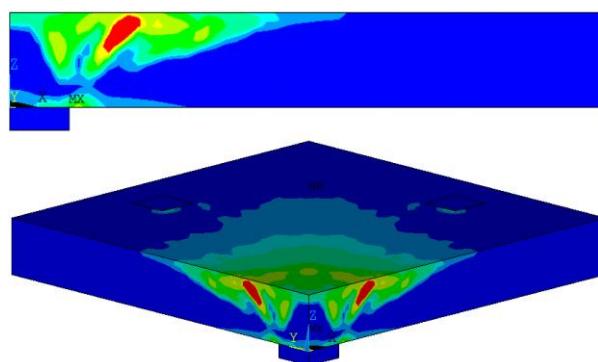


Рисунок 4.7 – Серия №1. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 1,5$ м без поперечной арматуры

На рисунках 4.8-4.10 представлены картины трещинообразования для плит с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона согласно СП 63.13330.2018.

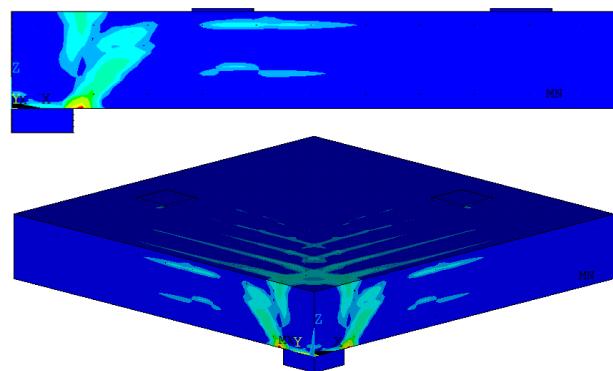


Рисунок 4.8 – Серия №1. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,3$ м с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

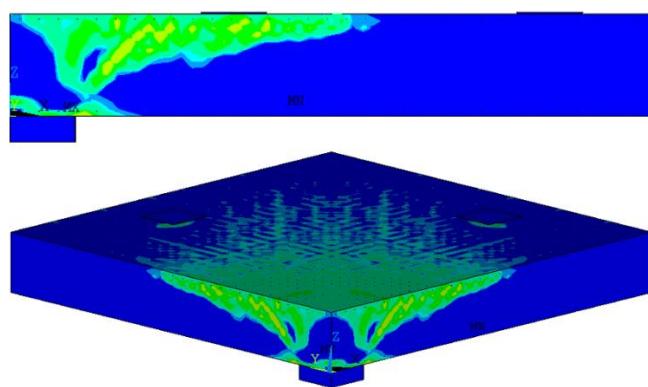


Рисунок 4.9 – Серия №1. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,9$ м с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

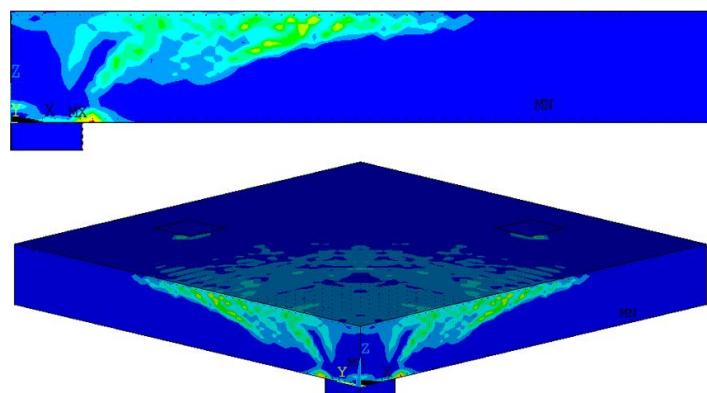


Рисунок 4.10 – Серия №1. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 1,5$ м с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

Результаты испытаний плит серии №1 представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Результаты испытаний плит серии №1

<i>№</i>	<i>Шифр h₀_r_λ_u₀/h₀_μ_F_{sw}/F_b_distr</i>	<i>F_{ult}, кН</i>	<i>τ_n/R_{bt}</i>	<i>Изменение τ_n/R_{bt}, %</i>
1	0,3_6_6_1_0_0	1372	0,98	51,02
2	0,6_6_6_1_0_0	4300	0,77	
3	0,9_6_6_1_0_0	8007	0,64	
4	1,2_6_6_1_0_0	12367	0,55	
5	1,5_6_6_1_0_0	16884	0,48	
6	0,3_6_6_1_0,5_1	1939	1,39	26,62
7	0,6_6_6_1_0,5_1	6947	1,24	
8	0,9_6_6_1_0,5_1	14353	1,14	
9	1,2_6_6_1_0,5_1	23639	1,06	
10	1,5_6_6_1_0,5_1	35567	1,02	
11	0,3_6_6_1_0,75_1	2066	12,3	23,65
12	0,6_6_6_1_0,75_1	7521	19,7	
13	0,9_6_6_1_0,75_1	15797	21	
14	1,2_6_6_1_0,75_1	26179	30,6	
15	1,5_6_6_1_0,75_1	39325	37	
16	0,3_6_6_1_1_1	2212	15,8	20,13
17	0,6_6_6_1_1_1	8474	24,8	
18	0,9_6_6_1_1_1	17846	27	
19	1,2_6_6_1_1_1	29744	34,3	
20	1,5_6_6_1_1_1	44346	42,5	

Изменение величины τ_n/R_{bt} от рабочей высоты h_0 для опытов серии №1 представлено на рисунке 4.11.

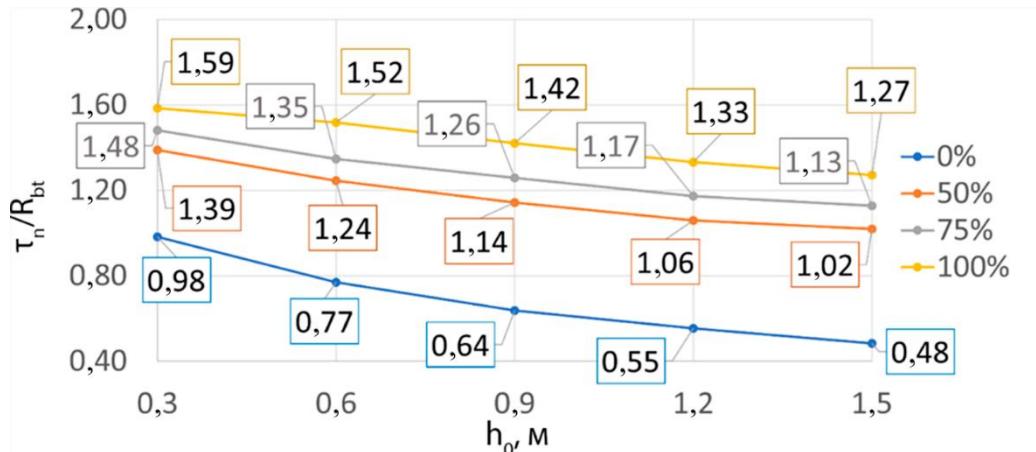


Рисунок 4.11 – Серия №1. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от величины h_0 для плит с разной интенсивностью поперечного армирования

Несмотря на то, что с увеличением рабочей высоты плиты ее несущая способность и деформации, соответствующие наступлению предельного

состояния, растут, величина нормализованных номинальных напряжений τ_n/R_{bt} и перемещения, нормализованные относительно рабочей высоты плиты w/h_0 , – падают. Подобное поведение можно объяснить влиянием масштабного эффекта. Уменьшение τ_n/R_{bt} с ростом h_0 зависит от интенсивности поперечной арматуры: для плит без поперечного армирования уменьшение τ_n/R_{bt} с ростом h_0 с 0,3 м до 1,5 м составило 51,02 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 0,50$ изменение составило 26,62 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 0,75$ изменение составило 23,65 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 1,00$ изменение составило 20,13 %. Уменьшение влияния масштабного эффекта при росте интенсивности поперечного армирования можно объяснить участием арматуры в уравнении энергетического баланса: поперечная арматура поглощает энергию и позволяет осуществлять стабильный рост трещины. Другими словами, рост интенсивности поперечного армирования способствует увеличению критической длины трещины плиты, при достижении которой наступает лавинообразный рост деформаций и разрушение конструкции.

4.2. Исследование влияния пролета среза

Во второй серии исследовалось влияние пролета среза r_λ на несущую способность плиты при продавливании. Всего было выполнено 30 образцов. Образцы имели различную рабочую высоту и пролет среза. Половина образцов выполнялась без поперечного армирования, вторая половина – с поперечным армированием. Характеристики образцов серии №2 представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Значения параметров испытанных плит серии №2

<i>№</i>	<i>Шифр h₀-r_λ-u₀/h₀-μ-F_{sw}/F_b_distr</i>	<i>h₀, м</i>	<i>r_λ</i>	<i>u₀</i>	<i>μ, %</i>	<i>F_{sw}/F_b</i>	<i>Распред. попереч. арм.</i>
1	0,3_2_6_1_0_0	0,3	2	6	1	-	-
2	0,3_4_6_1_0_0	0,3	4	6	1	-	-
3	0,3_6_6_1_0_0	0,3	6	6	1	-	-
4	0,3_8_6_1_0_0	0,3	8	6	1	-	-
5	0,3_10_6_1_0,75_1	0,3	10	6	1	-	-
6	0,3_2_6_1_0,75_1	0,3	2	6	1	0,75	равномер.
7	0,3_4_6_1_0,75_1	0,3	4	6	1	0,75	равномер.
8	0,3_6_6_1_0,75_1	0,3	6	6	1	0,75	равномер.
9	0,3_8_6_1_0,75_1	0,3	8	6	1	0,75	равномер.
10	0,3_10_6_1_0,75_1	0,3	10	6	1	0,75	равномер.
11	0,6_2_6_1_0_0	0,6	2	6	1	-	-
12	0,6_4_6_1_0_0	0,6	4	6	1	-	-
13	0,6_6_6_1_0_0	0,6	6	6	1	-	-
14	0,6_8_6_1_0_0	0,6	8	6	1	-	-
15	0,6_10_6_1_0_0	0,6	10	6	1	-	-
16	0,6_10_6_1_0,75_1	0,6	2	6	1	0,75	равномер.
17	0,6_2_6_1_0,75_1	0,6	4	6	1	0,75	равномер.
18	0,6_4_6_1_0,75_1	0,6	6	6	1	0,75	равномер.
19	0,6_6_6_1_0,75_1	0,6	8	6	1	0,75	равномер.
20	0,6_8_6_1_0,75_1	0,6	10	6	1	0,75	равномер.
21	0,9_2_6_1_0_0	0,9	2	6	1	-	-
22	0,9_4_6_1_0_0	0,9	4	6	1	-	-
23	0,9_6_6_1_0_0	0,9	6	6	1	-	-
24	0,9_8_6_1_0_0	0,9	8	6	1	-	-
25	0,9_10_6_1_0_0	0,9	10	6	1	-	-
26	0,9_10_6_1_0,75_1	0,9	2	6	1	0,75	равномер.
27	0,9_2_6_1_0,75_1	0,9	4	6	1	0,75	равномер.
28	0,9_4_6_1_0,75_1	0,9	6	6	1	0,75	равномер.
29	0,9_6_6_1_0,75_1	0,9	8	6	1	0,75	равномер.
30	0,9_8_6_1_0,75_1	0,9	10	6	1	0,75	равномер.

На рисунках 4.12-4.14 представлены результаты испытания плит без поперечной арматуры.

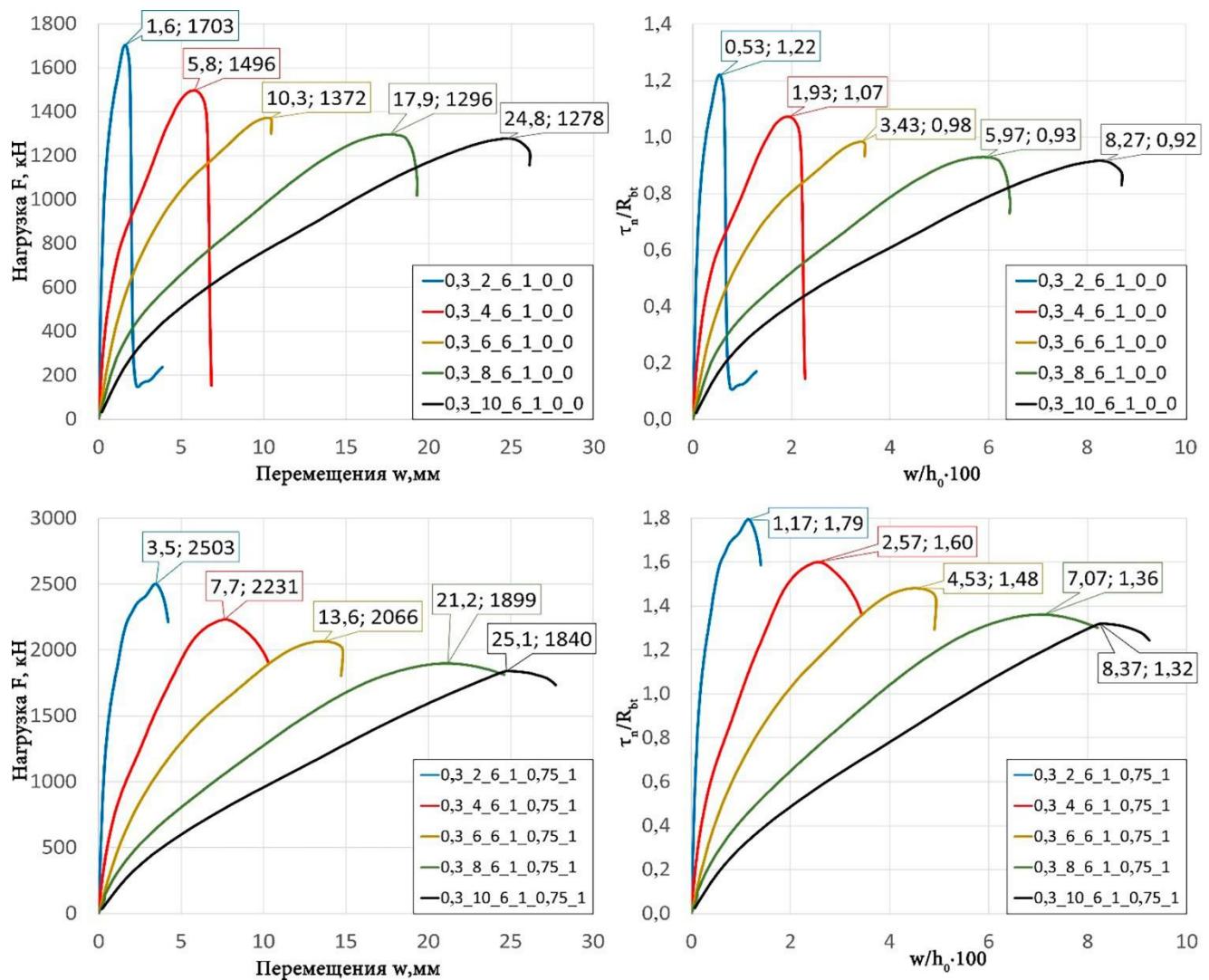


Рисунок 4.12 – Серия №2. Результаты испытаний плит с рабочей высотой $h_0 = 0,3$ м: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

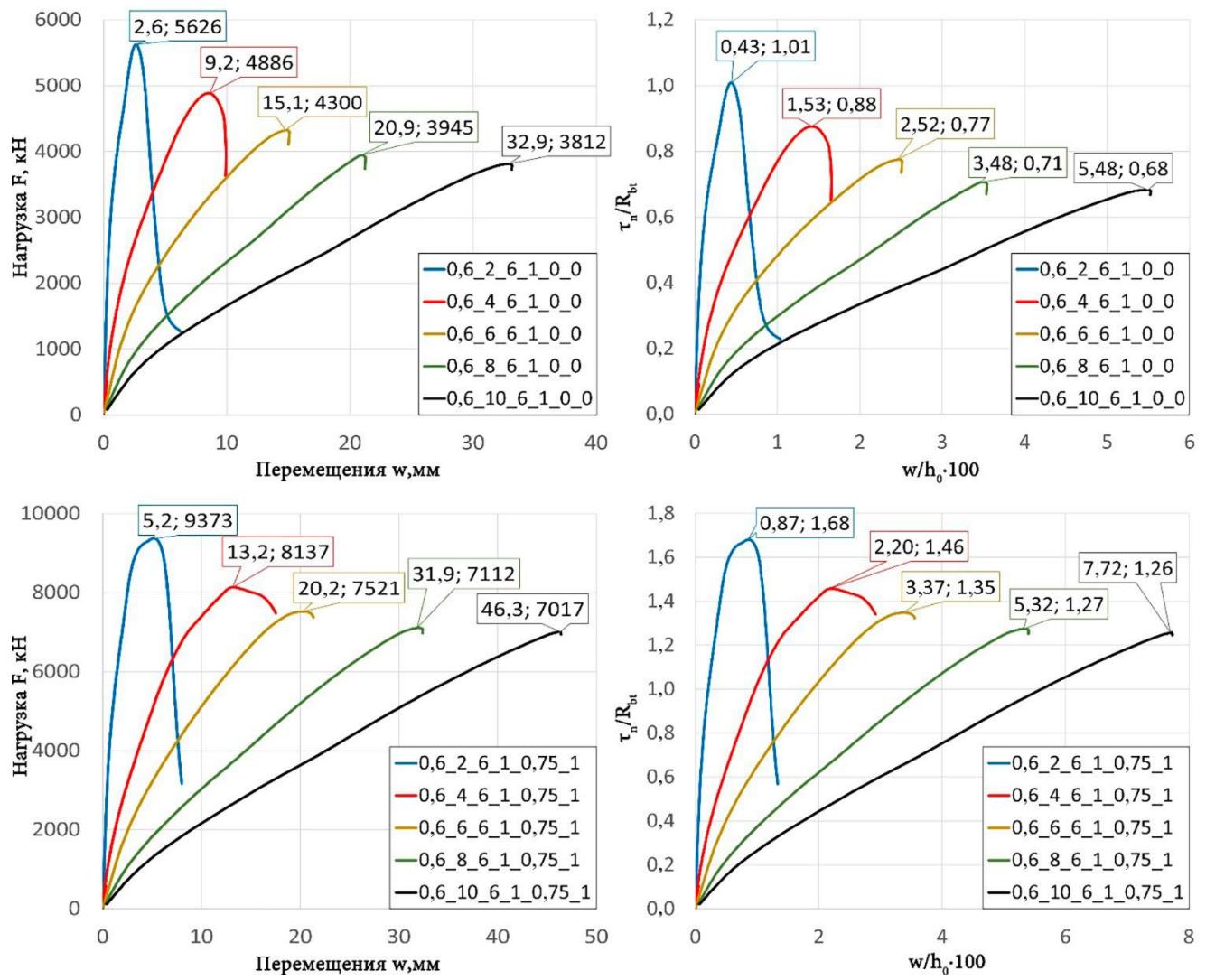


Рисунок 4.13 – Серия №2. Результаты испытаний плит с рабочей высотой $h_0 = 0,6$ м: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

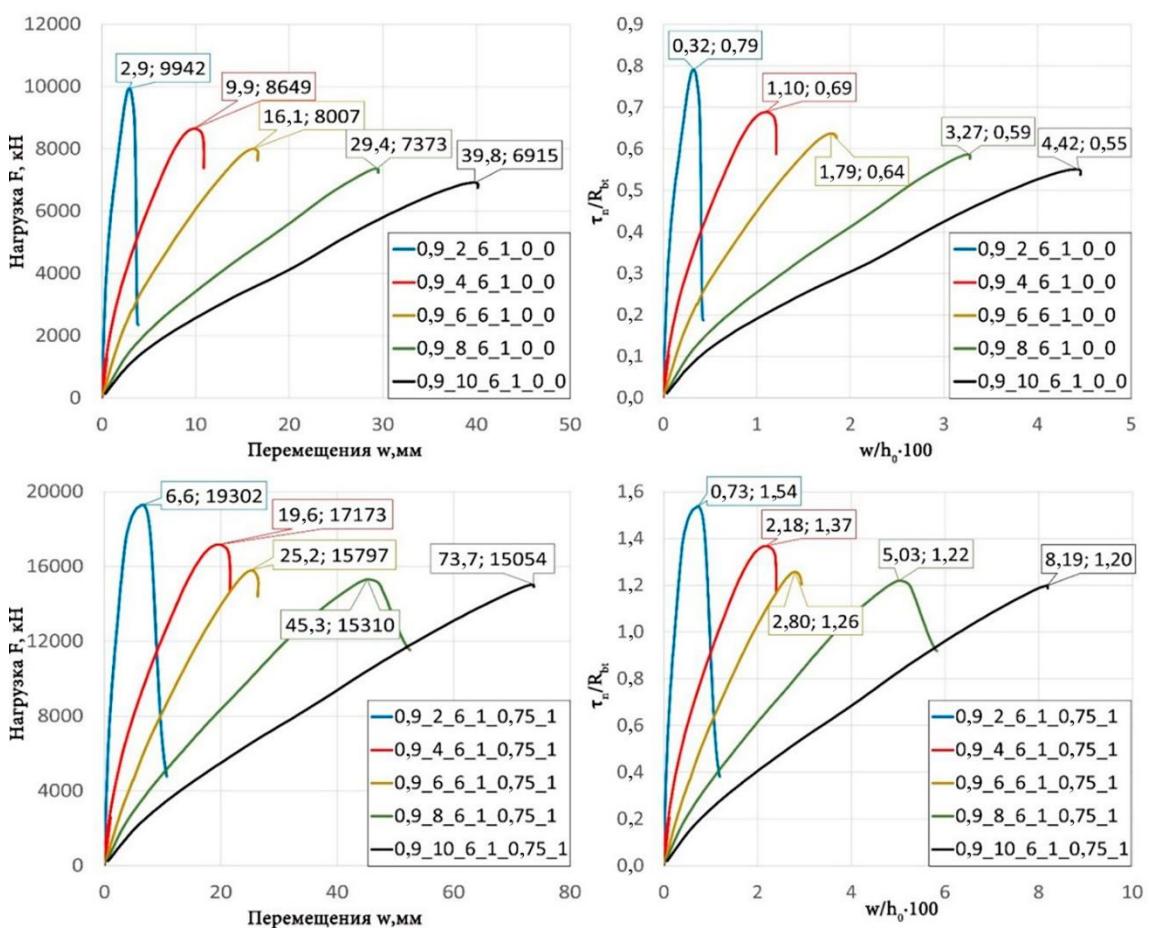


Рисунок 4.14 – Серия №2. Результаты испытаний плит с рабочей высотой $h_0 = 0,9$ м: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

На рисунках 4.15-4.17 представлены картины трещинообразования для плит без поперечной арматуры с $h_0 = 0,6$ м с разными величинами пролета среза r_λ .

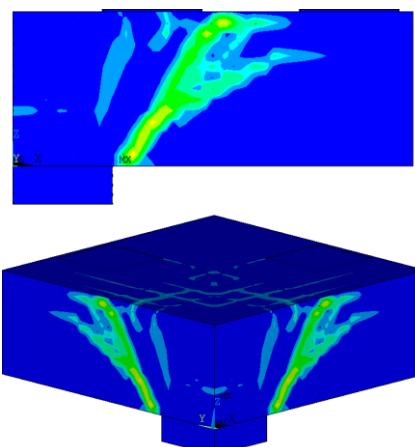


Рисунок 4.15 – Серия №2. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м, $r_\lambda = 2$ без поперечной арматуры

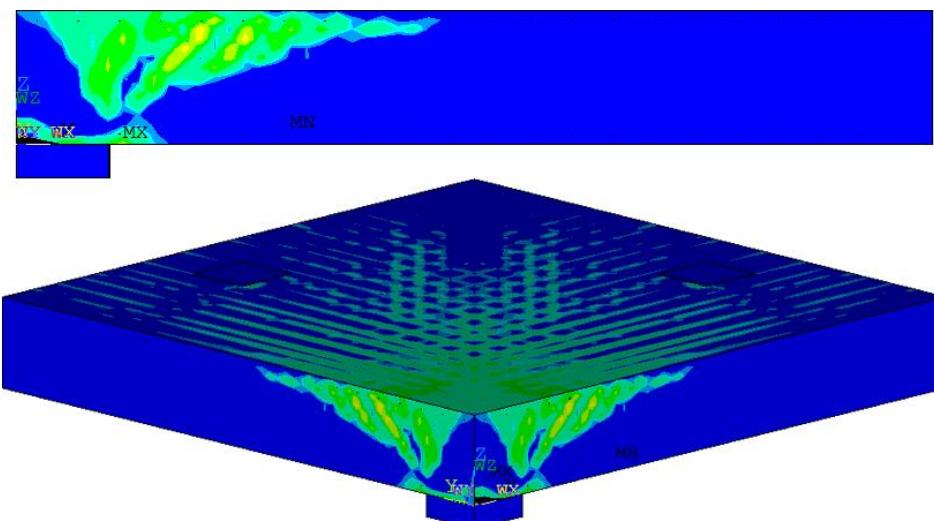


Рисунок 4.16 – Серия №2. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м,
 $r_\lambda = 6$ без поперечной арматуры

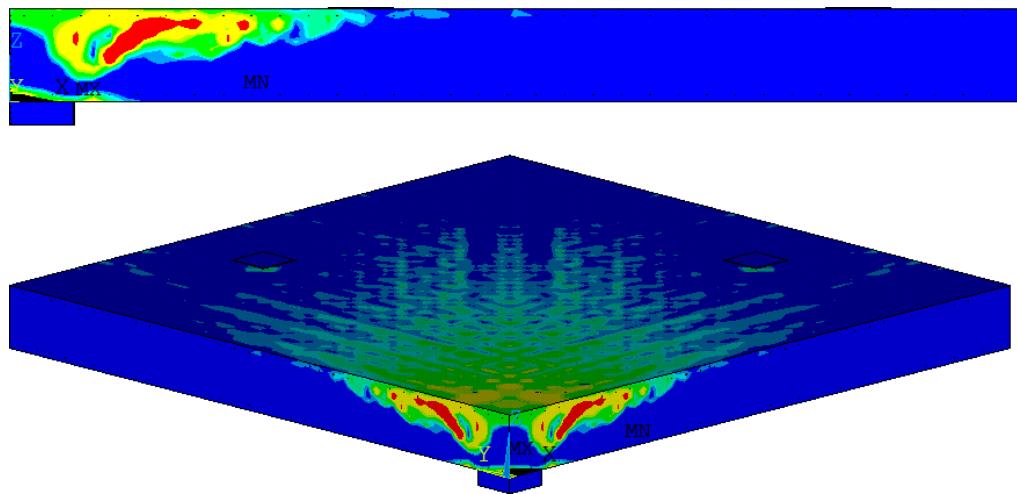


Рисунок 4.17 – Серия №2. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м,
 $r_\lambda = 10$ без поперечной арматуры

На рисунках 4.18-4.20 представлены картины трещинообразования для плит с поперечной арматурой с $h_0 = 0,6$ м с разными величинами пролета среза r_λ .

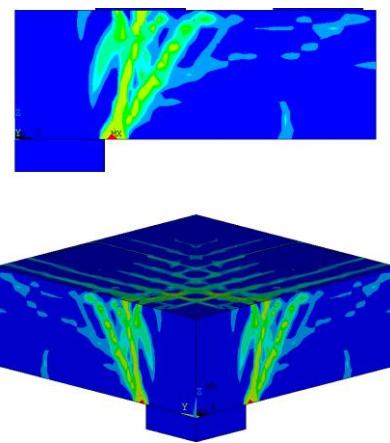


Рисунок 4.18 – Серия №2. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м, $r_\lambda = 2$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

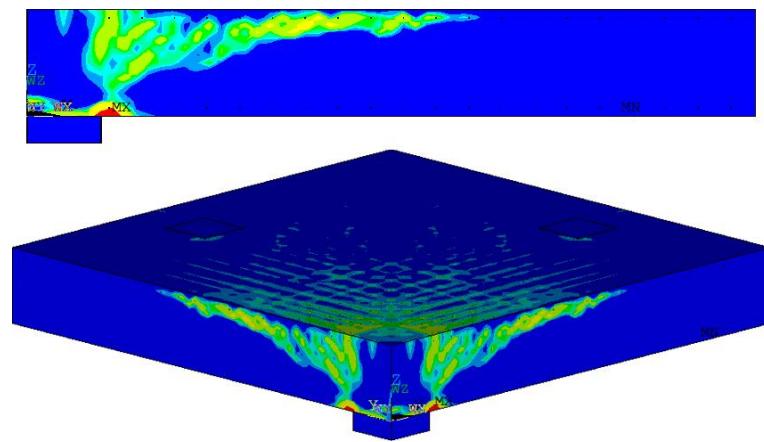


Рисунок 4.19 – Серия №2. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м, $r_\lambda = 6$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

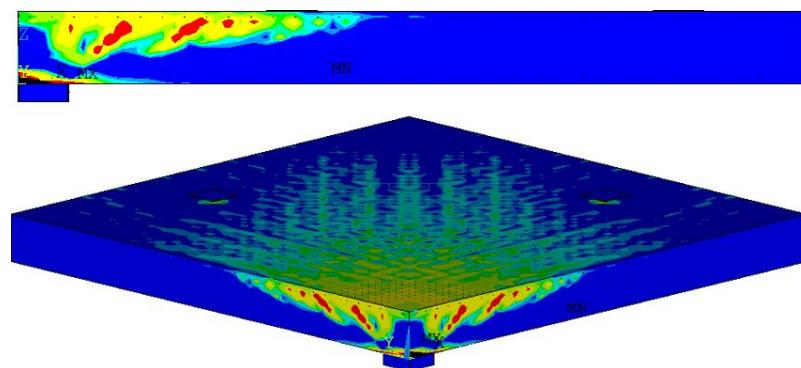


Рисунок 4.20 – Серия №2. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м, $r_\lambda = 10$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

Результаты испытаний плит серии №2 представлены в таблице

4.4.

Таблица 4.4 – Результаты испытаний плит серии №2

№	Шифр $h_0 \cdot r_\lambda \cdot u_0 / h_0 \cdot \mu \cdot F_{sw} / F_b \cdot distr$	F_{ult}, кН	τ_n / R_{bt}	Изменение τ_n / R_{bt}, %
1	0,3_2_6_1_0_0	1703	1,22	24,59
2	0,3_4_6_1_0_0	1496	1,07	
3	0,3_6_6_1_0_0	1372	0,98	
4	0,3_8_6_1_0_0	1296	0,93	
5	0,3_10_6_1_0,75_1	1278	0,92	
6	0,3_2_6_1_0,75_1	2503	1,79	26,26
7	0,3_4_6_1_0,75_1	2231	1,60	
8	0,3_6_6_1_0,75_1	2066	1,48	
9	0,3_8_6_1_0,75_1	1899	1,36	
10	0,3_10_6_1_0,75_1	1840	1,32	
11	0,6_2_6_1_0_0	5626	1,01	32,67
12	0,6_4_6_1_0_0	4886	0,88	
13	0,6_6_6_1_0_0	4300	0,77	
14	0,6_8_6_1_0_0	3945	0,71	
15	0,6_10_6_1_0_0	3812	0,68	
16	0,6_10_6_1_0,75_1	9373	1,68	25,00
17	0,6_2_6_1_0,75_1	8137	1,46	
18	0,6_4_6_1_0,75_1	7521	1,35	
19	0,6_6_6_1_0,75_1	7112	1,27	
20	0,6_8_6_1_0,75_1	7017	1,26	
21	0,9_2_6_1_0_0	9942	0,79	30,38
22	0,9_4_6_1_0_0	8649	0,69	
23	0,9_6_6_1_0_0	8007	0,64	
24	0,9_8_6_1_0_0	7373	0,59	
25	0,9_10_6_1_0_0	6915	0,55	
26	0,9_10_6_1_0,75_1	19302	1,54	22,08
27	0,9_2_6_1_0,75_1	17173	1,37	
28	0,9_4_6_1_0,75_1	15797	1,26	
29	0,9_6_6_1_0,75_1	15310	1,22	
30	0,9_8_6_1_0,75_1	15054	1,20	

На рисунках 4.21, 4.22 представлена зависимость величины τ_n / R_{bt} от величины пролета среза r_λ .

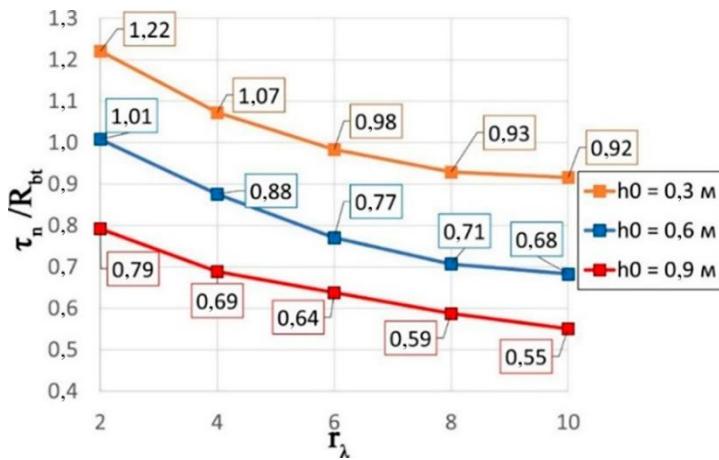


Рисунок 4.21 – Серия №2. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от r_λ для плит без поперечной арматуры

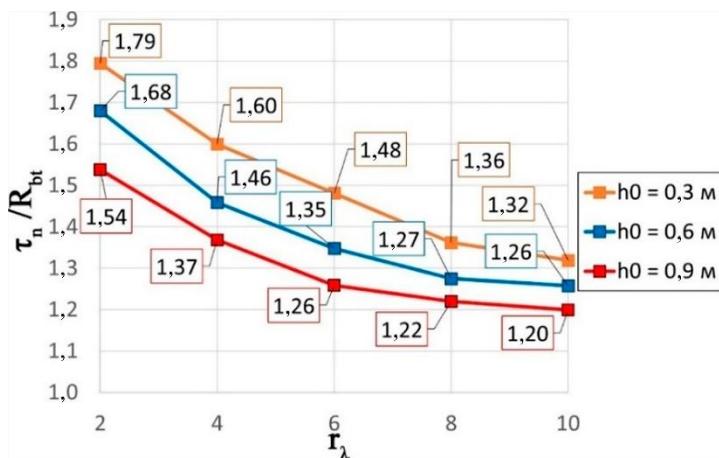


Рисунок 4.22 – Серия №2. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от r_λ для плит с поперечной арматурой

На основании полученных результатов можно заключить, что с уменьшением величины пролета среза r_λ несущая способность плиты увеличивается. Наиболее интенсивный рост несущей способности наблюдается при $r_\lambda \leq 4$. Увеличение номинальных нормализованных касательных напряжений τ_n/R_{bt} с уменьшением r_λ с 10 до 2 было примерно одинаковым для плит с поперечным армированием и без него и составило в среднем 26,83 %.

4.3. Исследование влияния относительного размера опоры

В третьей серии исследовалось влияние относительного размера опоры u_0/h_0 на несущую способность плит при продавливании. Всего было выполнено 27 образцов. Образцы имели различную рабочую высоту и величины относительного размера опоры. Треть образцов выполнялась без поперечного армирования, треть

– с поперечной арматурой, имеющей равномерное распределение вокруг опоры, треть – с поперечной арматурой, имеющей крестообразное распределение вокруг опоры. Характеристики образцов серии №3 представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Значения параметров испытанных плит серии №3

<i>№</i>	<i>Шифр</i> <i>h₀_ r_λ_ u₀/h₀_</i> <i>μ_ F_{sw}/F_b_distr</i>	<i>h₀, м</i>	<i>r_λ</i>	<i>u₀</i>	<i>μ, %</i>	<i>F_{sw}/F_b</i>	<i>Распред.</i> <i>попереч.</i> <i>арм.</i>
1	0,3_6_6_1_0_0	0,3	6	6	1	-	-
2	0,3_6_8_1_0_0	0,3	6	8	1	-	-
3	0,3_6_12_1_0_0	0,3	6	12	1	-	-
4	0,3_6_6_1_0,75_1	0,3	6	6	1	0,75	равномер.
5	0,3_6_8_1_0,75_1	0,3	6	8	1	0,75	равномер.
6	0,3_6_12_1_0,75_1	0,3	6	12	1	0,75	равномер.
7	0,3_6_6_1_0,75_2	0,3	6	6	1	0,75	крест
8	0,3_6_8_1_0,75_2	0,3	6	8	1	0,75	крест
9	0,3_6_12_1_0,75_2	0,3	6	12	1	0,75	крест
10	0,6_6_6_1_0_0	0,6	6	6	1	-	-
11	0,6_6_8_1_0_0	0,6	6	8	1	-	-
12	0,6_6_12_1_0_0	0,6	6	12	1	-	-
13	0,6_6_6_1_0,75_1	0,6	6	6	1	0,75	равномер.
14	0,6_6_8_1_0,75_1	0,6	6	8	1	0,75	равномер.
15	0,6_6_12_1_0,75_1	0,6	6	12	1	0,75	равномер.
16	0,6_6_6_1_0,75_2	0,6	6	6	1	0,75	крест
17	0,6_6_8_1_0,75_2	0,6	6	8	1	0,75	крест
18	0,6_6_12_1_0,75_2	0,6	6	12	1	0,75	крест
19	0,9_6_6_1_0_0	0,9	6	6	1	-	-
20	0,9_6_8_1_0_0	0,9	6	8	1	-	-
21	0,9_6_12_1_0_0	0,9	6	12	1	-	-
22	0,9_6_6_1_0,75_1	0,9	6	6	1	0,75	равномер.
23	0,9_6_8_1_0,75_1	0,9	6	8	1	0,75	равномер.
24	0,9_6_12_1_0,75_1	0,9	6	12	1	0,75	равномер.
25	0,9_6_6_1_0,75_2	0,9	6	6	1	0,75	крест
26	0,9_6_8_1_0,75_2	0,9	6	8	1	0,75	крест
27	0,9_6_12_1_0,75_2	0,9	6	12	1	0,75	крест

На рисунках 4.23-4.25 представлены результаты испытания плит без поперечной арматуры:

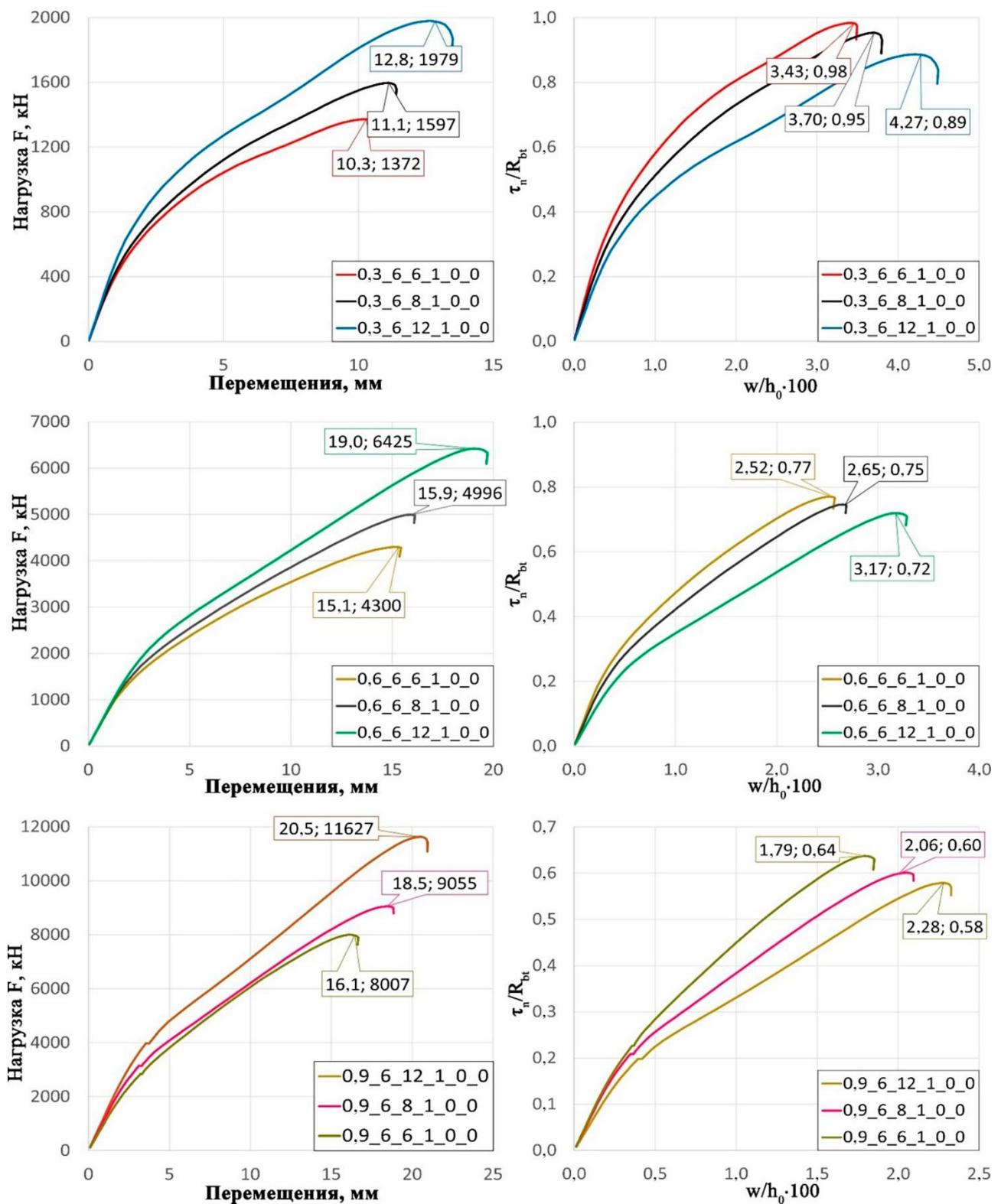


Рисунок 4.23 – Серия №3. Результаты испытаний плит без поперечной арматуры:
зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n / R_{bt} от w/h_0
(справа)

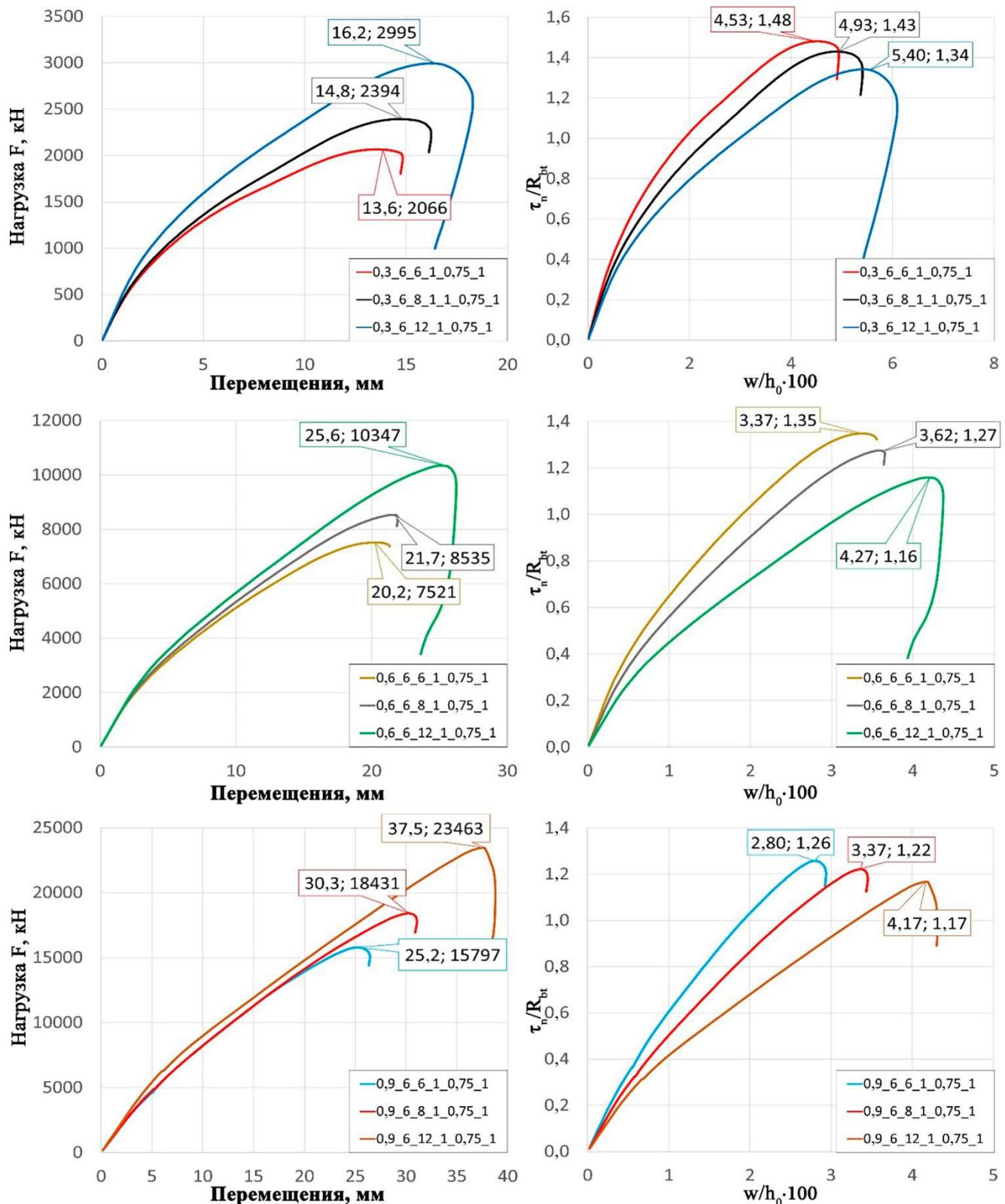


Рисунок 4.24 – Серия №3. Результаты испытаний плит с равномерным распределением поперечной арматуры вокруг опоры: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

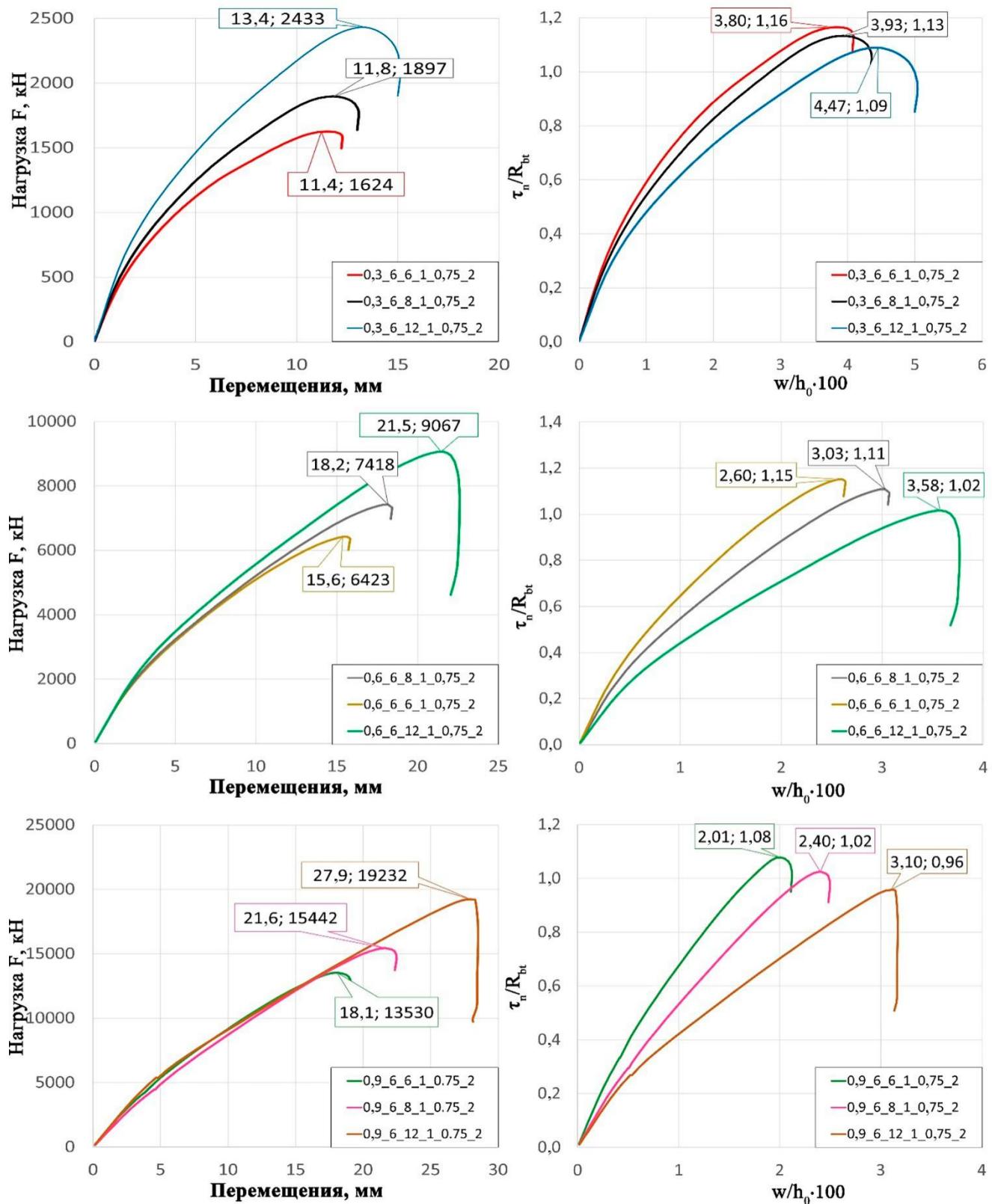


Рисунок 4.25 – Серия №3. Результаты испытаний плит с крестообразным распределением поперечной арматуры вокруг опоры: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n / R_{bt} от $w/h_0 \cdot 100$ (справа)

Результаты третьей серии испытаний сведены в таблицу

4.6.

Таблица 4.6 – Результаты испытаний плит серии №3

<i>№</i>	<i>Шифр h₀ r_λ u₀/h₀ μ F_{sw}/F_b distr</i>	F _{ult} , кН	τ _n /R _{bt}	Изменение τ _n /R _{bt} , %
1	0,3_6_6_1_0_0	1372	0,98	9,18
2	0,3_6_8_1_0_0	1597	0,95	
3	0,3_6_12_1_0_0	1979	0,89	
4	0,3_6_6_1_0,75_1	2066	1,48	9,46
5	0,3_6_8_1_0,75_1	2394	1,43	
6	0,3_6_12_1_0,75_1	2995	1,34	
7	0,3_6_6_1_0,75_2	1624	1,16	6,03
8	0,3_6_8_1_0,75_2	1897	1,13	
9	0,3_6_12_1_0,75_2	2433	1,09	
10	0,6_6_6_1_0_0	4300	0,77	6,49
11	0,6_6_8_1_0_0	4996	0,75	
12	0,6_6_12_1_0_0	6425	0,72	
13	0,6_6_6_1_0,75_1	7521	1,35	14,07
14	0,6_6_8_1_0,75_1	8535	1,27	
15	0,6_6_12_1_0,75_1	10347	1,16	
16	0,6_6_6_1_0,75_2	6423	1,15	11,30
17	0,6_6_8_1_0,75_2	7418	1,11	
18	0,6_6_12_1_0,75_2	9067	1,02	
19	0,9_6_6_1_0_0	8007	0,64	9,38
20	0,9_6_8_1_0_0	9055	0,60	
21	0,9_6_12_1_0_0	11627	0,58	
22	0,9_6_6_1_0,75_1	15797	1,26	7,14
23	0,9_6_8_1_0,75_1	18431	1,22	
24	0,9_6_12_1_0,75_1	23463	1,17	
25	0,9_6_6_1_0,75_2	13530	1,08	11,11
26	0,9_6_8_1_0,75_2	15442	1,02	
27	0,9_6_12_1_0,75_2	19232	0,96	

На рисунках 4.26-4.28 представлена зависимость изменения величины τ_n/R_{bt} в зависимости от величины относительного размера опоры u₀/h₀ для различных значений рабочей высоты.

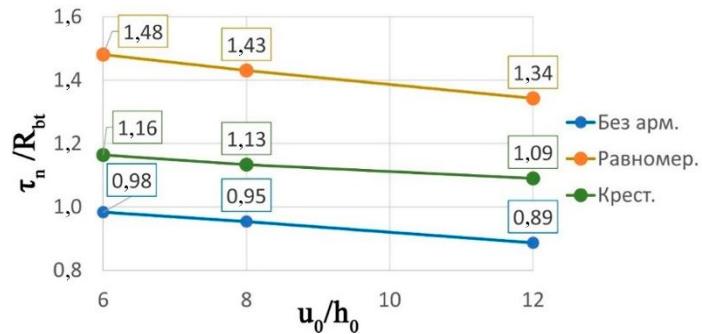


Рисунок 4.26 – Серия №3. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от u_0/h_0 для плит с рабочей высотой $h_0 = 0,3$ м

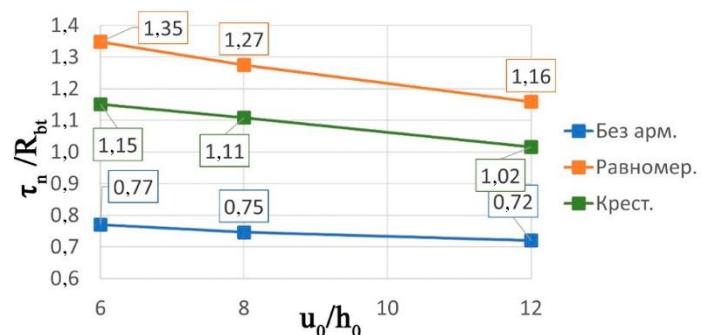


Рисунок 4.27 – Серия №3. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от u_0/h_0 для плит с рабочей высотой $h_0 = 0,6$ м

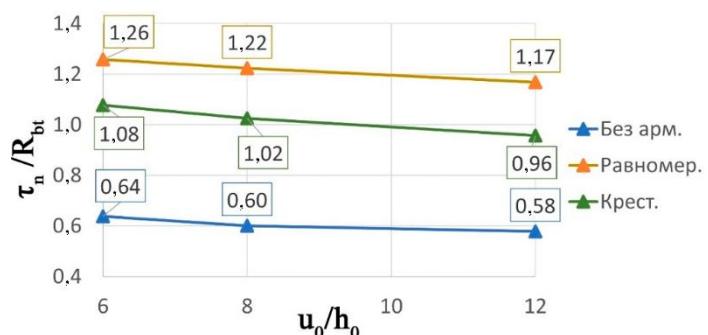


Рисунок 4.28 – Серия №3. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от u_0/h_0 для плит с рабочей высотой $h_0 = 0,9$ м

На рисунке 4.29 представлено распределение повреждений в приопорной области в зависимости от относительного размера опоры u_0/h_0 и типа поперечного армирования.

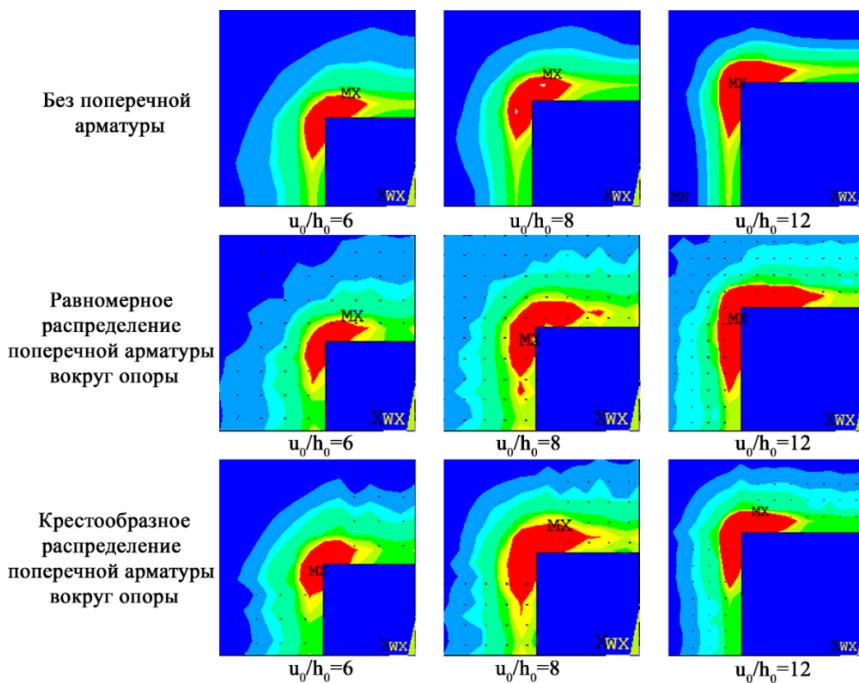


Рисунок 4.29 – Серия №3. Распределение повреждений в приопорной области в зависимости от относительного размера опоры u_0/h_0 и типа поперечного армирования

Согласно полученным результатам, увеличение относительного размера опоры u_0/h_0 приводит к росту несущей способности и деформаций, соответствующих наступлению предельного состояния. Подобное поведение объясняется увеличением периметра контура расчетного поперечного сечения и. Рост параметра u_0/h_0 также приводит к уменьшению величины τ_n/R_{bt} . Для плит без поперечной арматуры снижение τ_n/R_{bt} с ростом u_0/h_0 в среднем составило 8,35 %, для плит с равномерным распределением арматуры – 10,23 %, для плит с крестообразным распределением арматуры – 8,46 %. Таким образом, уменьшение τ_n/R_{bt} практически не зависит от наличия поперечного армирования и его распределения вокруг опоры. Следовательно, изменение u_0 влияет не только на вклад бетона F_b в несущую способность плиты, но и на вклад поперечного армирования F_{sw} .

4.4. Исследование влияния процента продольного армирования растянутой зоны плиты

В четвертой серии исследовалось влияние процента продольного армирования растянутой зоны плиты μ на несущую способность плиты при

продавливании. Всего было выполнено 30 образцов. Образцы имели разную рабочую высоту и процент продольного армирования растянутой зоны плиты. Половина образцов выполнялись без поперечного армирования, вторая половина – с поперечным армированием. Характеристики образцов серии №4 представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.7 – Значения параметров испытанных плит серии №4

<i>№</i>	<i>Шифр h₀_ r_λ_u₀/h₀_ μ_ F_{sw}/F_b_distr</i>	<i>h₀, м</i>	<i>r_λ</i>	<i>u₀</i>	<i>μ, %</i>	<i>F_{sw}/F_b</i>	<i>Распред. попереч. арм.</i>
1	0,3_6_6_0,5_0_0	0,3	6	6	0,5	-	-
2	0,3_6_6_0,75_0_0	0,3	6	6	0,75	-	-
3	0,3_6_6_1_0_0	0,3	6	6	1	-	-
4	0,3_6_6_1,5_0_0	0,3	6	6	1,5	-	-
5	0,3_6_6_2_0_0	0,3	6	6	2	-	-
6	0,3_6_6_0,5_0,75_1	0,3	6	6	0,5	0,75	равномер.
7	0,3_6_6_0,75_0,75_1	0,3	6	6	0,75	0,75	равномер.
8	0,3_6_6_1_0,75_1	0,3	6	6	1	0,75	равномер.
9	0,3_6_6_1,5_0,75_1	0,3	6	6	1,5	0,75	равномер.
10	0,3_6_6_2_0,75_1	0,3	6	6	2	0,75	равномер.
11	0,6_6_6_0,5_0_0	0,6	6	6	0,5	-	-
12	0,6_6_6_0,75_0_0	0,6	6	6	0,75	-	-
13	0,6_6_6_1_0_0	0,6	6	6	1	-	-
14	0,6_6_6_1,5_0_0	0,6	6	6	1,5	-	-
15	0,6_6_6_2_0_0	0,6	6	6	2	-	-
16	0,6_6_6_0,5_0,75_1	0,6	6	6	0,5	0,75	равномер.
17	0,6_6_6_0,75_0,75_1	0,6	6	6	0,75	0,75	равномер.
18	0,6_6_6_1_0,75_1	0,6	6	6	1	0,75	равномер.
19	0,6_6_6_1,5_0,75_1	0,6	6	6	1,5	0,75	равномер.
20	0,6_6_6_2_0,75_1	0,6	6	6	2	0,75	равномер.
21	0,9_6_6_0,5_0_0	0,9	6	6	0,5	-	-
22	0,9_6_6_0,75_0_0	0,9	6	6	0,75	-	-
23	0,9_6_6_1_0_0	0,9	6	6	1	-	-
24	0,9_6_6_1,5_0_0	0,9	6	6	1,5	-	-
25	0,9_6_6_2_0_0	0,9	6	6	2	-	-
26	0,9_6_6_0,5_0,75_1	0,9	6	6	0,5	0,75	равномер.
27	0,9_6_6_0,75_0,75_1	0,9	6	6	0,75	0,75	равномер.
28	0,9_6_6_1_0,75_1	0,9	6	6	1	0,75	равномер.
29	0,9_6_6_1,5_0,75_1	0,9	6	6	1,5	0,75	равномер.
30	0,9_6_6_2_0,75_1	0,9	6	6	2	0,75	равномер.

На рисунках 4.30-4.32 представлены результаты испытания плит четвертой серии:

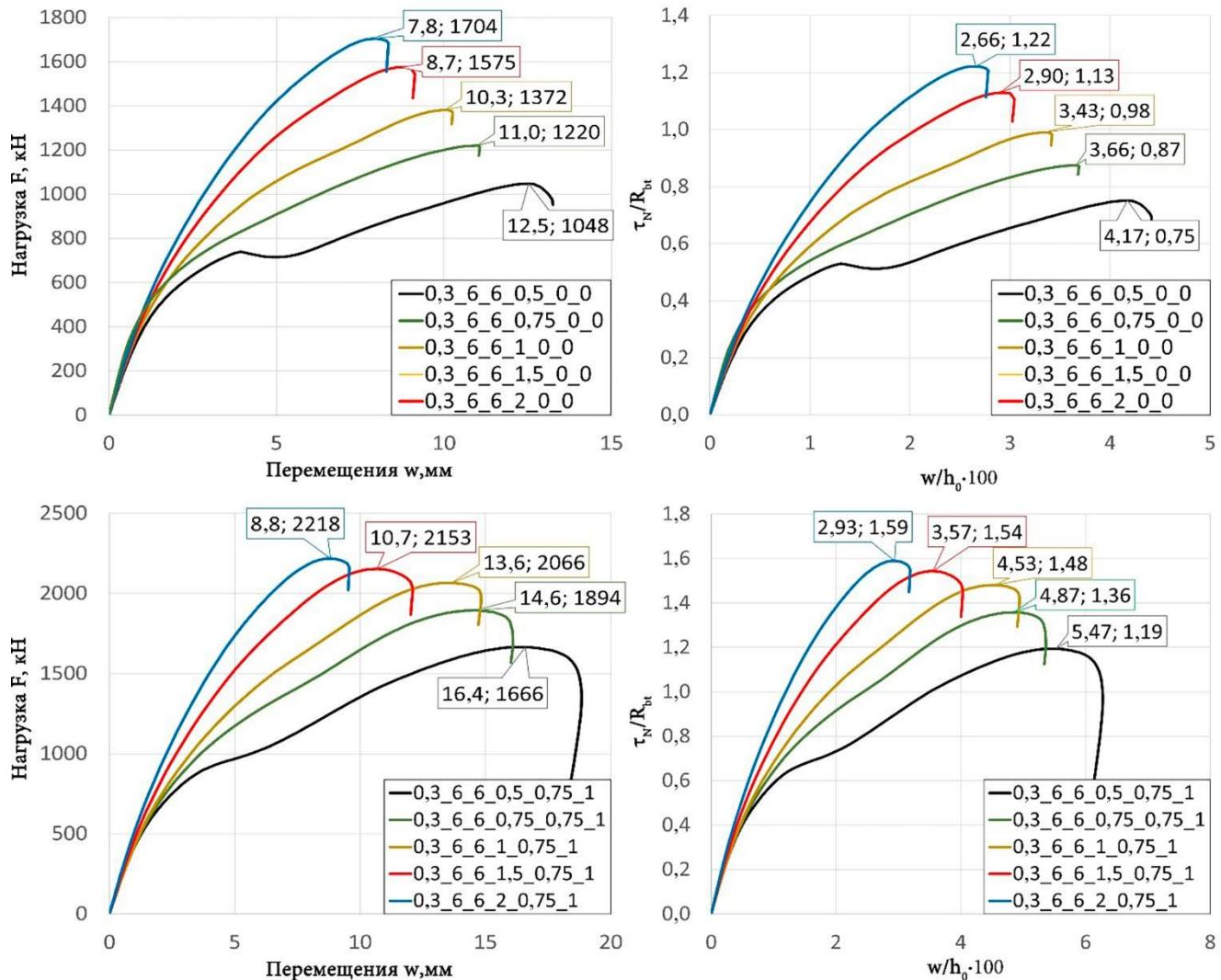


Рисунок 4.30 – Серия №4. Результаты испытаний плит с рабочей высотой $h_0 = 0,3$ м: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

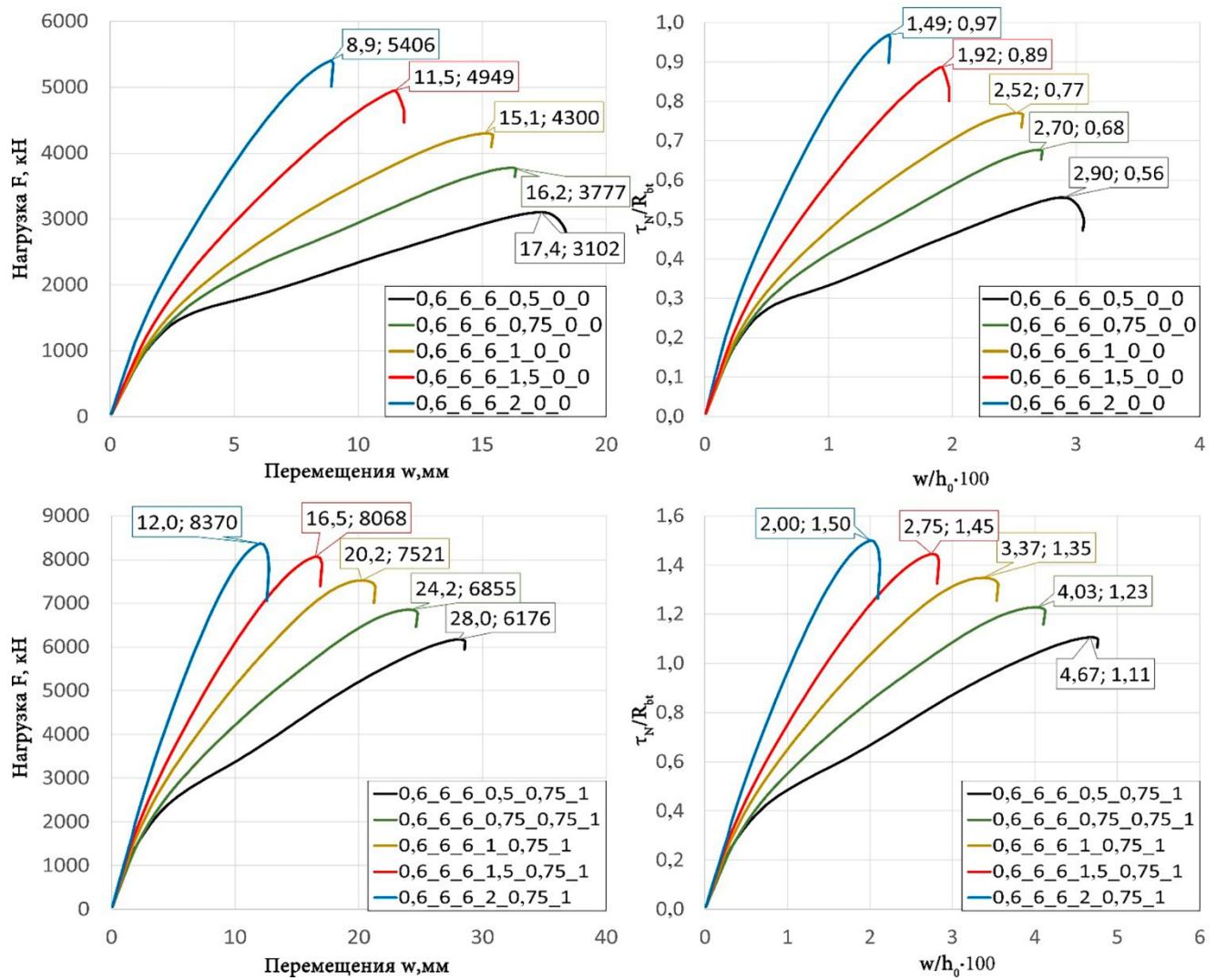


Рисунок 4.31 – Серия №4. Результаты испытаний плит с рабочей высотой $h_0 = 0,6$ м: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

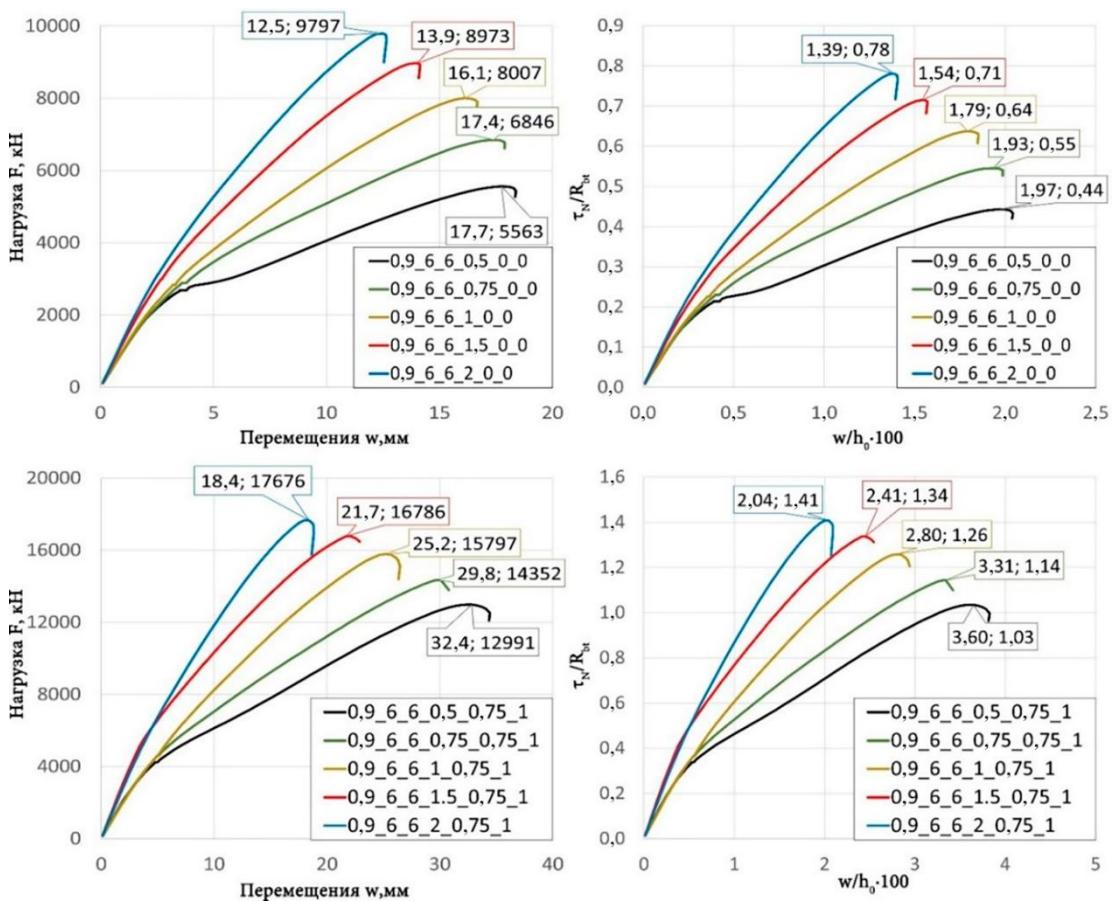


Рисунок 4.32 – Серия №4. Результаты испытаний плит с рабочей высотой $h_0 = 0,9$ м: зависимость нагрузки F от перемещений w (слева), зависимость τ_n/R_{bt} от w/h_0 (справа)

На рисунках 4.33-4.37 представлены картины трещинообразования для плит без поперечной арматуры с $h_0 = 0,6$ м с разными величинами процента продольного армирования μ .

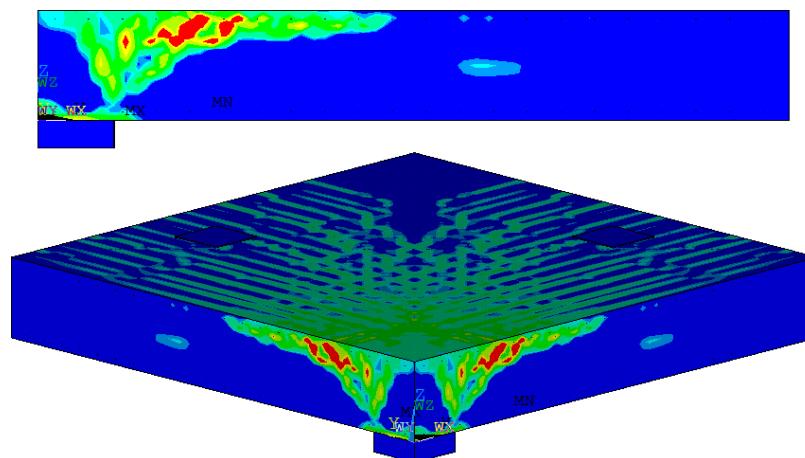


Рисунок 4.33 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м без поперечной арматуры с $\mu = 0,5\%$

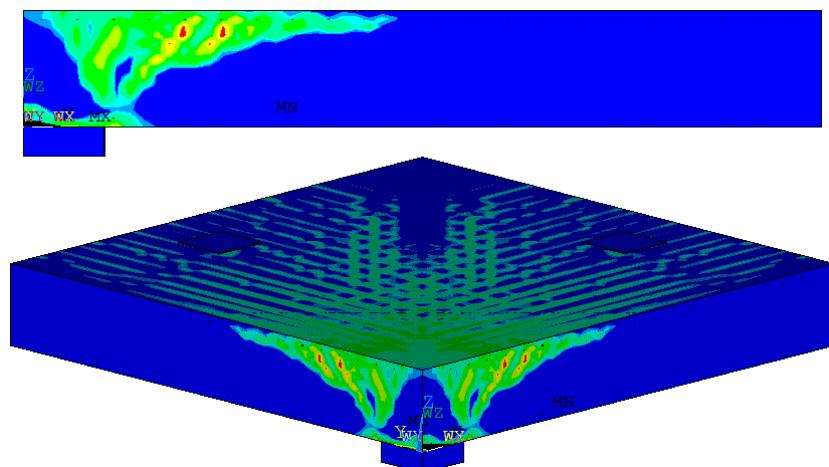


Рисунок 4.34 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м без поперечной арматуры с $\mu = 0,75\%$

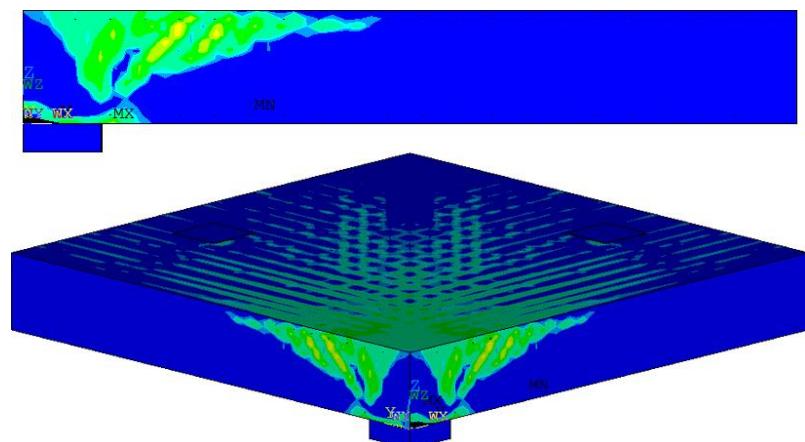


Рисунок 4.35 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м без поперечной арматуры с $\mu = 1\%$

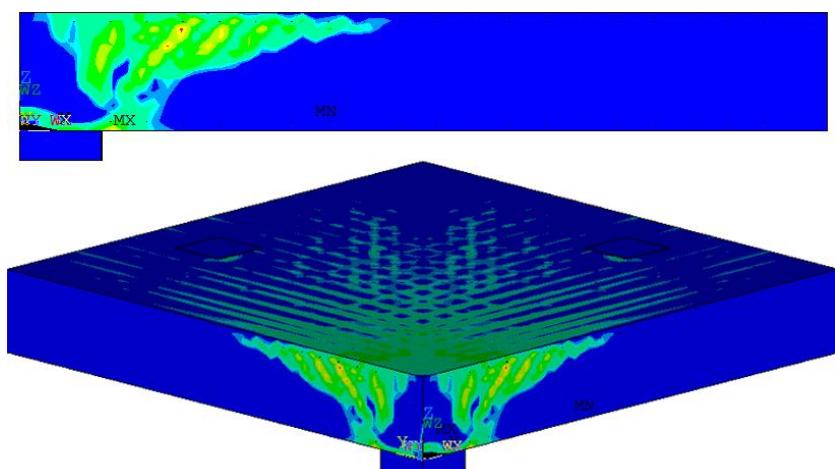


Рисунок 4.36 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м без поперечной арматуры с $\mu = 1,5\%$

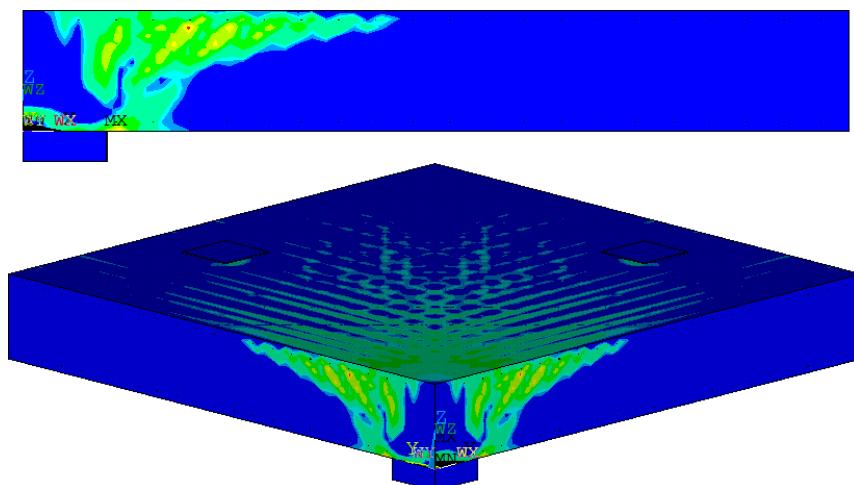


Рисунок 4.37 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м без поперечной арматуры с $\mu = 2\%$

На рисунках 4.38-4.42 представлены картины трещинообразования для плит с поперечной арматурой с $h_0 = 0,6$ м с разными величинами процента продольного армирования μ .

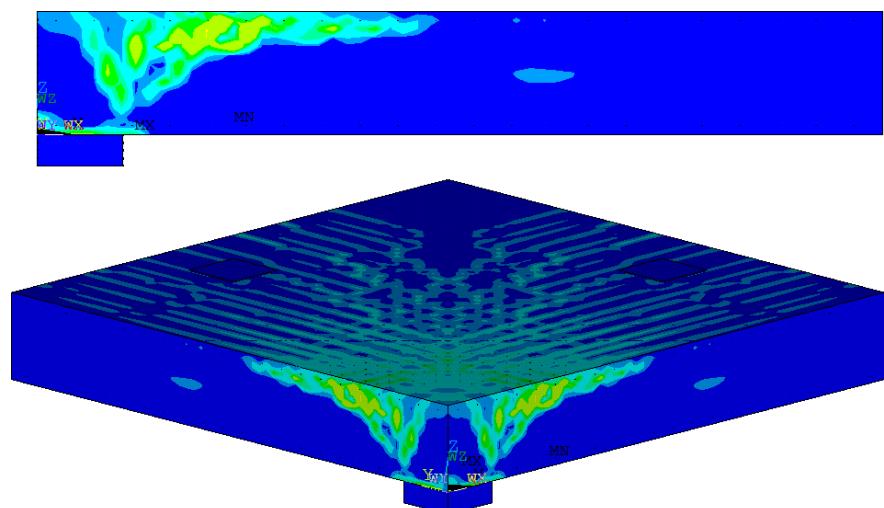


Рисунок 4.38 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м и $\mu = 0,5\%$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

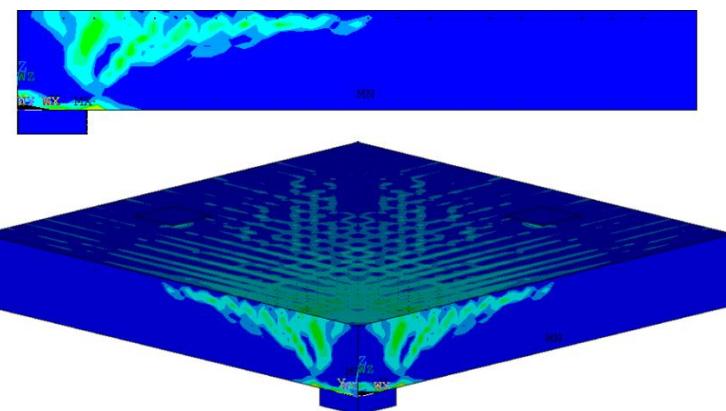


Рисунок 4.39 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м и $\mu = 0,75\%$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

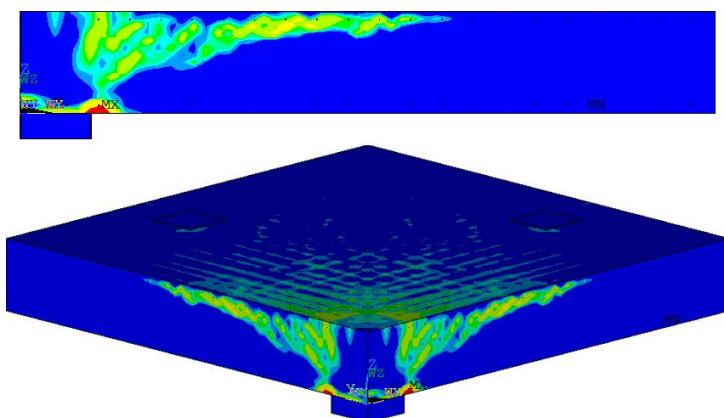


Рисунок 4.40 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м и $\mu = 1\%$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

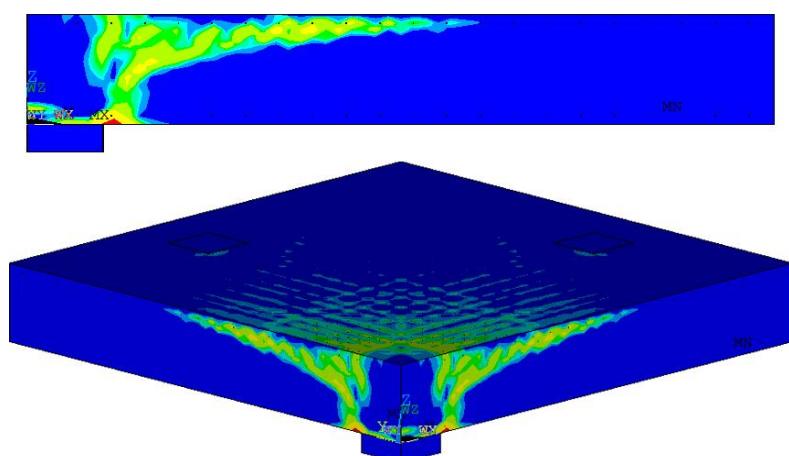


Рисунок 4.41 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м и $\mu = 1,5\%$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

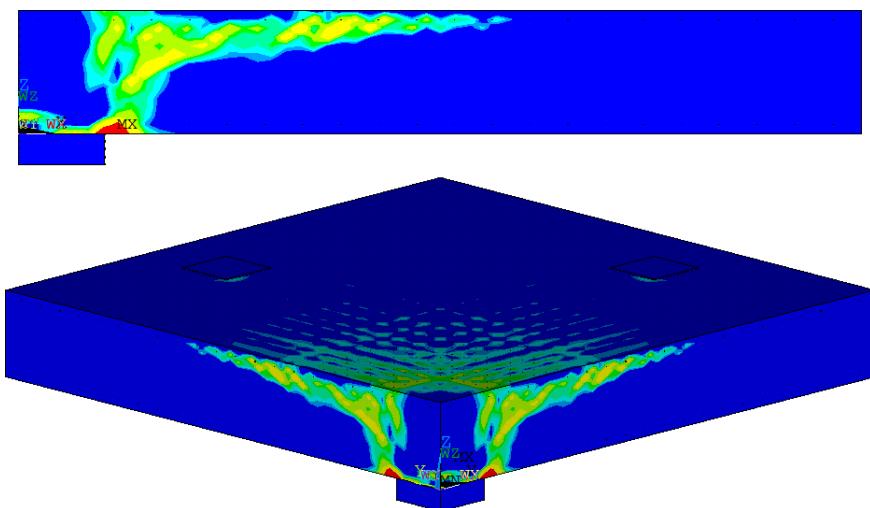


Рисунок 4.42 – Серия №4. Картина трещинообразования для плиты с $h_0 = 0,6$ м и $\mu = 2\%$ с поперечной арматурой, чей вклад в несущую способность составляет 75 % от вклада бетона

Результаты третьей серии испытаний сведены в таблицу 4.8.

Таблица 4.8 – Результаты испытаний плит серии №4

<i>№</i>	<i>Шифр h₀_r_λ_u₀/h₀_μ_F_{sw}/F_b_distr</i>	<i>F_{ult}, кН</i>	<i>τ_n/R_{bt}</i>	<i>Изменение τ_n/R_{bt}, %</i>
1	0,3_6_6_0,5_0_0	1048	0,75	62,67
2	0,3_6_6_0,75_0_0	1220	0,87	
3	0,3_6_6_1_0_0	1372	0,98	
4	0,3_6_6_1,5_0_0	1575	1,13	
5	0,3_6_6_2_0_0	1704	1,22	
6	0,3_6_6_0,5_0,75_1	1666	1,19	33,61
7	0,3_6_6_0,75_0,75_1	1894	1,36	
8	0,3_6_6_1_0,75_1	2066	1,48	
9	0,3_6_6_1,5_0,75_1	2153	1,54	
10	0,3_6_6_2_0,75_1	2218	1,59	
11	0,6_6_6_0,5_0_0	3102	0,56	73,21
12	0,6_6_6_0,75_0_0	3777	0,68	
13	0,6_6_6_1_0_0	4300	0,77	
14	0,6_6_6_1,5_0_0	4949	0,89	
15	0,6_6_6_2_0_0	5406	0,97	
16	0,6_6_6_0,5_0,75_1	6176	1,11	35,14
17	0,6_6_6_0,75_0,75_1	6855	1,23	
18	0,6_6_6_1_0,75_1	7521	1,35	
19	0,6_6_6_1,5_0,75_1	8068	1,45	
20	0,6_6_6_2_0,75_1	8370	1,50	

Продолжение таблицы 4.8

21	0,9_6_6_0,5_0_0	5563	0,44	77,27
22	0,9_6_6_0,75_0_0	6846	0,55	
23	0,9_6_6_1_0_0	8007	0,64	
24	0,9_6_6_1,5_0_0	8973	0,71	
25	0,9_6_6_2_0_0	9797	0,78	
26	0,9_6_6_0,5_0,75_1	12991	1,03	36,89
27	0,9_6_6_0,75_0,75_1	14352	1,14	
28	0,9_6_6_1_0,75_1	15797	1,26	
29	0,9_6_6_1,5_0,75_1	16786	1,34	
30	0,9_6_6_2_0,75_1	17676	1,41	

На рисунках 4.43, 4.44 представлена зависимость изменения величины τ_n/R_{bt} в зависимости от процента продольного армирования растянутой зоны μ .

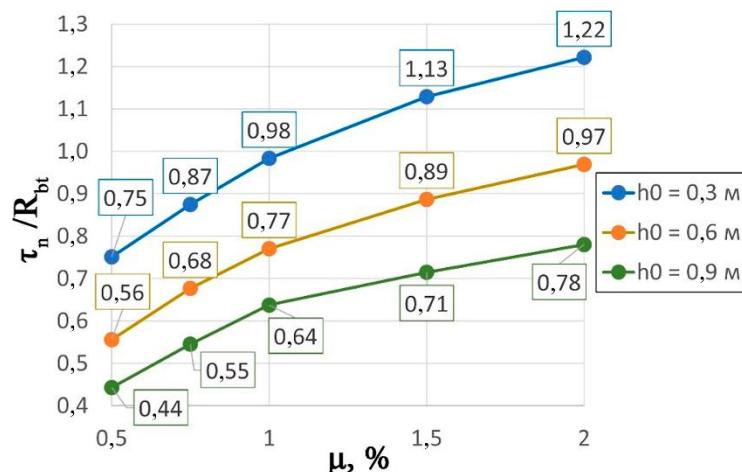


Рисунок 4.43 – Серия №4. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от μ для плит без поперечной арматуры

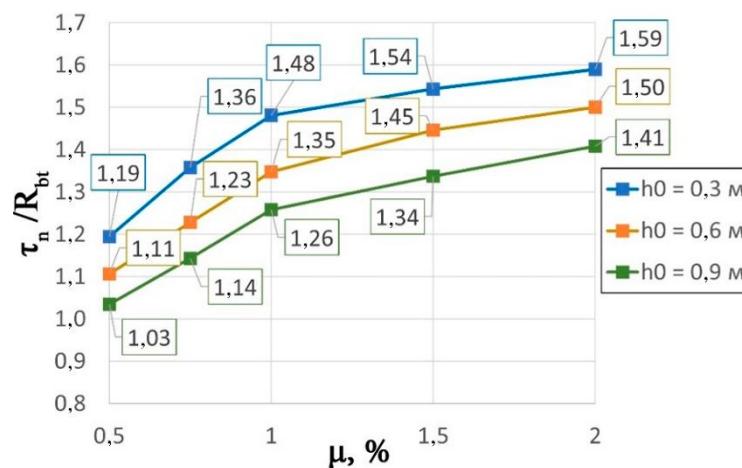


Рисунок 4.44 – Серия №4. Изменение τ_n/R_{bt} в зависимости от μ для плит с поперечной арматурой

На основании полученных результатов можно заключить, что увеличение процента продольного армирования растянутой зоны ведет к росту несущей способности плиты при продавливании. Зависимость изменения τ_n/R_{bt} от μ является нелинейной: с увеличением процента продольного армирования ее вклад в передачу сдвиговых усилий становится менее эффективным. При росте величины μ с 0,5 % до 2 % увеличение номинальных нормализованных напряжений τ_n/R_{bt} для плит без поперечной арматуры составило в среднем 71,05 %, для плит с поперечной арматурой – 35,21 %. Более высокий рост несущей способности для плит без поперечного армирования объясняется тем, что изменение процента продольного армирования растянутой зоны оказывает влияние только на вклад бетона F_b .

4.5. Сравнение результатов численного моделирования с методиками оценки несущей способности на продавливание, представленными в нормативных документах

В данном разделе представлено сравнение результатов численного моделирования (F_{num}) и результатов, полученных с помощью аналитических методик (F_{calc}). Для оценки точности результатов используются показатели, описанные в разделе 1.3 (коэффициент детерминации R^2 и коэффициент вариации CV).

На рисунке 4.45 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью СП 63.13330.2018 [37] (F_{calc}). В таблице 4.9 представлены показатели оценки сравнения величин F_{num} и F_{calc} .

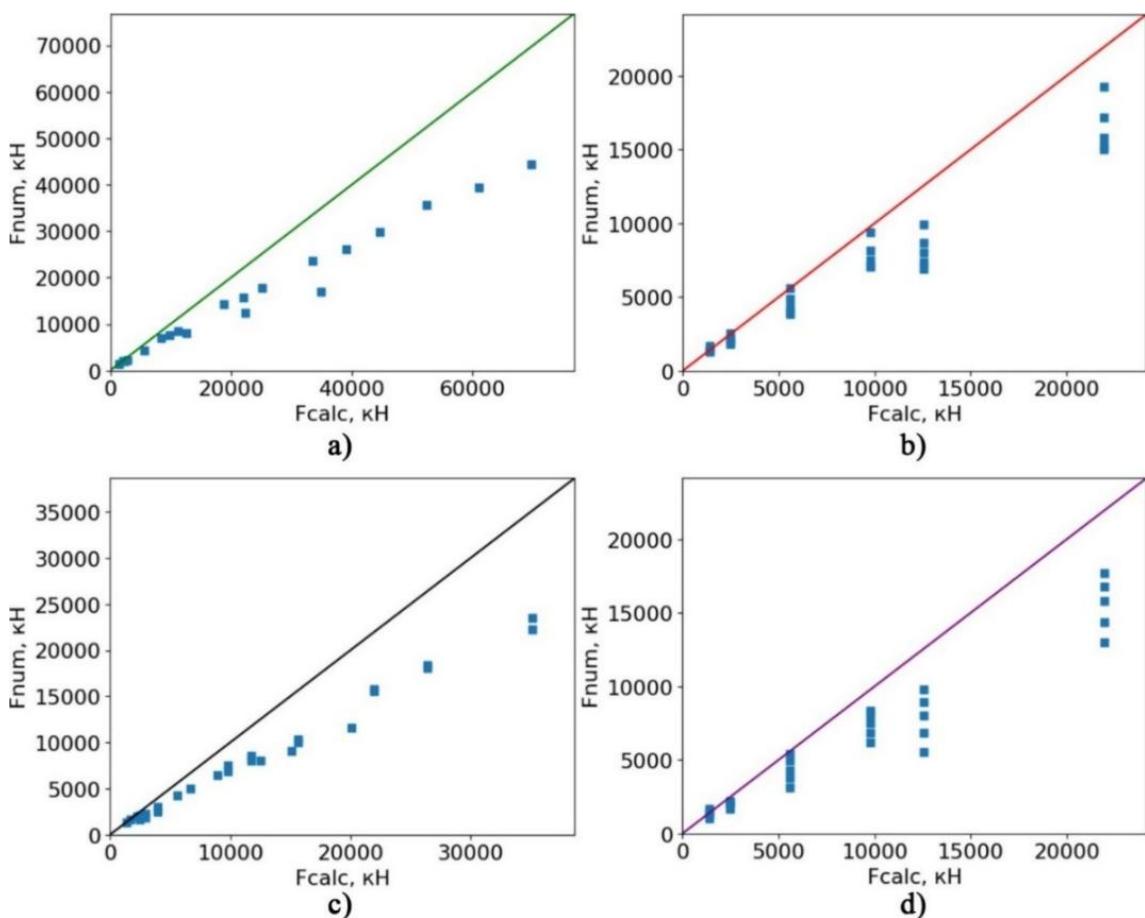


Рисунок 4.45 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в численных испытаниях (F_{num}) и с помощью СП 63.13330.2018 (F_{calc}): а) для серии №1; б) для серии №2; в) для серии №3; г) для серии №4

Таблица 4.9 – Показатели оценки результатов сравнения F_{num} и F_{calc} вычисленной с помощью СП 63.13330.2018

Показатель	Серия 1	Серия 2	Серия 3	Серия 4
CV	0,16	0,18	0,14	0,21
R^2	0,26	0,63	0,34	0,45

Для всех серий испытаний наблюдается низкое соответствие результатам численных испытаний. Для всех серий испытаний наблюдается тенденция к завышению несущей способности конструкции. Максимальная величина завышения наблюдается в 1 серии испытаний для образца 1,5_6_6_1_0_0 и составляет $F_{\text{calc}}/F_{\text{num}} = 2,1$.

На рисунке 4.46 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с

помощью Eurocode 2 [89] (F_{calc}). В таблице 4.10 представлены показатели оценки сравнения величин F_{num} и F_{calc} .

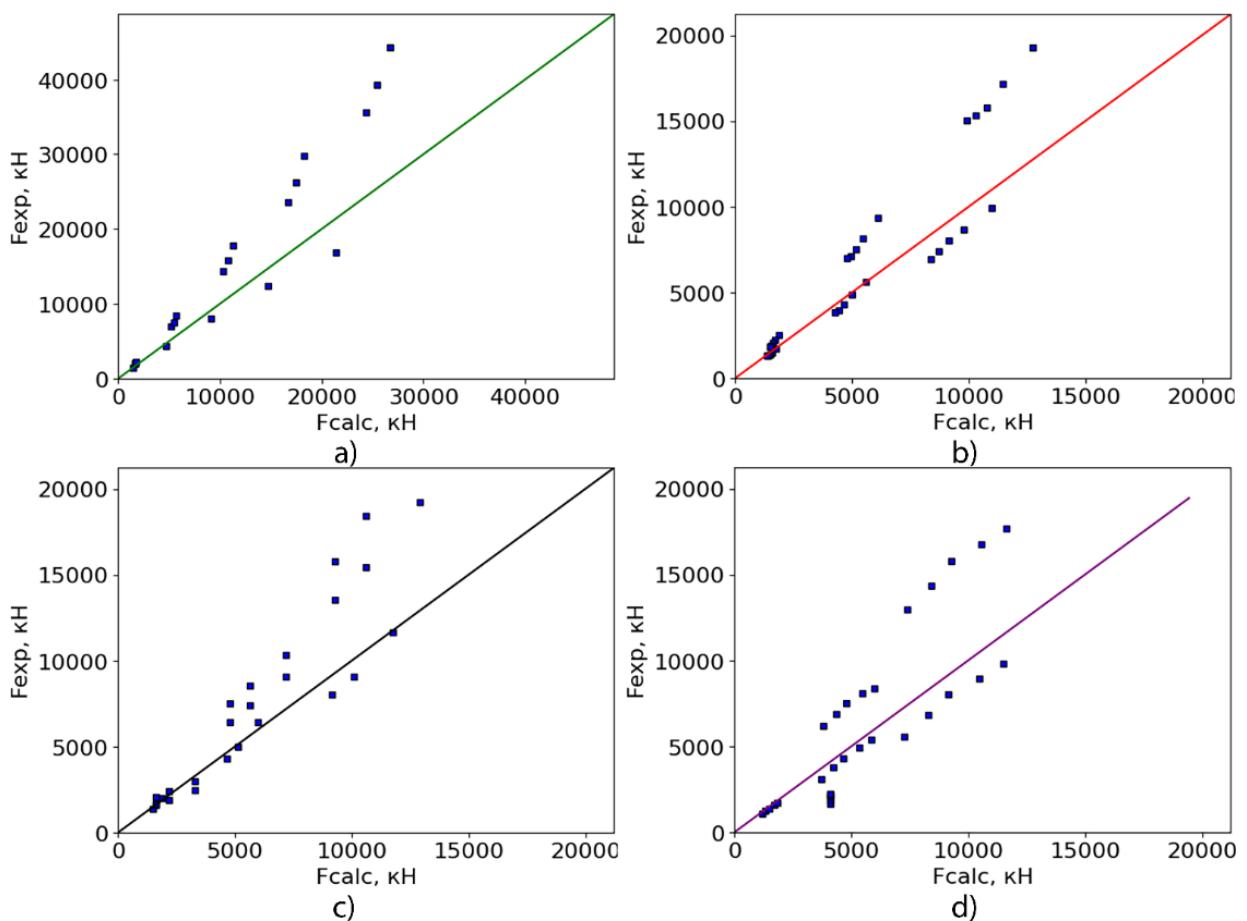


Рисунок 4.46 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в численных испытаниях (F_{num}) и с помощью Eurocode 2 (F_{calc}): а) для серии №1; б) для серии №2; в) для серии №3; г) для серии №4

Таблица 4.10 – Показатели оценки результатов сравнения F_{num} и F_{calc} вычисленной с помощью Eurocode 2

Показатель	Серия 1	Серия 2	Серия 3	Серия 4
CV	0,21	0,22	0,25	0,39
R^2	0,69	0,75	0,66	0,64

Для результатов серии 2 наблюдается удовлетворительное соответствие опытным данным. Для остальных серий наблюдается низкое соответствие.

На рисунке 4.47 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с

помощью ACI 318-25 [44] (F_{calc}). В таблице 4.11 представлены показатели оценки сравнения величин F_{num} и F_{calc} .

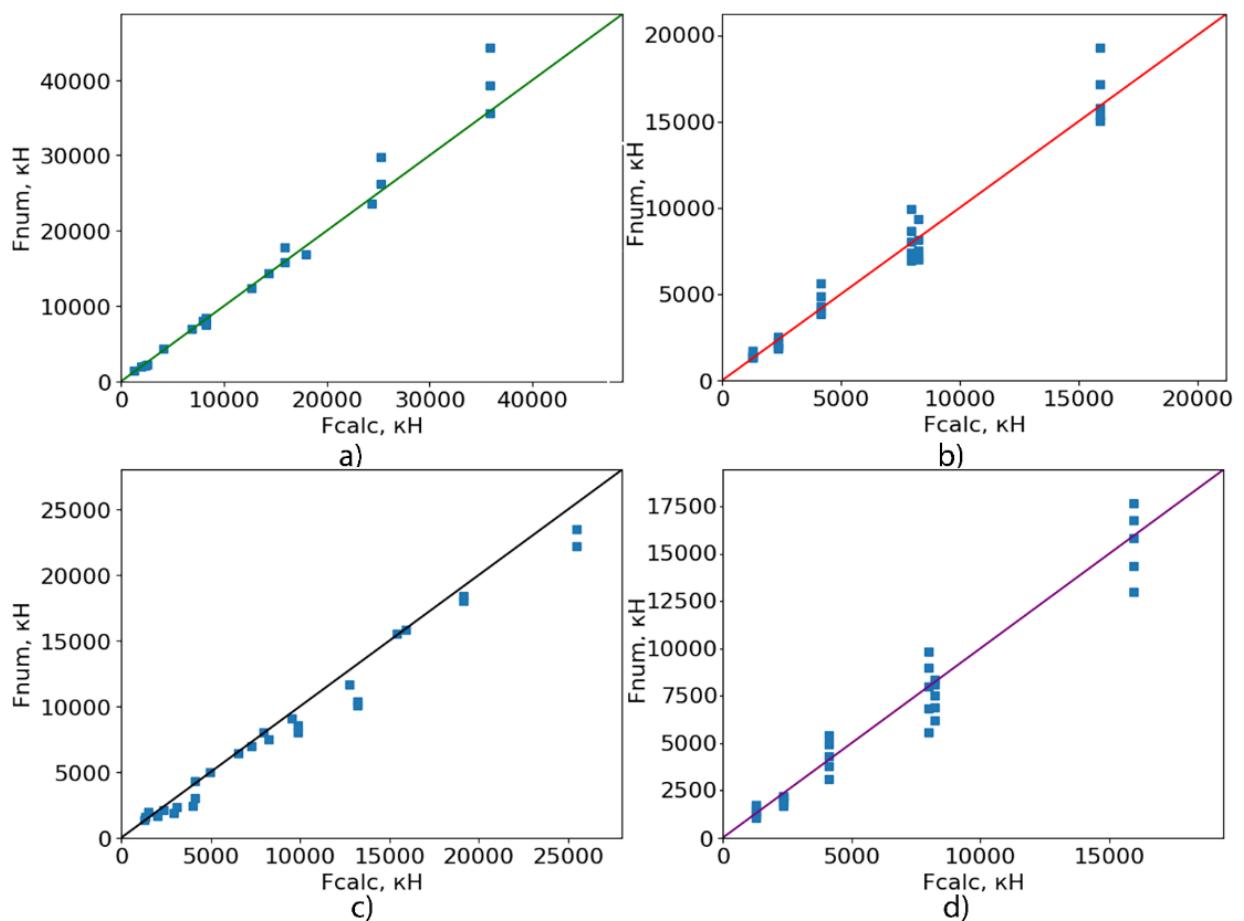


Рисунок 4.47 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в численных испытаниях (F_{num}) и с помощью ACI 318-25 (F_{calc}): а) для серии №1; б) для серии №2; в) для серии №3; г) для серии №4

Таблица 4.11 – Показатели оценки результатов сравнения F_{num} и F_{calc} вычисленной с помощью ACI 318-25

Показатель	Серия 1	Серия 2	Серия 3	Серия 4
CV	0,10	0,14	0,13	0,18
R^2	0,96	0,95	0,96	0,95

Для всех серий испытаний наблюдается высокое соответствие результатам численных испытаний.

На рисунке 4.48 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с

помощью Model Code 2020 [93] (F_{calc}). В таблице 4.12 представлены показатели оценки сравнения величин F_{num} и F_{calc} .

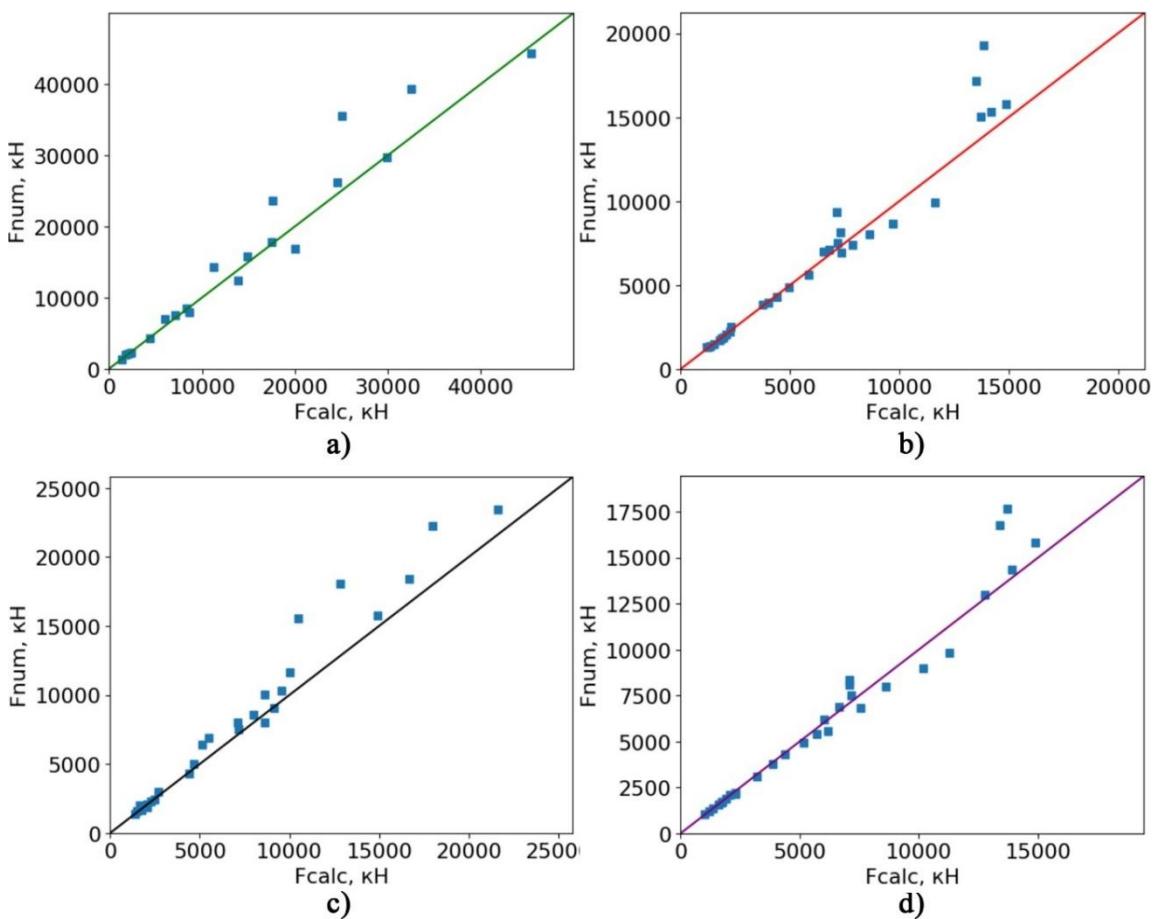


Рисунок 4.48 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в численных испытаниях (F_{num}) и с помощью Model Code 2020 (F_{calc}):
а) для серии №1; б) для серии №2; в) для серии №3; г) для серии №4

Таблица 4.12 – Показатели оценки результатов сравнения F_{num} и F_{calc} вычисленной с помощью Model Code 2020

Показатель	Серия 1	Серия 2	Серия 3	Серия 4
CV	0,14	0,11	0,12	0,10
R^2	0,93	0,93	0,92	0,94

Для всех серий наблюдается высокое соответствие опытным данным.

4.6. Выводы по главе

- Выполнено 107 численных испытаний плит на продавливание, разделенных на четыре серии. В каждой серии исследовалось влияние определенного параметра на механизм разрушения плит при продавливании.

2. С увеличением рабочей высоты плиты h_0 ее абсолютная несущая способность увеличивается, а относительная, выраженная с помощью номинальных нормализованных напряжений τ_n/R_{bt} – падает. Данное поведение объясняется влиянием энергетического масштабного эффекта, степень влияния которого зависит от наличия в плите поперечной арматуры и ее интенсивности. Для плит без поперечного армирования уменьшение τ_n/R_{bt} с ростом h_0 с 0,3 м до 1,5 м составило 51,0%, для плит с $F_{sw}/F_b = 0,50$ изменение составило 26,6 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 0,75$ изменение составило 23,7 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 1,00$ изменение составило 20,1 %.

3. При уменьшении величины пролета среза r_λ происходит рост несущей способности конструкции и деформаций. Наиболее интенсивный рост несущей способности наблюдается при $r_\lambda \leq 4$. При уменьшении величины r_λ с 10 до 2 рост величины τ_n/R_{bt} был примерно одинаковым для образцов с разной рабочей высотой и составил в среднем 26,8 %.

4. Увеличение относительного размера опоры u_0/h_0 ведет к росту периметра контура расчетного поперечного сечения и увеличению несущей способности. Однако рост u_0/h_0 также приводит к уменьшению величины нормализованных касательных напряжений τ_n/R_{bt} , что может быть объяснено локализацией деформаций в углах опоры. При росте u_0/h_0 с 6 до 12 снижение τ_n/R_{bt} было примерно одинаковым для плит с разной рабочей высотой, с поперечным армированием и без, и в среднем составило 9,0 %.

5. Увеличение процента продольного армирования растянутой зоны μ ведет к росту несущей способности плиты и уменьшению предельных деформаций. Также наблюдается рост относительной несущей способности: при увеличении μ с 0,5 % до 2 % увеличение номинальных нормализованных напряжений τ_n/R_{bt} для плит без поперечной арматуры составило в среднем 71,1 %; для плит с поперечной арматурой – 35,2 %. Более высокий рост несущей способности для плит без поперечного армирования объясняется тем, что изменение процента продольного армирования растянутой зоны оказывает влияние только на вклад бетона F_b .

6. На основании сравнения результатов численных испытаний с результатами, полученными с помощью методик расчета железобетонных плит на продавливание, представленных в нормативных документах, можно заключить: расчетная методика, представленная в СП 63.13330.2018, имеет низкое соответствие результатам численных экспериментов для всех серий. Расчетная методика, представленная в Eurocode 2, имеет удовлетворительное совпадение с данными численных экспериментов для серии 2 и низкое соответствие для остальных серий. Расчетные методики, представленные в Model Code 2020 и ACI 318-25, имеют высокую степень соответствия опытным данным для всех серий.

ГЛАВА 5. ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ПЛИТ НА ПРОДАВЛИВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

5.1. Общий вид и требования к методике расчета плит на продавливание

В общем виде, методика вычисления величины предельного продавливающего усилия F_{ult} может быть представлена в виде формул (5.1)-(5.4). Для плит без поперечной арматуры несущая способность принимается равной величине усилия F_b , воспринимаемой бетоном (5.2). Для плит с поперечной арматурой значение F_{ult} может быть найдено как минимальная величина среди условий (5.1), (5.3), (5.4), представляющих собой различные механизмы разрушения плиты.

$$F_w = C_1 \cdot F_b + C_2 \cdot F_{sw}, \quad (5.1)$$

$$F_b = u \cdot h_0 \cdot R \cdot f_1 \cdot f_2 \dots f_n, \quad (5.2)$$

$$F_{out} = u_{out} \cdot h_0 \cdot R \cdot f_1 \cdot f_2 \dots f_n, \quad (5.3)$$

$$F_{cr} = C_3 \cdot F_b, \quad (5.4)$$

где: F_{sw} – усилие, воспринимаемое поперечной арматурой; F_w – усилие, воспринимаемое плитой при разрушении внутри контура установки поперечного армирования; F_{out} – усилие, воспринимаемое плитой при разрушении за контуром установки поперечного армирования; F_{cr} – усилие, воспринимаемое плитой при разрушении по грани опоры; u , u_{out} – периметры контура расчетного поперечного сечения; C_1 , C_2 – эмпирические коэффициенты, учитывающие изменение вкладов бетона и арматуры в несущую способность плиты [131]; C_3 – эмпирический коэффициент, учитывающий тип поперечной арматуры; R – прочностной параметр, характеризующий сопротивление материала плиты; h_0 – рабочая высота плиты; $f_1, f_2 \dots f_n$ – набор эмпирических функций, отражающих влияние различных факторов на несущую способность конструкции.

В качестве прочностного параметра R может быть использована величина прочности бетона на одноосное растяжение R_{bt} . Периметр контура расчетного поперечного сечения и берется на расстоянии $h_0/2$ от грани опоры согласно [37]. Функции $f_1 \dots f_n$ должны отражать влияние следующих факторов: масштабный эффект; влияние пролета среза; процента продольного армирования растянутой

зоны плиты; влияние относительного размера и формы опоры. В соответствии с данными требованиями и результатами численных испытаний, полученными в главе 4, формулы (5.1)-(5.4) могут быть представлены в виде выражений (5.5)-(5.8).

$$F_b = x_1 \cdot R_{bt} \cdot u_{CP63} \cdot h_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{x_2}}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{x_3} \cdot r_\lambda^{x_4} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{x_5}, \quad (5.5)$$

$$F_w = x_6 \cdot F_b + x_7 \cdot A_{sw} \cdot R_{sw} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{x_5}, \quad (5.6)$$

$$F_{out} = x_8 \cdot R_{bt} \cdot u_{CP63,out} \cdot h_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{x_2}}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{x_3} \cdot r_\lambda^{x_4} \cdot \left(\frac{a_{out}}{h_0} \right)^{x_5}, \quad (5.7)$$

$$F_{cr} = x_9 \cdot F_b, \quad (5.8)$$

где: $\mathbf{x} = x_1-x_9$ – коэффициенты функций; A_{sw} – площадь всей поперечной арматуры, расположенной в границах $1/3 \cdot h_0 \dots h_0$ вокруг опоры; a – параметр, принимаемый равным $\pi \cdot d$ для круглых опор (d – диаметр опоры) и $4 \cdot a_{max} \leq 16 \cdot a_{min}$ для остальных видов опор (a_{max} и a_{min} – размеры наиболее длинной и короткой сторон опоры в плане соответственно); a_{out} – параметр, принимаемый аналогично параметру a , но для контура установки поперечной арматуры с учетом его сторон и формы. Вид функции, описывающей влияние масштабного эффекта, был выбран на основе работ [56, 80].

Таким образом, задача сводится к поиску величин коэффициентов \mathbf{x} . Данные коэффициенты могут быть найдены с помощью регрессионного анализа методом наименьших квадратов на основании результатов опытных данных [8].

5.2. Использование регрессионного анализа для построения методики расчета на продавливание

Регрессионный анализ представляет собой набор статистических методов, позволяющих исследовать влияние ряда независимых переменных на одну зависимую переменную. В поставленной задаче в качестве независимых переменных выступают коэффициенты \mathbf{x} , а в качестве зависимой переменной b –

величина номинальных напряжений τ_n , нормализованная относительно прочности бетона на одноосное растяжение R_{bt} .

Регрессионный анализ использует различные методы, одним из которых является метод наименьших квадратов (МНК). Основная идея МНК заключается в поиске значений коэффициентов, дающих наименьшую сумму квадратов отклонений между результатами экспериментальных данных (b_{exp}) и результатами, полученными с помощью функции (b_{calc}) (5.9).

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i^2(x) = \sum_{i=1}^m (b_{calc,i}(x) - b_{exp,i})^2 \rightarrow \min, \quad (5.9)$$

где i – порядковый номер результата экспериментальных данных.

Данная задача может быть выполнена с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта, который осуществляет итеративный поиск решения задачи о наименьших квадратах, описанной функцией (5.9) [127, 135]. Данный алгоритм имеет высокую скорость сходимости и является наиболее устойчивым среди аналогичных алгоритмов (метод Ньютона, метод Гаусса – Ньютона, метод наискорейшего спуска). Алгоритм Левенберга-Марквардта в виде псевдокода представлен на рисунке 5.1.

```

1   begin
2   initialize initial values:  $x = x_0$ ,  $\lambda = \max\{a_{ij}\} \cdot 10^{-3}$ ,  $v = 2$ ,  $k = 0$ ,  $F(x)$ ,  $L(x)$ 
3   calculate:  $f(x)$ ,  $J(x)$ ,  $A = J(x)^T \cdot J(x)$ ,  $g(x) = J(x)^T \cdot f(x)$ ,  $found = (\|g(x)\|_\infty \leq \varepsilon_l)$ 
4   while (not found), and ( $k \leq k_{max}$ )
5        $k = k + 1$ , solve  $(A + \lambda \cdot I) \cdot h_{lm} = -g(x) \rightarrow h_{lm}$ 
6       if  $\|h_{lm}\| \leq \varepsilon_2 \cdot (\|x\| + \varepsilon_2)$ :
7            $found = true$ 
8       else:
9            $x_{new} = x + h_{lm}$ 
10           $l(x_{new}) = f(x) + J(x) \cdot h_{lm}$ 
11           $L(x_{new}) = 0,5 \cdot l(x_{new})^T \cdot l(x_{new})$ 
12           $\rho = (F(x) - F(x_{new})) / (L(0) - L(x_{new}))$ 
13          if  $\rho > 0$ :
14               $x = x_{new}$ 
15               $A = J(x)^T \cdot J(x)$ ,  $g(x) = J(x)^T \cdot f(x)$ 
16               $found = (\|g(x)\|_\infty \leq \varepsilon_l)$ 
17               $\lambda = 1/3 \cdot \lambda$ ,  $v = v \cdot 2$ 
18          else:
19               $\lambda = \lambda \cdot v$ ,  $v = v \cdot 2$ 
20      end

```

Рисунок 5.1. Алгоритм Левенберга-Марквардта в виде псевдокода

где: x , x_0 – текущие и начальные значения искомых параметров $x_1 \dots x_9$; $f(x)$ – минимизируемая величина ошибки $b_{calc}(x) - b_{exp}$; $J(x)$ – матрица Якоби вектора-

функции $f(\mathbf{x})$; λ – параметр регуляризации; v – коэффициент линейности шага; h_{lm} – величина изменения параметров x ; ε – критерии сходимости алгоритма.

В качестве исходных данных для выполнения анализа использовались результаты испытаний плит на продавливание, представленные в работах [9, 13, 18, 19, 35, 46, 47, 60-66, 71, 72, 74, 76, 78, 82-86, 88, 90, 92, 96, 97, 99, 102-108, 115-117, 120, 123, 128, 129, 131-134, 136, 137, 140, 141, 143, 145-152, 154-156, 157, 158, 162, 163, 165, 167-169, 172, 173, 175-180, 183]. Анализ выполнялся в два этапа: на первом этапе, используя результаты испытаний плит без поперечной арматуры, выполнялся поиск коэффициентов $x_1 \dots x_5$ для функции (5.5), описывающей усилие F_b , воспринимаемое бетоном; на втором этапе выполнялся поиск коэффициентов $x_6 \dots x_9$ для функций (5.6)-(5.8), представляющих собой несущую способность плит с поперечным армированием для разных механизмов разрушения. Второй этап выполнялся с применением значений коэффициентов $x_1 \dots x_5$, полученных в первом этапе. Коэффициенты x_6, x_7 в формуле (5.6) подбирались на основании результатов испытания плит, разрушение которых произошло по контуру установки поперечной арматуры. Поиск коэффициента x_8 выполняется для плит, разрушение которых произошло за гранью контура установки поперечной арматуры; при поиске коэффициентов учитывалась форма контура согласно рисунку 1.12. Подбор коэффициента x_9 , используемого в формуле (5.8), выполнялся с учетом типа поперечной арматуры (отдельно выполнялся подбор коэффициентов для типов а-с и d-h согласно рисунку 1.8) на основании испытаний плит, чье разрушение произошло по грани опоры.

В результате применения алгоритма, с учетом округления коэффициентов, были получены выражения (5.10)-(5.13).

$$F_b = 1,15 \cdot R_{bt} \cdot u_{CP63} \cdot h_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{d_0}}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{1/3} \cdot r_\lambda^{-1/4} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{-1/5}, \quad (5.10)$$

$$F_w = F_b + F_{sw} = F_b + 0.8 \cdot A_{sw} \cdot R_{sw} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{-1/5}, \quad (5.11)$$

$$F_{out} = 1,15 \cdot R_{bt} \cdot u_{CP63,out} \cdot h_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{d_0}}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{1/3} \cdot r_\lambda^{-1/4} \cdot \left(\frac{a_{0,out}}{h_0} \right)^{-1/5}, \quad (5.12)$$

$$F_{cr} = C \cdot F_b, \quad (5.13)$$

где: С – эмпирический коэффициент, зависящий от типа поперечного армирования и принимаемый равным 2 для типов а-с и 1,5 для типов д-г согласно рисунку 1.8; $d_0 = 0,1$ м – переходный размер; μ – коэффициент продольного армирования растянутой зоны плиты (принимается не более 2 %). Вклад поперечной арматуры учитывается при $F_{sw} \geq 0,25 \cdot F_b$ (данное условие добавлено для обеспечения деформаций, позволяющих выполнить включение поперечной арматуры в работу плиты). Величина r_λ принимается не менее 0,25. Функция, учитывающая неоднородность распределения напряжений вокруг опоры $(a/h_0)^{-1/5}$ подходит для случаев, когда прдавливающее усилие вычислялось на основании усилий, действующих на опоре плиты. Если прдавливающее усилие вычисляется на основании анализа напряженного состояния плиты, учитывающего неравномерность распределения касательных напряжений вокруг опоры (например, по результатам конечно-элементного анализа), то величина a/h_0 принимается равной 1. Подход для вычисления прдавливающего усилия по результатам конечно-элементного анализа описан в документах [89, 93]. Значение функции $(\mu \cdot R_s / R_b)^{1/3}$ принимается не менее 1 и не более 3,5.

5.3. Сравнение расчетной методики с результатами лабораторных и численных испытаний

На рисунке 5.2 представлено сравнение величин предельного прдавливающего усилия, полученного в результате лабораторных испытаний (F_{exp}) и вычисленного по выражениям (5.10)-(5.13) (F_{calc}).

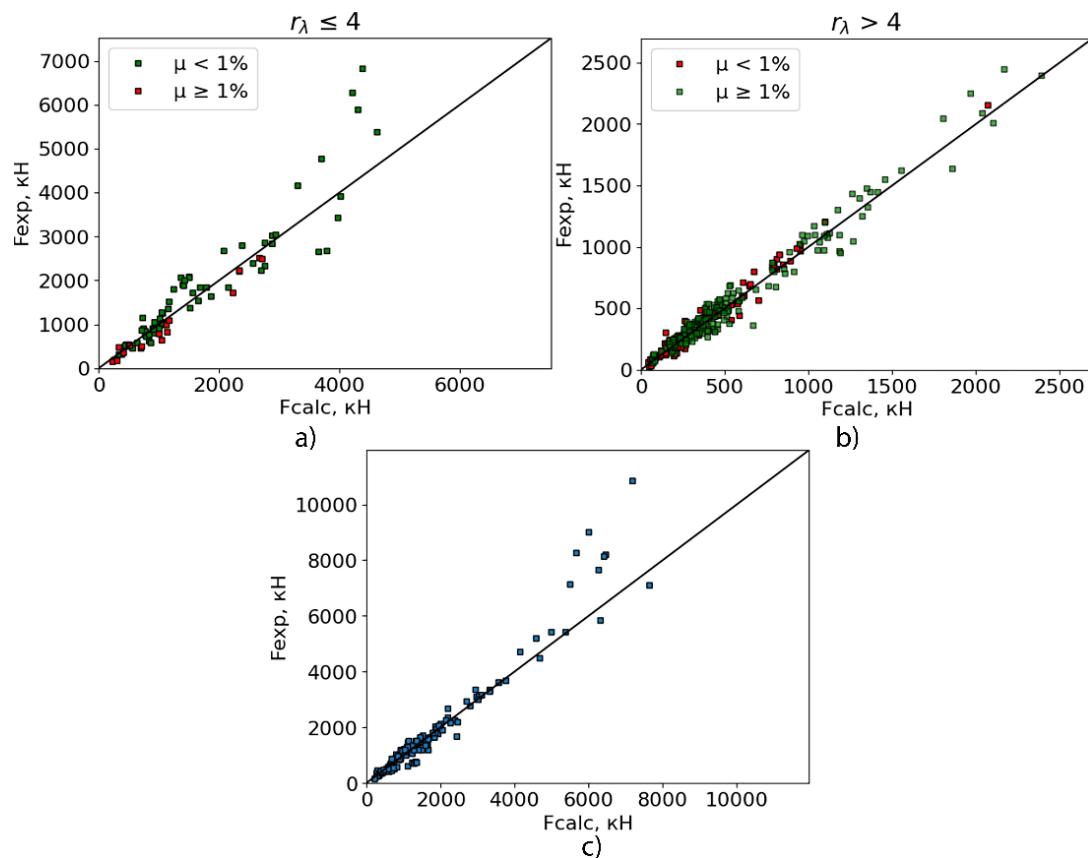


Рисунок 5.2 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных испытаниях (F_{exp}) и с помощью выражений (5.10)-(5.13) (F_{calc}): а) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; б) плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; в) плиты с поперечной арматурой

На рисунке 5.3 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного с помощью численных испытаний (F_{num}) и с помощью выражений (5.10)-(5.13) (F_{calc}).

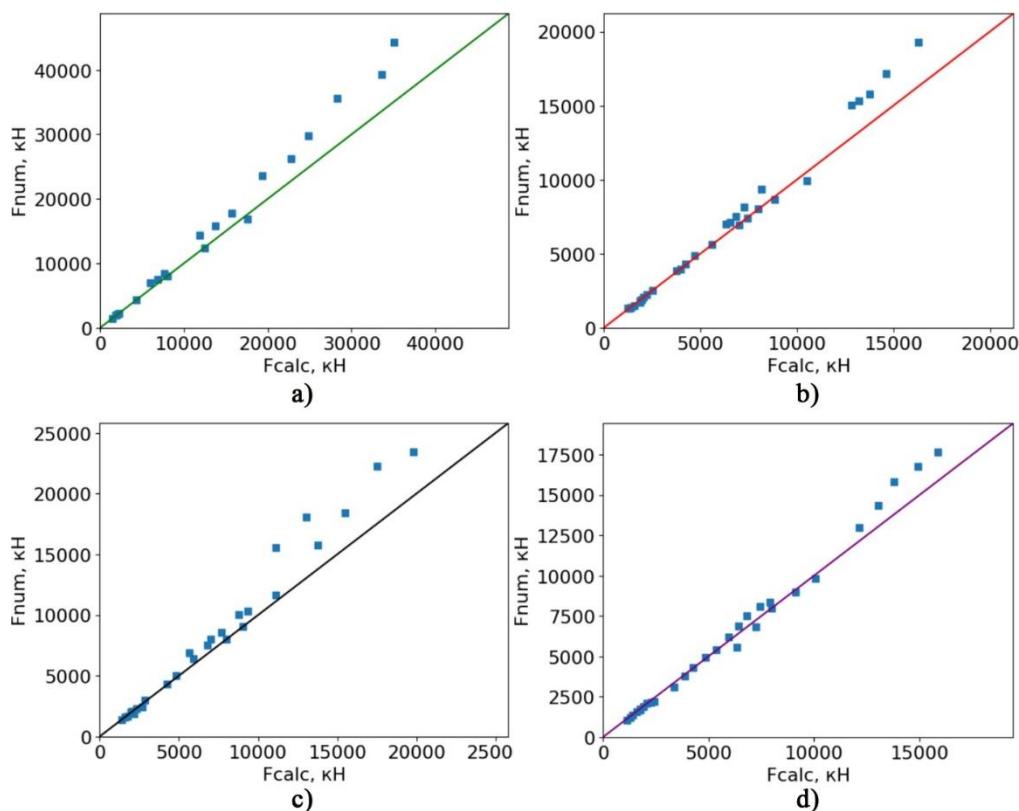


Рисунок 5.3 – Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в численных испытаниях (F_{num}) и с помощью выражений (5.10)-(5.13) (F_{calc}): а) для серии №1; б) для серии №2; в) для серии №3 д) для серии №4

В таблице 5.1 представлено сравнение показателей оценки сопоставления величин F_{exp} и F_{calc} , полученных для различных методик расчета железобетонных плит на продавливание. Жирным шрифтом выделены лучшие показатели среди рассматриваемых расчетных методик.

Таблица 5.1 – Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и величины F_{calc} , вычисленной с помощью разных подходов

Документ	Показатель	Серия				попереч. арм.	
		$r_\lambda \leq 4$		$r_\lambda > 4$			
		$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$		
СП 63.13330.2018 [37]	CV	0,24	0,51	0,49	0,33	0,49	
	R^2	0,80	0,70	-0,07	0,81	0,81	
Eurocode 2 [89]	CV	0,20	0,36	0,20	0,19	0,20	
	R^2	0,68	0,95	0,97	0,96	0,81	
ACI 318-25 [44]	CV	0,23	0,52	0,31	0,23	0,31	
	R^2	0,41	0,88	0,85	0,80	0,59	
MC 2020 [93]	CV	0,22	0,49	0,22	0,19	0,19	
	R^2	0,79	0,67	0,96	0,94	0,83	
Представленная методика	CV	0,20	0,24	0,20	0,16	0,19	
	R^2	0,84	0,95	0,97	0,97	0,91	

При сравнении с результатами опытных данных, представленная методика обладает наименьшим коэффициентом вариации (CV), а также величиной коэффициента детерминации (R^2) наиболее близкой к 1. Для плит без поперечной арматуры с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1 \%$ для представленной расчетной методики наблюдается хорошее соответствие опытным данным, в остальных случаях наблюдается высокое соответствие опытным данным. Для 83 % плит с поперечной арматурой приоритетный механизм разрушения совпал с механизмом разрушения, наблюдаемым в лабораторных испытаниях.

В таблице 5.2 представлено сравнение показателей оценки сопоставления величин F_{num} и F_{calc} , полученных для различных методик расчета железобетонных плит на продавливание.

Таблица 5.2 – Показатели оценки результатов сравнения F_{num} и величины F_{calc} , вычисленной с помощью разных подходов

Документ	Показатель	Серия			
		1	2	3	4
СП 63.13330.2018 [37]	CV	0,16	0,18	0,14	0,21
	R^2	0,26	0,63	0,34	0,45
Eurocode 2 [89]	CV	0,21	0,22	0,25	0,39
	R^2	0,69	0,75	0,66	0,64
ACI 318-25 [44]	CV	0,10	0,14	0,13	0,18
	R^2	0,96	0,95	0,96	0,95
МС 2020 [93]	CV	0,14	0,11	0,12	0,10
	R^2	0,93	0,93	0,92	0,94
Представленная методика	CV	0,09	0,07	0,12	0,07
	R^2	0,93	0,96	0,92	0,98

При сравнении с результатами численных экспериментов представленная методика обладает наименьшим CV среди всех рассмотренных подходов. Для всех серий испытаний наблюдается высокая степень соответствия опытным данным. Наиболее близкие к 1 значения R^2 среди рассмотренных расчетных методик получены для 2 и 4 серий испытаний.

Представленная методика демонстрирует высокую степень соответствия данным лабораторных и численных испытаний, обладает простым алгоритмом реализации и не требует итерационного подхода.

5.4. Выводы по главе

1. На основании результатов лабораторных испытаний с помощью регрессионного анализа методом наименьших квадратов с использованием алгоритма Левенберга-Марквадрта была разработана инженерная методика расчета железобетонных плит на продавливание.

2. Разработанная инженерная методика представляет собой совершенствование расчетной методики, представленной в нормативном

документе СП 63.13330.2018 [37]. Модифицированная методика сохраняет основную логику оригинальной расчетной методики и отражает влияние основных конструктивных и механических параметров на несущую способность конструкции. Модификация позволяет отразить влияние процента продольного армирования растянутой зоны плиты, влияние относительного размера и формы опоры, влияние пролета среза, масштабного эффекта, а также типа поперечного армирования на несущую способность плит при их разрушении от продавливания.

3. В работе было выполнено сопоставление величин предельного продавливающего усилия, полученного в лабораторных и численных испытаниях, с величинами предельного продавливающего усилия, полученными с помощью расчетных методик, представленных в СП 63.13330.2018 [37], Eurocode 2 [89], ACI 318-25 [44], MC 2020 [93], а также с помощью разработанной расчетной методики. При сравнении с результатами опытных данных представленная методика обладает наименьшим коэффициентом вариации (CV) и величиной коэффициента детерминации (R^2), наиболее близкой к 1, среди всех рассмотренных расчетных методик. При сравнении с результатами численных экспериментов представленная методика также обладает наименьшим CV среди всех рассмотренных подходов. Наиболее близкие к 1 величины R^2 среди рассмотренных расчетных методик получены для 2-й и 4-й серий испытаний. Можно заключить, что представленная инженерная методика позволяет с высокой точностью выполнять оценку несущей способности железобетонных плит с поперечной арматурой и без нее при их разрушении от продавливания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На основании анализа работ различных авторов, посвященных изучению механизма разрушения железобетонных плит от продавливания, выделены основные факторы, влияющие на несущую способность конструкции: масштабный эффект, пролет среза плиты, относительный размер опоры, коэффициент продольного армирования растянутой зоны плиты, тип и интенсивность поперечного армирования. Отсутствие либо некорректный учет описанных выше факторов существенно влияет на точность расчетных методик. Большая часть из них использует некорректную функцию для отражения влияния масштабного эффекта. По этой причине для нормативной методики СП 63.13330.2018 наблюдается тенденция к завышению несущей способности плит без поперечной арматуры с ростом их рабочей высоты. Для рассмотренной выборки лабораторных испытаний отношение величины предельного продавливающего усилия, полученного с помощью расчетной методики, к усилию, полученному в испытаниях, составляет 2,3. Для выполненных численных испытаний максимальное завышение несущей способности достигло значения 2,1.

Данные о механизмах разрушения плит с большой рабочей высотой, отсутствующие в литературе, могут быть получены с помощью численных исследований, выполненных методом конечных элементов с использованием нелинейной модели бетона. Однако значительная часть рассмотренных в работе моделей бетона содержит недостатки, влияющие на точность результатов моделирования и стабильность конечно-элементного решения: значительное отклонение формы предельной поверхности от результатов опытных данных, отсутствие учета эффектов дилатации и контракции, отсутствие механизмов, позволяющих учесть влияние масштабного энергетического эффекта и выполнить регуляризацию проблемы локализации необратимых деформаций.

2. Разработана модель бетона, использующая в основе комбинацию теории пластического течения (основные положения которой описаны в работах D. C. Drucker и W. Prager) и механики разрушения (подход основывается на работах Ю. Н. Работнова и P. Grassl). Теория пластического течения используется для

моделирования эффектов дилатации и контракции, а также для отражения зависимости деформаций бетона от вида напряженного состояния. Механика разрушения используется для моделирования процесса разупрочнения материала и изменения жесткости в рамках циклического и знакопеременного нагружения. Для моделирования процесса разупрочнения при растяжении используется энергетический подход, позволяющий учесть масштабный эффект и выполнить регуляризацию проблемы локализации необратимых деформаций. Модель учитывает основные особенности напряженно-деформированного состояния материала, характерные для статического кратковременного нагружения, и может быть использована для решения широкого спектра задач (в первую очередь для моделирования разрушения железобетонных плит от продавливания). Модель реализована в ПК «ANSYS» на языке программирования FORTRAN77.

3. Корректность работы модели бетона подтверждена на основании серии валидационных тестов, в которых воспроизводилась работа бетонных образцов и железобетонных конструкций под статической нагрузкой. В ходе опытов, где на бетонных образцах воссоздавалось двухосное напряженное состояние (двуосное сжатие и сжатие-растяжение), наиболее существенная разница между величинами предельных осевых напряжений, полученными численно и экспериментально составила 7,6 %. Для опытов, где бетонные образцы испытывали трехосное неравномерное сжатие, максимальное отклонение между величинами предельных осевых напряжений составило 6,1 % для первой серии опытов и 5,9 % для второй серии опытов.

В работе выполнено численное моделирование серии железобетонных балок, нагруженных сосредоточенной силой в середине пролета. Картина трещинообразования, а также графики нагрузка-перемещения в лабораторных и численных опытах имеют схожий характер и значения. Максимальная разница между величинами разрушающей нагрузки среди всех образцов составила 9,4 %, а между перемещениями, соответствующими разрушающей нагрузке – 13,2 %.

Проведено численное моделирование серии железобетонных плит на продавливание. Образцы имели разную рабочую высоту и содержание продольной

арматуры. Максимальная разница между величинами предельного продавливающего усилия составила 5,7 %, а между перемещениями, соответствующими разрушающей нагрузке – 13,5 %.

На основании результатов валидации сделан вывод, что разработанная модель позволяет с достаточной точностью моделировать работу бетона при разных видах напряженно-деформированного состояния при статическом кратковременном нагружении, отражает влияние масштабного эффекта и не обладает чувствительностью результатов к размеру конечно-элементной сетки.

4. Для исследования влияния ряда факторов на несущую способность железобетонных плит при продавливании было выполнено 107 численных опытов, разделенных на 4 серии в соответствии с исследуемым фактором. В результате получены зависимости, подтверждающие наличие существенного влияния исследуемых факторов на несущую способность железобетонных плит при их разрушении от продавливания как с поперечной арматурой, так и без нее.

В первой серии численных опытов выполнялось исследование влияния масштабного эффекта на несущую способность плит при разном соотношении вклада поперечной арматуры F_{sw} и бетона F_b согласно СП 63.13330.2018. Согласно полученным результатам, с увеличением рабочей высоты плиты h_0 ее абсолютная несущая способность увеличивается, а относительная, выраженная с помощью номинальных нормализованных напряжений τ_n/R_{bt} – падает. Для плит без поперечного армирования уменьшение τ_n/R_{bt} с ростом h_0 с 0,3 м до 1,5 м составило 51,0 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 0,5$ изменение составило 26,6 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 0,75$ изменение составило 23,7 %, для плит с $F_{sw}/F_b = 1,0$ изменение составило 20,1 %. Уменьшение влияния масштабного эффекта при росте интенсивности поперечного армирования объясняется участием арматуры в уравнении энергетического баланса.

Во второй серии численных опытов выполнялось исследование влияния пролета среза плиты на ее несущую способность при продавливании. При уменьшении величины пролета среза r_λ происходит рост несущей способности конструкции и деформаций. Наиболее интенсивный рост несущей способности

наблюдается при $r_\lambda \leq 4$, что соответствует результатам лабораторных испытаний. При уменьшении величины r_λ с 10 до 2 рост величины τ_n/R_{bt} был примерно одинаковым для образцов с разной рабочей высотой и составил в среднем 26,8 %.

В третьей серии численных опытов выполнялось исследование влияния относительного размера опоры u_0/h_0 на несущую способность плиты. Согласно полученным результатам, увеличение относительного размера опоры u_0/h_0 приводит к росту несущей способности и деформаций, соответствующих наступлению предельного состояния. Подобное поведение объясняется увеличением периметра контура расчетного поперечного сечения и. При росте u_0/h_0 с 6 до 12 снижение τ_n/R_{bt} было примерно одинаковым для плит с разной рабочей высотой, с поперечным армированием и без него, и в среднем составило 9,0 %. Таким образом, можно заключить, что уменьшение τ_n/R_{bt} практически не зависит от наличия поперечного армирования и его распределения вокруг опоры. Следовательно, изменение u_0 влияет не только на вклад бетона F_b в несущую способность плиты, но и на вклад поперечного армирования F_{sw} .

В четвертой серии численных опытов выполнялось исследование влияния процента продольного армирования растянутой зоны плиты μ на ее несущую способность при разрушении от продавливания. При увеличении μ с 0,5 % до 2 % увеличение номинальных нормализованных напряжений τ_n/R_{bt} для плит без поперечной арматуры составило в среднем 71,1 %; для плит с поперечной арматурой – 35,2 %. Более высокий рост несущей способности для плит без поперечного армирования объясняется тем, что изменение процента продольного армирования растянутой зоны оказывает влияние только на вклад бетона F_b .

5. Представлена инженерная методика для расчета железобетонных плит на продавливание, отражающая влияние основных факторов, оказывающих влияние на несущую способность конструкции. С помощью регрессии методом наименьших квадратов, используя алгоритм Левенберга-Марквардта на основании результатов экспериментальных данных, были получены коэффициенты методики. При сравнении с результатами экспериментальных данных представленная методика обладает наименьшим коэффициентом вариации CV и величиной

коэффициента детерминации R^2 , наиболее близкой к 1, среди всех рассмотренных расчетных методик ($CV = 0,19, R^2 = 0,91$ для плит с поперечной арматурой; для плит без поперечной арматуры: $CV = 0,20, R^2 = 0,84$ для плит с $r_\lambda \leq 4, \mu < 1\%$, $CV = 0,24, R^2 = 0,95$ для плит с $r_\lambda \leq 4, \mu \geq 1\%$, $CV = 0,20, R^2 = 0,97$ для плит с $r_\lambda > 4, \mu < 1\%$, $CV = 0,16, R^2 = 0,97$ для плит с $r_\lambda > 4, \mu \geq 1\%$). В рамках сравнения с результатами численных опытов представленная методика также обладает наименьшим CV среди всех рассмотренных подходов ($CV = 0,09, R^2 = 0,93$ для серии опытов №1, $CV = 0,07, R^2 = 0,96$ для серии опытов №2, $CV = 0,12, R^2 = 0,92$ для серии опытов №3, $CV = 0,07, R^2 = 0,98$ для серии опытов №4). Представленная инженерная методика позволяет с высокой точностью выполнять оценку несущей способности железобетонных плит с поперечной арматурой и без нее при их разрушении от продавливания.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы:

1. Модель бетона может быть усовершенствована для более точного учета сил зацепления. Данная задача может быть достигнута путем применения анизотропной системы трещин в совокупности с энергетическим или вероятностно-кинематическим подходом. Учет сил зацепления позволит исследовать вклад данного фактора в несущую способность конструкции.

2. В качестве дальнейшего развития методика расчета железобетонных плит на продавливание может быть усовершенствована путем учета влияния ряда факторов: влияние сосредоточенного изгибающего момента, действующего на опоре, влияние продольной силы, действующей в плите (например, от преднапряжения), а также учет влияния дополнительного сжимающего усилия со стороны вышележащей опоры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматизированные методы расчета массивных железобетонных конструкций при объемном напряженном состоянии: методическое пособие. — ФАУ «ФЦС», 2019. – 131 с.
2. Антонов, М. Д. Силовое сопротивление монолитных зданий с безбалочными перекрытиями при повреждениях узлов сопряжения плиты и колонны от продавливания: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Антонов Михаил Дмитриевич. – М., 2024. – 189 с.
3. Берг, О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона / О. Я. Берг. – М.: Госстройиздат, 1962. – 98 с.
4. Болгов, А. Н. Работа узлов сопряжения колонн из высокопрочного бетона с перекрытием в монолитных зданиях с рамно-связевой системой: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.01 / Болгов Андрей Николаевич. – М., 2005. – 152 с.
5. Бударин, А. М. Деформационно – прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением / А. М. Бударин, Г. И. Ремпель, А. А. Камзолкин, В. Н. Алехин // Вестник МГСУ. – 2023. – №18. – С. 517-532.
6. Бударин, А. М. Деформационно – прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением и повреждением / А. М. Бударин, Г. И. Ремпель, А. А. Камзолкин, В. Н. Алехин // Вестник МГСУ. – 2024. – №19. – С. 527-543.
7. Бударин, А. М. Численное исследование влияния масштабного эффекта на продавливание толстых железобетонных плит / А. М. Бударин, О. Ю. Ушаков, Л. С. Сабитов // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. – 2025. – №1. – С. 26-33.
8. Бударин, А. М. Методика расчета плит на продавливание, построенная с использованием регрессионного анализа / А. М. Бударин, О. Ю. Ушаков, Л. С. Сабитов [и др.] // Вестник МГСУ. – 2025. – №6. – С. 867-887.
9. Гаяутдинов, З. Ш. Влияние конструктивных параметров узла сопряжения плиты и колонны на прочность железобетонных плит при продавливании: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Гаяутдинов Зульфат Шавкатович. – Казань, 2022. – 208 с.
10. Гвоздев, А. А. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций: монография / А. А. Гвоздев. – М.: Стройиздат, 1978. – 158 с.
11. Гениев, Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.

12. Залесов, А. С. Сопротивление железобетонных элементов при действии поперечных сил. Теория и новые методы расчета прочности: дис. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Залесов Александр Сергеевич. – М., 1979. – 358 с.
13. Зенин, С. А. Прочность на продавливание плоских плит перекрытий в зонах опирания на торцы стен. / С. А. Зенин, А. Н. Болгов, А. З. Сокуров, О. В. Кудинов // Бетон и железобетон. – 2022. – №2. – С. 35-40.
14. Истомин, А. Д. Зависимость границ микротрецинообразования бетона от его прочности и вида напряженного состояния / А. Д. Истомин, Н. А. Беликов // Вестник МГСУ. – 2011. – №2. – С. 159-162.
15. Кабанцев, О. В. Анализ напряженно-деформированного состояния плитных конструкций в приопорных зонах / О. В. Кабанцев, К. О. Песин, А. В. Карлин // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – № 1 (13). – С. 55-62.
16. Карпенко, Н. И. Общие модели механики железобетона / Н. И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
17. Качановский, С. Г. Сопротивление сплошных плит с поперечной арматурой действию концентрированной нагрузки: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Качановский Сергей Георгиевич. – М., 1982. – 188 с.
18. Клованич, С. Ф. Продавливание железобетонных плит. Натурный и численный эксперименты / С. Ф. Клованич, В. И. Шеховцов. – Одесса: ОНМУ, 2011. – 119 с.
19. Коровин, Н. Н. Продавливание толстых железобетонных плит / Н. Н. Коровин, А. Ю. Голубев // Бетон и железобетон. – 1989. – №11. – С. 20-23.
20. Коровин, Н. Н. Продавливание свайных ростверков колоннами / Н. Н. Коровин, В. Н. Голосов // Труды НИИЖБ. – 1974. – №10. – С. 25-40.
21. Коровин, Н. Н. Продавливание фундаментов колоннами / Н. Н. Коровин, А. В. Ступкин // Труды НИИЖБ. – 1974. – №10. – С. 4-24.
22. Корсун, В. И. К учету направленного развития микроразрушений в ортотропной модели бетона / В. И. Корсун // Будівельні конструкції. – 1999. – № 50 – С. 119-124.
23. Корсун, В. И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в условиях температурных воздействий / В. И. Корсун. – Макеевка: ДонГАСА, 2003. – 153 с.
24. Крылов, С. Б. Принципиальные вопросы прочности железобетонных плит при продавливании / С. Б. Крылов, О. В. Кабанцев, С. В. Трофимов // Бетон и железобетон. – 2024. – № 4 (623) – С. 50-58.

25. Круглов, В. М. Нелинейное сопротивление элементов железобетонных мостовых конструкций: дис. докт. техн. наук. – Новосибирск, 1988. – 385 с.
26. Лейтес, Е. С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь диаграммы деформаций материала / Е. С. Лейтес // Новые исследования элементов железобетонных конструкций при различных предельных состояниях. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1982. – С. 24-32.
27. Недорезов, А. В. Деформации и прочность железобетонных элементов при сложных режимах объемного напряженного состояния: дис. канд. техн. наук наук: 05.23.01. – Макеевка, 2018. – 229 с.
28. Работнов, Ю. Н. Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1987. – 80 с.
29. Ремпель, Г. И. Обзор и сравнительный анализ критериев прочности для моделирования нелинейного поведения бетона / Г. И. Ремпель, А. М. Бударин, А. П. Долгих [и др.] // Вестник МГСУ. – 2024. – №4. – С. 857-877.
30. Ремпель, Г. И. Анализ НДС агрегатных блоков высоконапорных ГЭС со сталежелезобетонной конструкцией спиральной камеры / Г. И. Ремпель, А. П. Долгих // Гидротехническое строительство. – 2023. – №1. – С. 32-46.
31. Семенов, А. С. Вычислительные методы в теории пластичности / А. С. Семенов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 210 с.
32. Сергиевский, А. Д. О расчетах плит на продавливание / А. Д. Сергиевский // Бетон и железобетон. – 1962. – №6. – С. 20-27.
33. Силантьев, А. С. Проблемы учета действительной работы узлов сопряжения плоских безбалочных плит перекрытий с колоннами / А. С. Силантьев // Труды VI Международной конференции студентов и молодых ученых. – Издательство Томского политехнического университета, 2009. – С. 726-729.
34. СНиП 2.03.01-84 «Бетонные и железобетонные конструкции»: утв. Госстроем СССР 01.01.85: дата введения 01.01.86. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1984. – 79 с
35. Сокуров, А. З. Продавливание плоских железобетонных плит, усиленных поперечной арматурой: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.01 / Сокуров Алим Зуберович. – М., 2015. – 155 с.
36. Соловьев, Л. Ю. Нелинейная модель бетона на основе теории пластического течения / Л. Ю. Соловьев // Systems Methods Technologies. – 2014. – №4. – С. 131-140.
37. СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. СНиП 52-01-2003» – М.: Минстрой России, 2019. – 118 с.

38. Тамразян, А. Г. Анализ экспериментальных исследований по продавливанию плит пилонами / А. Г. Тамразян // Актуальные проблемы строительной отрасли и образования: сб. докладов Первой Национальной конференции. – М.: Изд-во МИСИ – МГСУ, 2020. – С. 177-185.
39. Тамразян, А. Г. К анализу узла сопряжения монолитных плит и колонн при продавливании / А. Г. Тамразян // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: Мат-лы Междунар. акад. чтений под ред. С. И. Меркулова. – Курск: ЗАО "Университетская книга", 2020. – С. 101-109.
40. Тамразян, А. Г. К напряженно-деформированному состоянию монолитных плит при продавливании пилонами / А. Г. Тамразян // Актуальные проблемы строительной отрасли и образования: сб. докладов Первой Национальной конференции. – М.: Изд-во МИСИ – МГСУ, 2020. – С. 170-176.
41. Филатов, В. Б. Анализ влияния конструктивных параметров на прочность железобетонных плит при продавливании / В. Б. Филатов, Е. П. Бубнов, А. К. Алексеев [и др.] // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. – № 4. – С. 646-649.
42. Фишерова, М. Ф. Исследование безбалочных бескарпитеческих перекрытий, возводимых методом подъема, для многоэтажных промышленных зданий: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Фишерова Марина Федоровна. – М., 1971. – 138 с.
43. Шеховцов, И. В. Прочность и деформативность железобетонных плит без поперечной арматуры при продавливании: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Шеховцов Игорь Владиславович. – Одесса, 1992. – 187 с.
44. ACI 318-25. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. – Farmington Hills (MI): American Concrete Institute, 2025.
45. Alekhin, V. N. Investigation of longitudinal reinforcement contribution in shear punching of reinforced concrete flat slabs without transverse reinforcement / V. N. Alekhin, A. M. Budarin, M. V. Pletnev, L. I. Avdonina // MATEC Web of Conferences. – 2019. – Vol. 279.
46. Al-Yousif, A. T. Punching resistances of RC slabs supported by large and/or elongated columns / A. T. Al-Yousif, P. E. Regan // Struct Eng. – 2003. – Vol. 81 – Issue 5 – P. 30-34.
47. Andersson, J. L. Punching of concrete slabs with shear reinforcement: Bulletin No. 212. / J. L. Andersson – Stockholm, 1963. – 59 p.
48. Andrä, H. P. Dübelleisten zur Verhinderung des Durchstanzens bei hochbelasteten Flachdecken / H. P. Andrä // Bautechnik. – 1979. – Vol. 56. – P. 244-247.

49. Andrä, H. P. Zum Tragverhalten von Flachdecken mit Dübelleisten, Bewehrung in Auflagerbereich / H. P. Andrä // Beton- und Stahlbetonbau. – 1981. – Vol. 76. – P. 100-104.
50. Andrä, H. P. Durchstanzbewehrung für Flachdecken // H. P. Andrä, W. H. Dilger, A. Ghali / Beton- und Stahlbetonbau. – 1979. – Vol. 74. – P. 129-132.
51. ANSYS 2023R1 ANSYS Mechanical APDL. Feature Archive, 2023.
52. ANSYS 2023R1 ANSYS Mechanical APDL. Material reference, 2023.
53. Azadi Kakavand, M. R. An enhanced damage plasticity model for predicting the cyclic behavior of plain concrete under multiaxial loading conditions / M. R. Azadi Kakavand, E. Taciroglu // Frontiers of Structural and Civil Engineering. – 2020. – Vol. 14. – P. 1531-1544.
54. Bažant, Z. P. Confined Compression Tests of Cement Paste and Concrete up to 300 ksi / Z. P. Bažant, F. C. Bishop, T. Chang // ACI Structural Journal. – 1986. – Vol. 83. – P. 553-560.
55. Bažant, Z. P. Crack band theory for failure of concrete // Z. P. Bažant, B. H. Oh / Materials and Structures. – 1983. – Vol. 16. – P. 155-177.
56. Bažant, Z. P. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials / Z. P. Bažant, J. Planas. – Boca Raton: C.R.C., 1998. – 170 p.
57. Bellamy, C. J. Strength of concrete under combined stress / C. J. Bellamy // ACI Journal Proceedings. – 1961. – Vol. 58. – Issue 4. – P. 367-380.
58. Bellotti, R. Results of tests carried out on cylindrical concrete specimens subjected to complex stress states: a critical analysis / R. Bellotti, E. Ronzoni // International conference. concrete under multiaxial conditions. – Toulouse: 1984. – P. 9-19.
59. Bellotti, R. Cylinder tests: Experimental technique and results / R. Bellotti R., P. Rossi // Materials and Structures. – 1991. – Vol. 24. – Issue 1. – P. 45-51.
60. Beutel, R. Durchstanzen schubbewehrter Flachdecken im Bereich von Innenstützen: Ph. D. thesis, RWTH Aachen University. – Aachen, Germany, 2002.– 369 p.
61. Beutel, R. The effect of anchorage on the effectiveness of the shear reinforcement in the punching zone / R. Beutel, J. Hegger // Cement and Concrete Composites. – 2002. – Vol. 24. – Issue 6. – P. 539-549.
62. Binici, B. Punching Shear Strengthening of Reinforced Concrete Flat Plates Using Carbon Fiber Reinforced Polymers / B. Binici, O. Bayrak // Journal of Structural Engineering. – 2003. – Vol. 129. – Issue 9. – P. 1173-1182.

63. Birkle, G. Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout: Ph. D. thesis, University of Calgary. – Calgary, Canada, 2004. – 217 p.
64. Birkle, G. Influence of Slab Thickness on Punching Shear Strength / G. Birkle, H. D. Walter // ACI Structural Journal. – 2008. – Vol. 105. – Issue 2. – P. 180-188.
65. Bompa, D. Punching shear strength of RC flat slabs at interior connections to columns / D. Bompa, T. P. Onet // Magazine of Concrete Research. – 2015. – Vol. 68. – Issue 1. – P. 24-42.
66. Caldentey, A. P. Influence of stirrup detailing on punching shear strength of flat slabs / A. P. Caldentey, P. P. Lavaselli, H. Corres, F. A. Fernandez // Engineering Structures. – 2013. – Vol. 49. – P. 855-865.
67. Candappa, D. C. Complete triaxial stress-strain curves of high-strength concrete / D. C. Candappa, J. G. Sanjayan, S. Setunge // Journal of Materials in Civil Engineering. – 2001. – Vol. 3. – P. 209-215.
68. Candappa, D. C. Stress versus strain relationship of high strength concrete under high lateral confinement / D. C. Candappa, S. Setunge, J. G. Sanjayan // Cement and Concrete Research. – 1999. – Vol. 29. – Issue 12. – P. 1977-1982.
69. Caner, F. C. Microplane model M4 for concrete. II: Algorithm and calibration / F. C. Caner, Z. P. Bažant // Journal of Engineering Mechanics. – 2000. – Vol. 126 – Issue 9. – P. 954-961.
70. Červenka, J. On crack band model in finite element analysis of concrete fracture in engineering practice / J. Červenka, V. Červenka, S. Laserna // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – Vol. 197. – P. 27-47.
71. Chana, P. S. A prefabricated shear reinforcement system for flat slabs / P. S. Chana // Proceedings of the institution of civil engineers: structures and buildings. – 1993. – P. 345-358.
72. Cheng, M. Y. Evaluation of Steel Fiber Reinforcement for Punching Shear Resistance in Slab-Column Connections. Part I: Monotonically Increased Loading / M. Y. Cheng, G. Parra-Montesinos // ACI Structural Journal. – 2010. – Vol. 107. – Issue 1. – P. 101-109.
73. Chern, J. C. Behavior of steel fiber reinforced concrete in multiaxial loading / J. C. Chern, H. J. Yang, H. W. Chen // ACI Materials Journal. – 1992. – Vol. 107. – Issue 1. – P. 101-109.
74. Clement, T. Influence de la précontrainte sur la résistance au poinçonnement de dalles en béton armé: Ph. D. thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. – Lausanne, Switzerland, 2012. – 250 p.

75. Cordon, W. A. Variables in concrete aggregates and portland cement paste which influence the strength of concrete / W. A. Cordon, H. A. Gillespie // ACI Journal Proceedings. – 1963. – Vol. 60. – Issue 8. – P. 1029-1050.
76. Corley, W. G. Shearhead Reinforcement for Slabs / W. G. Corley, N. M. Hawkins // ACI Journal. – 1968. – Vol. 65. – Issue 10. – P. 811-824.
77. Crisfield, M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials / Crisfield, M. A. – New Jersey: John Wiley & Sons, 1996. – 364 p.
78. Dieterle, H. Tragverhalten quadratischer Einzelfundamente aus Stahlbeton / H. Dieterle, F. Rostasy // Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. – 1987. – Vol. 387. – P. 1-91.
79. Dilger, W. Effect of Flexural Reinforcement on Punching Shear Resistance / W. Dilger, G. Birkle, D. Mitchell // American Concrete Institute. – 2005. – SP-232. – P. 57-74.
80. Donmez, A. Size Effect on Punching Strength of Reinforced Concrete Slabs with and without Shear Reinforcement / A. Donmez, P. Z. Bažant // ACI Structural Journal. – 2017. – Vol. 114. – Issue 4. – P. 875-886.
81. Duke, C. M. Some properties of concrete under sustained combined stresses / C. M. Duke, H. E. Davis // Proceedings-American society for testing and materials. – 1944. – Vol. 4. – P. 888-896.
82. Einpaul, J. Punching strength of continuous flat slabs: Ph. D. thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. – Lausanne, Switzerland, 2016. – 209 p.
83. Einpaul, J. Study on Influence of Column Size and Slab Slenderness on Punching Strength / J. Einpaul, J. Bujnak, R. M. Fernández, A. Muttoni // ACI Structural Journal. – 2016. – Vol. 113. – P. 135-145.
84. Eistner, R. C. Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs / R. C. Eistner, E. Hognestad // Journal of the American Concrete Institute. – 1956. – Vol. 53. – P. 29-58.
85. Elshafey, A. A. Prediction of punching shear strength of two-way slabs / A. A. Elshafey, E. Rizk, H. Marzouk, M. R. Haddara // Engineering Structures. – 2011. – Vol. 33. – Issue 5. – P. 1742-1753.
86. Esfahani, M. R. Punching Shear Strength of Interior Slab-Column Connections Strengthened with Carbon Fiber Reinforced Polymer Sheets / M. R. Esfahani, M. R. Kianoush // Engineering Structures. – 2009. – Vol. 7. – P. 1535-1542.

87. Etse, G. Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete / G. Etse, K. William // J. Eng. Mech.– 1994. – Vol. 120. – Issue 9. – P. 1983-2011.
88. Etter, S. Versuche zum Durchstanzverhalten von Stahlbetonplatten / S. Etter, D. Heinzmann, T. Jaeger, P. Marti // Institut für Baustatik und Konstruktion. ETH Zürich. IBK Bericht Nr. 324, vdf Verlag – Zürich, 2009 – 64 p.
89. EN 1992-1-1:2023. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, bridges and civil engineering structures. – Brussels: European Committee for Standardization (CEN), 2023. – 272 p.
90. Faria, D. M. V. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding / D. M. V. Faria, V. J. G. Lúcio, A. P. Ramos // Engineering Structures. – 2011. – Vol. 33. – Issue 6. – P. 2025-2043.
91. Farnam, Y. Behaviour of slurry infiltrated fibre concrete (SIFCON) under triaxial compression / Y. Farnam, M. Moosavi, M. Shekarchi [et. al.] // Cement and Concrete Research. – 2010. – Vol. 40. – Issue 11. – P. 1571-1581.
92. Fernández, R. M. Strengthening of flat slabs against punching shear using post-installed shear reinforcement / R. M. Fernández, A. Muttoni, J. Kunz // ACI Structural Journal. – 2010. – Vol. 107. – Issue 4. – P. 434-442.
93. fib Model Code for Concrete Structures 2020. – fib Lausanne: Ernst & Sohn, 2020.
94. Gabet, T. Triaxial behavior of concrete under high stresses: Influence of the loading path on compaction and limit states / T. Gabet, Y. Malecot, L. Daudeville // Cement and Concrete Research. – 2008. – Vol. 38. – Issue 3. – P. 403-412.
95. Galavi, V. Nonlocal multilaminate model for strain softening analysis / V. Galavi, F. H. Schweiger // International Journal of Geomechanics. – 2010. – Vol. 10. – Issue 1. – P. 30-44.
96. Ghannoum, C. M. Effect of high-strength concrete on the performance of slab-column specimens: master's thesis, McGill University. – Montreal, Canada, 1998.
97. Gomes, R. B. Punching Resistance of RC Flat Slabs with Shear Reinforcement / R. B. Gomes, P. E. Regan // Journal of Structural Engineering. – 1999. – Vol. 125. – Issue. 6. – P. 421-428.
98. Gopalaratnam, V. S. Softening response of plain concrete in direct tension / V. S. Gopalaratnam, S. P. Shah // ACI Journal Proceedings. – 1985. – Vol. 82– Issue 3. – P. 310-323.

99. Graf, O. Versuche über die Widerstandsfähigkeit von allseitig aufliegenden dicken Eisenbetonplatten unter Einzellasten / O. Graf // Deutscher Ausschuss für Eisenbeton – Heft 88. – 1938.
100. Grassl, P. CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete / P. Grassl, D. Xenos, U. Nyström [et. al.] // International Journal of Solids and Structures. – 2013. – Vol. 50. – Issue 24. – P. 3805-3816.
101. Grassl, P. Damage-plastic model for concrete failure / P. Grassl, M. Jirásek // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – Issue 22-23. – P. 7166-7196.
102. Guandalini, S. Punching Tests of Slabs with Low Reinforcement Ratios / S. Guandalini, O. Burdet, A. Muttoni // ACI Structural Journal. – 2008. – Vol. 106. – Issue 1. – P. 87-95.
103. Guidotti, R. Poinçonnement Des Planchers-Dalles Avec Colonnes Superposées Fortement Sollicitées: Ph. D. thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. – Lausanne, Switzerland, 2010. – 226 p.
104. Hallgren, M. Punching Shear Capacity of Reinforced High Strength Concrete Slabs: Ph. D. thesis, KTH Stockholm. – Stockholm, Sweden, 1997.
105. Hallgren, M. Punching shear tests on column footings / M. Hallgren, S. Kinnunen, B. Nylander // Nordic Concrete Research. – 1998. – Vol. 21. – P. 1-22.
106. Hawkins, N. M. Influence of column rectangularity on the behavior of flat plate structures / N. M. Hawkins, H. B. Falssen, R. C. Hinojosa // ACI Spec Publ. – 1971. – Vol. 30. – Issue 6. – P. 127-146.
107. Hawkins, N. M. Progressive Collapse of Flat Plate Structures / N. M. Hawkins, L. D. Mitchel // Journal of the American Concrete Institute. – 1979. – Vol. 76. – Issue 7. – P. 775-808.
108. Hegger, J. Zur maximalen Durchstanztragfähigkeit von Flachdecken / J. Hegger, F. Häusler, M. Ricker // Beton und Stahlbetonbau. – 2007. – Vol. 102. – Issue 11. – P. 770-777.
109. Huang, M. Regularized finite element modeling of progressive failure in soils within nonlocal softening plasticity / M. Huang, X. Qu, X. Lu // Computational Mechanics. – 2017. – Vol. 62. – P. 347-358.
110. Imran, I. Experimental study of plain concrete under triaxial stress / I. Imran, S. J. Pantazopoulou // ACI Materials Journal. – 1996. – Vol. 93. – Issue 6. – P. 589-601.
111. Jiang, H. Calibration of the continuous surface cap model for concrete / H. Jiang, J. Zhao // Finite Elements in Analysis and Design. – 2015. – Vol. 97. – P. 1-19.

112. Jirásek, M. Numerical aspects of the Crack Band Approach / M. Jirásek, M. Bauer // Computers & Structures. – 2012. – Vol. 110-111. – P. 60-78.
113. Kabasntsev, O. V. Numerical study of the punching shear mechanism for thin and thick reinforced concrete slabs / O. V. Kabasntsev, S. B. Krylov, S. V. Trofimov // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol. 17. – P. 91-105.
114. Karsan, I. D. Behavior of concrete under compressive loadings / I. D. Karsan, J. O. Jirsa // Journal of the Structural Division. – 1969. – Vol. 95. – Issue 3. – P. 2543-2563.
115. Kim, J. Y. Punching Shear of Two-way Slabs Retrofitted with Prestressed or Non-prestressed CFRP Sheets / J. Y. Kim, J. M. Longworth, R. G. Wight, M. F. Green // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2001. – Vol. 29. – Issue 8. – P. 24-31.
116. Kinnunen, S. Punching of concrete slabs with two-way reinforcement / S. Kinnunen, H. Nylander // Transactions of the Royal Institute of Technology. – Stockholm, Sweden. – 1963. – No. 198.
117. Kinnunen, S. Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement / S. Kinnunen, H. Nylander // Transactions of the Royal Institute of Technology. – Stockholm, Sweden. – 1960. – No. 158. – 112 p.
118. Kormeling, H. A. Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy-modified concrete / H. A. Kormeling, H. W. Reinhardt // Stevin Laboratory 5-83-18. Delft University of Technology. – 1983.
119. Kotsovos, M. D. Effect of stress path on the behavior of concrete under triaxial stress states / M. D. Kotsovos // Journal of American Concrete Institute. – 1979. – Vol. 76. – Issue 2. – P. 213-223.
120. Kruger, G. Punching strength of R.C. Flat slabs with moment transfer / G. Kruger, O. Burdet, R. Favre // International Workshop on Punching Shear - Proceedings. – 2000. – P. 333-341.
121. Kueres, D. Two-parameter kinematic theory for punching shear in reinforced concrete slabs: Ph. D. thesis, RWTH Aachen University. – Aachen, Germany, 2018. – 233 p.
122. Kupfer, H. B. Behavior of concrete under biaxial stresses / H. B. Kupfer, K. H. Gerstle // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1973. – Vol. 99. – Issue 4. – P. 853-866.
123. Ladner, M. Experimentelle Untersuchungen an Stahlbeton-Flachdecken. Eidgenössische Materialprüfungs-und Versuchsanstalt / M. Ladner, W. Schaeidt, S. Gut // Bericht Nr. 205, Dilbendorf. – 1977.

124. Langohr, P. H. Special Shear Reinforcement for Concrete Flat Plates / P. H. Langohr, A. Ghali, W. H. Dilger // ACI Journal. – 1976. – Vol. 73. – P. 141-146.
125. Lantsoght, E. Literature review of punching shear in reinforced concrete slabs / E. Lantsoght // Georgia Institute of Technology, Report No. 09-10, 2009. – 94 p.
126. Launay, P. Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress / P. Launay, H. Gachon // ACI Materials Journal. – 1972. – P. 23-34.
127. Levenberg, K. A. Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares / K. A. Levenberg // Quarterly of Applied Mathematics. – 1944. – Vol. 2. – Issue 2. – P. 164-168.
128. Li, K. K. L. M. Influence of size on punching shear strength of concrete slabs: master's thesis, McGill University. – Montreal, Canada, 2000.
129. Li, X. Punching Shear Behavior of Slab-Column Connections: Ph. D. thesis, The University of Sheffield. – Sheffield, UK 1997.
130. Lim, J. C. Finite-Element Modeling of Actively Confined Normal-Strength and High-Strength Concrete under Uniaxial, Biaxial, and Triaxial Compression / J. C. Lim, T. Ozbakkaloglu, A. Gholampour [et. al.] // Journal of Structural Engineering. – 2016. – Vol. 142. – Issue 11.
131. Lips, S. Punching of Flat Slabs with Large Amounts of Shear Reinforcement: Ph. D. thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. – Lausanne, Switzerland, 2012. – 273 p.
132. Lips, S. Experimental Investigation on the Punching Strength and the Deformation Capacity of Shear-Reinforced Slabs / S. Lips, A. Muttoni, R. M. Fernández // ACI Structural Journal. – 2012. – Vol. 109. – Issue 6. – P. 889-900.
133. Lovorovich, J. S. Punching Shear Behavior of Slabs With Varying Span-Depth Ratios / J. S. Lovorovich, D. I. McLean // ACI Structural Journal. – 1990. – Vol. 87. – Issue 5. – P. 507-512.
134. Manterola, M. Poinçonnement des dalles sans armature d'effort trenchant / M. Manterola // Comite Europeen du Beton (Hrsg.): Dalles, Structures planes. CEB-Bull. – dlnformation No. 58. Paris, 1966.
135. Marquardt, D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters / D. Marquardt // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1963. – Vol. 11. – Issue 2. – P. 431-441.
136. Marzouk, H. Experimental Investigation on the Behavior of High Strength Concrete Slabs / H. Marzouk, A. Hussein // ACI Structural Journal, Proceedings. – 1991. – Vol. 88. – Issue 6. – P. 701-713.

137. Marzouk, H. Effect of High-Strength Concrete Columns on the Behavior of Slab-Column Connections / H. Marzouk, M. Emam, M. S. Hilal // ACI Structural Journal – 1963. – Vol. 93. – Issue 5. – P. 1-8.
138. Menetrey, P. Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures: Ph. D. thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. – Lausanne, Switzerland, 1994. – 198 p.
139. Menetrey, P. A triaxial failure criterion for concrete and its generalization / P. Menetrey, K. J. William // ACI Structural Journal. – 1995. – Vol. 92. – Issue 3. – P. 311-318.
140. Michel, L. Criteria for punching failure mode in RC slabs reinforced by externally bonded CFRP / L. Michel, E. Ferrier, D. Bigaud, A. Agbossou // Composite Structures. – 2007. – Vol. 81. – Issue 3. – P. 438-449.
141. Moe, J. Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings under Concentrated Loads / J. Moe // Bulletin D47. – Portland Cement Association. Skokie, 1961. – 135 p.
142. Mörsch, E. Der Eisenbetonbau-Seine Theorie und Anwendung / E. Mörsch // Stuttgart: Stuttgart, K. Wittwer. – 1908. – 393 p.
143. Mueller, F. X. Durchstanzversuche an Flachdecken mit Aussparungen / F. X. Mueller, A. Muttoni, B. Thürlmann // IBK. – Bericht (ETHZ), Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich, Birkhäuser Verlag.
144. Nelissen, L. J. M. Biaxial Testing of Normal Concrete / L. J. M. Nelissen // Heron. – 1972. – Vol. 18. – Issue 1. – P. 1-90.
145. Oliveira, D. R. C. Punching Resistance of RC Slabs with Rectangular Column / D. R. C. Oliveira, P. Regan, G. S. Melo // Magazine of Concrete Research. – 2004. – Vol. 56. – Issue 3. – P. 123-138.
146. Ozden, S. Punching shear tests of normal- and high-strength concrete flat plates / S. Ozden, U. Ersoy, T. Ozturan // Canadian Journal of Civil Engineering. – 2006. – Vol. 33. – Issue 11. – P. 1389-1400.
147. Papanikolaou, K. V. Punching Shear Testing of Reinforced Concrete Slabs and Design Implications / K. V. Papanikolaou, I. A. Tegos, A. J. Kappos // Magazine of Concrete Research. – 2005. – Vol. 57. – Issue 3. – P. 167-177.
148. Pralong, J. Poinçonnement symétrique des planchers-dalles / J. Pralong // IBK-Bericht Nr.131, Institut fUr Baustatik und Konstruktion ETH ZURich. – 1982.
149. Punching of structural concrete slabs. Technical report. fib Bulletin No. 12. – Lausanne, 2001. – 314 p.

150. Ramdane, K. E. Punching Shear of High Performance Concrete Slabs / K. E. Ramdane // Utilization of High Strength/High Performance Concrete. – 1996. – Vol. 3. – P. 1015-1026.
151. Regan, P. E. Shear Reinforcement against punching in reinforced concrete flat slabs / P. E. Regan, F. Samadian // The Structural Engineer. – 2001. – Vol. 79. – Issue 10. – P. 24-31.
152. Regan, P. E. Symmetric Punching of Reinforced Concrete Slabs / P. E. Regan // Magazine of Concrete Research. – 1986. – Vol. 38. – Issue 136. – P. 115-128.
153. Richart, F. E. Reinforced concrete walls and column footings, parts 1 and 2 / F. E. Richart // ACI Structural Journal. – 1948. – Vol. 20. – Issue 2. – P. 97-127.
154. Rizk, E. Experimental validation of minimum flexural reinforcement for thick high-strength concrete plates / E. Rizk, H. Marzouk // ACI Structural Journal. – 2011. – Vol. 108. – Issue 3. – P. 332-340.
155. Rizk, E. Punching shear of thick plates with and without shear reinforcement / E. Rizk // ACI Structural Journal. – 2011. – Vol. 108. – Issue 5. – P. 581-591.
156. Sagaseta, J. Punching of flat slabs supported on rectangular columns / J. Sagaseta, L. Tassinari, R. M. Fernández, A. Muttoni // Engineering Structures. – 2014. – Vol. 77. – P. 17-33.
157. Schaefers, U. Konstruktion, Bemessung und Sicherheit gegen Durchstanzen von balkenlosen Stahlbetondecken im Bereich der Innenstützen / U. Schaefers // DafStb Heft 357, Beuth. – Verlag, Berlin. – 1984.
158. Schmidt, P. Punching shear behavior of reinforced concrete flat slabs with a varying amount of shear reinforcement / P. Schmidt, D. Kueres, J. Hegger // Structural Concrete. – 2020. – Vol. 21. – Issue 1. – P. 235-246.
159. Sfer, D. Study of the behavior of concrete under triaxial compression / D. Sfer, I. Carol, R. Gettu, G. Etse // Journal of Engineering Mechanics. – 2002. – Vol. 128. – Issue 2. – P. 156-163.
160. Shahram, D. Punching shear resistance of reinforced concrete flat slabs: Ph. D. thesis, The University of Manchester. – Manchester, UK, 2014. – 246 p.
161. Shlyannikov, V. N. Elastic-Plastic Mixed-Mode Fracture Criteria and Parameters / V. N. Shlyannikov // Berlin: Springer. – Verlag, Berlin Heidelberg, 2003. – 246 p.
162. Siburg, C. Punching shear design of footings: critical review of different code provisions / C. Siburg, M. Ricker, J. Hegger // Structural Concrete. – 2020. – Vol. 15. – Issue 4. – P. 497-508.

163. Siburg, C. Experimental investigations on the punching behavior of reinforced concrete footings with structural dimensions / C. Siburg, J. Hegger // Structural Concrete. – 2014. – Vol. 15. – Issue 3. – P. 331-339.
164. Simones, J. T. The mechanics of punching in reinforced concrete slabs and footings without shear reinforcement: Ph. D. thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. – Lausanne, Switzerland, 2018.– 224 p.
165. Simones, J. T. Punching shear tests on compact footings with uniform soil pressure / J. T. Simones, J. Bujnak, R. M. Fernández, A. Muttoni // Structural Concrete. – 2016. – Vol. 4. – P. 603-617.
166. Simones, J. T. Validation of the Critical Shear Crack Theory for punching of slabs without transverse reinforcement by means of a refined mechanical model / J. T. Simones, R. M. Fernández, A. Muttoni // Structural Concrete. – 2018. – Vol. 19. – Issue 1. – P. 191-216.
167. Sissakis, K. Strengthening concrete slabs for punching shear with carbon fiber-reinforced polymer laminates / K. Sissakis, S. A. Sheikh // ACI Structural Journal. – 2006. – Vol. 104. – Issue 1. – P. 49-59.
168. Sistonen, E. Teräsbetonilaatan lävistyskapasiteetin laskentakaavan geometrinen malli / E. Sistonen, M. Lydman, S. Huovinen // Talonrakennustekniikan laboratorio, Teknillinen korkeakoulu, Report No. 69, 1997.
169. Smadi, M. M. Behavior of high-strength fibrous concrete slab – column connections under gravity and lateral loads / M. M. Smadi, I. S. Yasin // Construction and Building Materials. – 2008. – Vol. 22. – Issue 8. – P. 1863-1873.
170. Smith, S. H. On fundamental aspects of concrete behavior: master's thesis, University of Colorado at Boulder. – Boulder, United States, 2000.
171. Smith, S. S. Concrete over the top, or: Is there life after peak? / S. S. Smith, K. J. Willam, K. H. Gerstle, S. Sture // ACI Materials Journal. – 1989. – Vol. 86. – Issue 5. – P. 491-497.
172. Starosolski, W. Punching shear test of r/c slabs with double headed studs / W. Starosolski, P. Zbigniew, R. Jasiński, D. Drobiec // Quality and Reliability in Building Industry. – 1999. – Vol. 1. – P. 81-96.
173. Swamy, R. Punching shear behavior of reinforced slab-column connections made with steel fiber concrete / R. Swamy, S. Ali // ACI Structural Journal. – 1982. – Vol. 79. – P. 392-406.
174. Talbot, A. N. Reinforced Concrete Wall Footings and Column Footings / A. N. Talbot // Georgia Institute of Technology, Bulletin No.67, 1913. – 114 p.

175. Tassinari, L. Non-axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement / L. Tassinari, R. M. Fernández, A. Muttoni, J. Sagaseta // Magazine of Concrete Research. – 2011. – Vol. 63. – Issue 6. – P. 441-457.
176. Teng, S. Punching shear strength of slabs with openings and supported on rectangular columns / S. Teng, H. K. Cheong, K. L. Kuang, J. Z. Geng // ACI Structural Journal. – 2004. – Vol. 101. – Issue 5. – P. 678-687.
177. Tolf, P. Plattjocklekens Inverkan Pa Betongplattors Hallfasthet vid Genornstansning. Forsok med cikulara plattor / P. Tolf // TRITA-BST Bull. 146, Institutionen for Byggnadsstatik. KTH, Stockholm. – 1988. – 64 p.
178. Tomaszewicz, A. High-Strength Concrete. SP2 - Plates and Shells / A. Tomaszewicz // Report 2.3 Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs. Report No. STF70 A93082, SINTEF Structures and Concrete, Trondheim. – 1993. – 36 p.
179. Urban, T. Nosnosc na przebiecie w aspekcie proporcji bokow slupa Badania / T. Urban // Doswiadczone Elementów I Konstrukcji Betonowych. Report No. 3. – 1994.
180. Urban, T. The analysis of the effectiveness of different types of punching shear reinforcement not fully anchored / T. Urban, M. Goldyn, L. Krawczyk // Budownictwo i Architektura. – 2013. – Vol. 14. – Issue 3. – P. 195-202.
181. Van Mier, J. G. M. Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions: Ph. D. thesis, Technische Hogeschool Eindhoven. – Eindhoven, Netherlands, 1984.
182. Vecchio, F. Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests / F. Vecchio, W. Shim // Journal of Structural Engineering. – 2004. – Vol. 139.
183. Vollum, R. L. Design of ACI-type punching shear reinforcement to Eurocode 2 / R.L. Vollum, T. Abdel-Fattah, M. Eder, A. Y. Elghazouli // Magazine of Concrete Research. – 2009. – Vol. 62. – Issue 1. – P. 3-16.
184. Wallraven, C. J. Fundamental Analysis of Aggregate Interlock / C. J. Wallraven // Journal of the Structural Division. – 1981. – Vol. 107. – Issue 11.
185. Wang, C. Z. Experimental investigation of biaxial and triaxial compressive concrete strength / C. Z. Wang, Z. H. Guo, X. Q. Zhang // ACI Materials Journal. – 1987. – Vol. 84. – Issue 2. – P. 92-100.
186. Yang, B. L. A Bounding Surface Plasticity Model for Concrete / B. L. Yang, J. F. Dafalias, I. R. Herrmann // J. Eng. Mech. – 1985. – Vol. 111. – Issue 3. – P. 359-380.

Приложение А. Внедрение результатов



АО «Институт Гидропроект»

Волоколамское шоссе, д. 2, Москва,
Российская Федерация, 125993

т.: +7 (495) 727-36-05
+7 (499) 678-12-25

hydro@hydroproject.ru
www.mhp.rushydro.ru

СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ

Настоящим подтверждается, что модель пластичного деформирования и разрушения бетона с учетом повреждаемости, разработанная Будариным Александром Михайловичем в рамках диссертационной работы «Разработка модели пластичного деформирования и разрушения бетона с учётом повреждаемости и её применение для оценки сопротивляемости плоских плит перекрытий продавливанию», была успешно применена для обоснования прочности и механической безопасности конструкций для принятых проектных решений в рамках проекта по реконструкции и техническому перевооружению 2-х камерного сухого дока на «35 судоремонтном заводе».

Заместитель Генерального директора –

Главный инженер

АО «Институт Гидропроект»

Подвысоцкий А. А.

УТВЕРЖДАЮ

Проект горизонтальной образовательной деятельности
ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого
Президента России Б.Н. Ельцина»

О.В. Обухов

2025 г.

АКТ

о внедрении результатов научных исследований,
полученных в диссертации Бударина Александра Михайловича
«Разработка модели пластичного деформирования и разрушения бетона с учетом
повреждаемости и ее применение для оценки сопротивляемости плоских плит
перекрытий продавливанию»

Результаты диссертационной работы А.М. Бударина «Разработка модели пластичного деформирования и разрушения бетона с учетом повреждаемости и ее применение для оценки сопротивляемости плоских плит перекрытий продавливанию» внедрены в учебный процесс Института Строительства и Архитектуры ФГБОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина».

Разработанные А.М. Бударином алгоритмы и решенные им в диссертационном исследовании задачи используются при изучении дисциплин «Железобетонные конструкции», «Применение современных расчётных комплексов для проектирования высотных и большепролетных зданий и сооружений» обучающимися Института Строительства и Архитектуры ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» в рамках программы высшего образования 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Директор
Института Строительства и Архитектуры

Н.И. Фомин

Утверждаю

Генеральный директор

ООО НПФ «СКАД СОФТ»:



А.А. Маляренко

2025 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационного исследования

Бударина Александра Михайловича
на тему:

**«РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ БЕТОНА С УЧЕТОМ
ПОВРЕЖДАЕМОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ
СОПРОТИВЛЕМОСТИ ПЛОСКИХ ПЛИТ ПЕРЕКРЫТИЙ
ПРОДАВЛИВАНИЮ»**

по научной специальности 2.1.9. «Строительная механика»

Специальная комиссия в составе:

Председатель: заместитель генерального директора по маркетингу
ООО НПФ "СКАД СОФТ" Андрей Владимирович Теплых;

Член комиссии: к. т. н., научный руководитель ООО НПФ «СКАД СОФТ», главный гос. эксперт по направлению 28 «Конструктивные решения» Владислав Владимирович Ходыкин.

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационного исследования Бударина Александра Михайловича на тему «Разработка модели пластичного деформирования и разрушения бетона с учетом повреждаемости и ее применение для оценки сопротивляемости плоских плит перекрытий продавливанию» представленного на соискание ученой степени кандидата

технических наук, использованы в деятельности ООО НПФ «СКАД СОФТ» при разработке и внедрении в SCAD++ в виде:

- математических моделей железобетона;
- методик расчета и моделирования;
- рекомендаций.

Использование указанных результатов диссертационного исследования позволяет обеспечить заданное качество проектирования монолитных конструктивных систем зданий и сооружений и повысить производительность труда инженеров-конструкторов.

Председатель специальной комиссии:

заместитель генерального директора по маркетингу
ООО НПФ "СКАД СОФТ":

Теплы A.B. Андрей Владимирович Теплых

Член специальной комиссии:

к. т. н., научный руководитель ООО НПФ «СКАД СОФТ», главный гос. эксперт по направлению 28 «Конструктивные решения»:

Ходыкин В.В. Владислав Владимирович Ходыкин.

Приложение Б. Формула для вычисления матрицы Якоби

В данном приложении представлена формула для вычисления матрицы Якоби, используемой в схеме «упругий предиктор – пластический корректор»:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} \cdot K \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_v}{\partial p} & \sqrt{3} \cdot K \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_v}{\partial q} & \sqrt{3} \cdot K \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_v}{\partial k_p} & \sqrt{3} \cdot K \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_v}{\partial X} & \sqrt{3} \cdot K \cdot m_v \\ 2 \cdot G \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_d}{\partial p} & 1 + 2 \cdot G \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_d}{\partial q} & 2 \cdot G \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_d}{\partial k_p} & 2 \cdot G \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial m_d}{\partial X} & 2 \cdot G \cdot m_d \\ d\lambda \cdot \frac{\partial h_d}{\partial p} & d\lambda \cdot \frac{\partial h_d}{\partial q} & d\lambda \cdot \frac{\partial h_d}{\partial k_p} - 1 & d\lambda \cdot \frac{\partial h_d}{\partial X} & h_d \\ d\lambda \cdot \frac{\partial h_v}{\partial p} & d\lambda \cdot \frac{\partial h_v}{\partial q} & d\lambda \cdot \frac{\partial h_v}{\partial k_p} & d\lambda \cdot \frac{\partial h_v}{\partial X} - 1 & h_v \\ \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial k_p} & \frac{\partial f}{\partial X} & 0 \end{bmatrix}$$