Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Казанский государственный энергетический университет»

А.С. Ситдиков

ТЕНЗОРНЫЕ *C**-КАТЕГОРИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Казань
2020

УДК 514.743.2
ББК 22.151.512
С41

Рецензенты:

д-р физ. мат. наук, проф. С.А. Григорян;
канд. физ.-мат. наук, доц. Р.Н. Гумеров

С41 **Ситдиков, А. С.**
Тензорные *C-категории и их приложения к математической физике**: учебное пособие / А. В. Ситдиков. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2020. – 85 с.

Изложены *C**-структуры в тензорных категориях, которые играют основную роль в приложениях к физическим задачам. В частности, рассмотрены тензорные *C**-категории, обладающие перестановочной симметрией, с помощью которых успешно разрабатывается единый подход к основаниям квантовой физики. В качестве демонстрации рассматривается применение категорного языка для решения задач алгебраической квантовой теории.

Адресовано обучающимся физико-математических специальностей, а также интересующимся приложениями теории категорий в теоретической физике.

Издание публикуется в авторской редакции и авторском наборе.

УДК 514.743.2
ББК 22.151.512

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Благодаря появлению теории относительности (специальной и общей) и квантовой механики в начале XX века многие разделы естествознания получили мощнейший импульс для своего развития. Особо сильное воздействие эти открытия оказали на ход развития химии, биологии и философии. Что касается самой физики, то ее современное состояние вследствие глубокого осмысления основ квантовой теории и общей теории относительности позволяет не только обсуждать на теоретическом уровне казалось бы фантастические проблемы, но и ставить реальные эксперименты по квантовой телепортации, квантовой криптографии, путешествия во времени и т. д. Под влиянием совершенно новых идей возникли также и такие самостоятельные направления, как нанонаука, бионика и пр. Такой взлет научной мысли, в первую очередь, был обусловлен благодаря новым математическим обоснованиям двух разделов физики: применению в квантовой механике теории операторных алгебр в гильбертовых пространствах и дифференциальной геометрии в общей теории относительности. В то же время дальнейшее развитие идей двух этих теорий, приводившее к возникновению таких современных разделов квантовой теории поля, как теория суперструн и калибровочные теории, потребовало дальнейшего развития и самой математики. Вследствие такого обратного влияния произошло, с одной стороны, быстрое развитие алгебраической топологии, дифференциальной и симплектической геометрий, а с другой — появились и новейшие разделы, как некоммутативный анализ и некоммутативная геометрия.

Однако, несмотря на большие успехи, остались глубокие неразрешенные проблемы, самая главная из которых, как бы парадоксально не звучало, это несовместимость общей теории относительности с квантовой механикой в рамках квантовой гравитации. Поэтому поиск новых математических основ в качестве необходимого условия для дальнейшего прогресса науки представляется вполне разумным.

В настоящее время в качестве общих оснований как самой математики так и физики можно рассматривать теорию категорий. В физике, как можно надеяться, теоретико-категорный подход позволит хотя бы на качественном уровне разрешить такие фундаментальные задачи, как проблему квантового/пространства-времени (в первую очередь квантовой гравитации), проблему измерения, проблему континуума, проблему природы логики (например, квантовый мир подчиняется небулевой логике) и т.д. Разрешение хотя бы части этих задач будет индуцировать не только грандиозное изменение мира, но и также мировоззрения в целом.

Появление данного пособия мотивировано следующими соображениями. Во-первых, описание фундаментальных теорий на новых основаниях или же на новом языке нельзя рассматривать в отрыве от процесса образования и в первую очередь, это касается вопросов подготовки аспирантов соответствующих направлений. Во-вторых, в России по теории категорий хотя и было выпущено много книг и обзоров учебного и монографического характера, среди них посвященных тензорным симметрическим категориям, по-видимому нет, по крайней мере автору это неизвестно. Поэтому целью настоящего пособия является изложение как основ этой теории, так и демонстрация ее применения к построению тензорных C^*-категорий 1-коциклов частично упорядоченного множества и к применению в аксиоматической алгебраической квантовой физике. Более конкретно, рассматриваеся решение фундаментальной проблемы восстановления полевой алгебры из суперотборной структуры алгебры наблюдаемых в более простом случае, а именно для 4-мерного плоского пространства-времения Минковского.

Пособие адресовано аспирантам, планирующим защищаться по специальностям 01.01.01 («Вещественный, комплексный и функциональный анализ»), 01.01.03 («математическая физика») и 01.01.04 («геометрия и топология») отрасли «физико-математические науки». Пособие состоит из двух глав, включающих параграфы и подпараграфы, поэтому первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер параграфа и третья – на номер подпараграфа. В нумерации формул, теорем и лемм использована двойная нумерация, указывающая на номер главы и текущего номера внутри главы.

Первая глава содержит сведения по симплексным категориям и тензорным симметрическим C^*-категориям 1-коциклов. Материал этой главы играет огромную роль в алгебраической топологии и теории расслоений над частично упорядоченными множествами, которые являются самыми перспективными разделами современной математики в применениях соответственно к задачам пространственно-временных многообразий и квантовых теорий калибровочных полей в рамках локальной квантовой физики. В предлагаемом пособии не изложена теория расслоений, поскольку описание ее приложений к калибровочным теориям требует параллельного изложения и теории Янга-Миллса, что выходит за рамки данного пособия. С целью лучшего усвоения материала здесь приводятся первоначальные сведения по C^*-категориям и $*$-функторам, которые будут полезными также при изучении материала второй главы.

Вторая глава посвящена более глубокому изложению тензорных C^*-категорий и C^*-алгебры Доплихера-Робертса, которая получается из этой категории по конструкции, изложенной в §2.1. Далее рассматривается теория двойственности компактных групп Доплихера-Робертса, являющаяся обобщением двойственности Танаки-Крейна. Следует отметить, что теория двойственности Понтрягина для абелевых групп не допускала «простого» обобщения для случая неабелевых групп. Для этого Танаке и Крейну пришлось потратить время для того чтобы понять, что дуальным объектом к компактной неабелевой группе является категория представлений этой группы. При этом обязательно предполагается, что существует функтор из категории представлений в категорию гильбертовых пространств, поскольку представление строится с помощью непрерывного гомоморфизма из данной группы в группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Однако С. Доплихер и Дж. Робертс поняли, что требование существования функтора необязательно и, при наличии центрального элемента группы, он обязательно существует. Этот нетривиальный результат, являющийся обобщением дуальности Танаки-Крейна, позволил выйти за рамки конкретной дуальности и перейти в теорию абстрактной дуальности с многообещающими приложениями. Поэтому при изложении материала этой главы использованы работы С. Доплихера и Дж. Робертса, ссылки на которые приведены в тексте. В этой главе рассматривается действие полугруппы в C^*-алгебрах, играющее первостепенную роль в теории скрещенного произведения, и в качестве примера зложена техника скрещенного произведения C^*-алгебры Кунца с полугруппой эндоморфизмов.

Автор выражает благодарность проф. С.А. Григоряну за продуктивные стимулирующие обсуждения данной теории в его семинарах и А.С. Никитину, обладающему особым талантом производить необходимые вычисления практически без ошибок. Приложения теории тензорных симметрических C^*-категорий интенсивно обсуждались на семинарах по расслоениям и алгебраической квантовой теории, где без обширных знаний, сообразительности и интуиции Е.К. Липачевой и Е.В. Патрина данные результаты не могли быть получены. Автор выражает им огромную благодарность.

Глава 1

Гомотопии частично упорядоченных множеств и когомологии сетей

1.1 Определение и простейшие свойства C^*-категорий

1.1.1 Тензорные категории

C^*-категории естественным образом возникают при рассмотрении вопросов теории представлений, гармонического анализа, теории когомологий и т.д. В следующей главе рассматриваются более глубокие свойства таких категорий в контексте абстрактной дуальности компактных групп, которая является математической базой для восстановления полевой алгебры из алгебры наблюдаемых при наличии неабелевых правил суперотбора. Здесь же, в частности, будут рассматриваться C^*-категории 1-коциклов, которые возникают в неабелевых 1-когомологиях сетей C^*-алгебр наблюдаемых, поэтому прежде чем изложить основной материал этой главы, приводятся необходимые сведения по теории C^*-категорий.

Пусть $\mathcal{C}$ – категория. Обозначим ее объекты через $z, z_1, z_2, ...$, а множество морфизмов между z, z_1 обозначим через (z, z_1). Композицию морфизмов обозначим как "$\cdot$" и тождественный морфизм для (z, z) как 1_z. Морфизм $t \in (z_1, z_2)$ является изоморфизмом, если существует $s \in (z_2, z_1)$ такой, что

$$s \cdot t = 1_{z_1}, \quad t \cdot s = 1_{z_2}.$$

Изоморфность z_1 и z_2 обозначим как $z_1 \sim z_2$.

Функторы и естественные преобразования

Рассмотрим две категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. Ковариантный функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ называется:

1) *верным*, если $s, t \in (z_1, z_2)$ с $t \neq s$ влечет $F(s) \neq F(t)$;

2) *полным*, если $F(z, z_1) = (F(z), F(z_1))$;

3) *плотным*, если для любого $z_2 \in \mathcal{C}_2$ существует $z_1 \in \mathcal{C}_1$ такой, что $F(z_1) \sim z_2$;

4) *инволютивным*, если $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$ и $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$, где $\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$ тождественный функтор для $\mathcal{C}_1$.

Естественное преобразование $u : F \to G$ между парами функторов $F, G : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ есть отображение, ставящее в соответствие морфизм $u(z)$ из $\mathcal{C}_2$ некоторому объекту z из $\mathcal{C}_1$, такое, что

$$\begin{array}{lll} (1) & u(z) \in (F(z), G(z)), & z \in \mathcal{C}_1; \\ (2) & F(f) \cdot u(z) = u(z_1) \cdot G(f), & f \in (z, z_1). \end{array}$$

u представляет естественный *изоморфизм*, если только $u(z)$ есть изоморфизм для любого $z \in \mathcal{C}_1$. В этом случае говорят, что F и G *изоморфны* и пишут $F \sim G$.

Изоморфизм категорий представляет собой функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, для которого существует другой функтор $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ такой, что

$$G \circ F = 1_{\mathcal{C}_1}, \quad F \circ G = 1_{\mathcal{C}_2} \ .$$

Если только

$$G \circ F \sim 1_{\mathcal{C}_1}, \quad F \circ G \sim 1_{\mathcal{C}_2} \ ,$$

то говорят, что F – *эквивалентность*. Если F – изоморфизм (эквивалентность), то $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ изоморфны (эквивалентны). Другими словами, F – эквивалентность, если и только если он полный, верный и плотный.

1.1.2 C^*-категории

Категория $\mathcal{C}$ называется C^*-категорией, если множество морфизмов (z, z_1) между двумя объектами z, z_1 образует комплексное банахово пространство и композиция между морфизмами есть билинейное отображение $t, s \to t{\cdot}s$ с $||t{\cdot}s|| \leq ||t||{\cdot}||s||$; в этой категории действует контравариантный функтор $*$, действующий на объектах тождественно, поэтому норма морфизма удовлетворяет C*-свойству: $||r^* \cdot r|| = ||r||^2$ для любого $r \in (z, z_1)$. Если $\mathcal{C}$ является C^*-категорией, то множество (z, z) является C^*-алгеброй для каждого z.

Положим, что $\mathcal{C}$ есть C^*-категория. Морфизм $v \in (z, z_1)$ называется изометрией, если $v^* \cdot v = 1_z$; унитарным, если он является изометрией и удовлетворяет соотношению $v \cdot v^* = 1_{z_1}$. Свойство унитарности определяет отношения эквивалентности во множестве объектов категории. Обозначим через $[z]$ унитарно эквивалентные классы объекта z. Объект z называется неприводимым, если $(z, z) = \mathbb{C} \cdot 1_z$ (это прямое следствие леммы Шура). Категория $\mathcal{C}$ называется замкнутой относительно подобъектов, если для каждого ортопроектора $e \in (z, z)$, $e \neq 0$ существует изометрия $v \in (z_1, z)$ такая, что $v \cdot v^* = e$. $\mathcal{C}$ называется замкнутой относительно прямых сумм, если для заданных z_i (где $i = 1, 2$) существует объект z и две изометрии $w_i \in (z_i, z)$ такие, что $w_1 \cdot w_1^* + w_2 \cdot w_2^* = 1_z$.

Симметрические тензорные C^*-категории

Тензорная C^*-категория $\mathcal{C}$ – это C^*-категория, снабженная тензорным произведением $\otimes$. Это означает, что каждой паре объектов z, z_1 соответствует объект $z \otimes z_1$, и $\mathcal{C}$ имеет тождественный объект ι (единицу) такую, что $z \otimes \iota = z = \iota \otimes z$. При этом для двух морфизмов $t \in (z, z_1)$ и $s \in (z_2, z_3)$ существует морфизм $t \otimes s \in (z \otimes z_2, z_1 \otimes z_3)$. Отображение $t, s \to t \otimes s$ ассоциативное и билинейное и

$$1_\iota \otimes t = t = t \otimes 1_\iota, \qquad (t \otimes s)^* = t^* \otimes s^*,$$

а правило

$$(t \otimes s) \cdot (t_1 \otimes s_1) = t \cdot t_1 \otimes s \cdot s_1$$

имеет место, если только определена правая часть.

Такие категории часто называют строго моноидальными, которые вкратце можно определить как тройку $(\mathcal{C}, \otimes, \iota)$, где $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ есть ассоциативный билинейный функтор (тензорное произведение), коммутирующий с операцией сопряжения "$*$". Категория $\mathcal{C}$ называется *симметрическим*, если имеет место перестановочная симметрия. Это означает, что определено отображение $\varepsilon : \mathcal{C} \ni z_1, z_2 \longrightarrow \varepsilon(z_1, z_2) \in (z_1 \otimes z_2, z_2 \otimes z_1)$, удовлетворяющее условиям:

(1) $\varepsilon(z_3, z_4) \cdot t \otimes s \;=\; s \otimes t \cdot \varepsilon(z_1, z_2)$

(2) $\varepsilon(z_1, z_2)^* \;=\; \varepsilon(z_2, z_1)$

(3) $\varepsilon(z_1, z_2 \otimes z) \;=\; 1_{z_2} \otimes \varepsilon(z_1, z) \cdot \varepsilon(z_1, z_2) \otimes 1_z$

(4) $\varepsilon(z_1, z_2) \cdot \varepsilon(z_2, z_1) \;=\; 1_{z_2 \otimes z_1}$

где $t \in (z_2, z_4), s \in (z_1, z_3)$.

Левое обратное отображение объекта z есть множество ненулевых линейных отображений $\phi^z = \{\phi^z_{z_1,z_2} : (z \otimes z_1, z \otimes z_2) \longrightarrow (z_1, z_2)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $\phi^z_{z_3,z_4}(1_z \otimes t \cdot r \cdot 1_z \otimes s^*) = t \cdot \phi^z_{z_1,z_2}(r) \cdot s^*$,

(2) $\phi^z_{z_1 \otimes z_3, z_2 \otimes z_3}(r \otimes 1_{z_3}) = \phi^z_{z_1,z_2}(r) \otimes 1_{z_3}$,

(3) $\phi^z_{z_1,z_1}(s_1^* \cdot s_1) \geq 0$,

(4) $\phi^z_{\iota,\iota}(1_z) = 1$,

где $s \in (z_1, z_3)$, $t \in (z_2, z_4)$, $r \in (z \otimes z_1, z \otimes z_2)$ и $s_1 \in (z \otimes z_1, z \otimes z_1)$. Также, если любой объект категории имеет левое обратное отображение, то говорят, что $\mathcal{C}$ имеет *левое обратное.*

Рассмотрим две симметрические тензорные C^*-категории $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. Пусть $(\otimes_1, \varepsilon_1)$ и $(\otimes_2, \varepsilon_2)$ – соответствующие тензорные произведения и перестановочные симметрии в этих категориях. *-функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ называется *симметрическим тензорным *-функтором*, если для любых пар объектов z_1, z_2 и любых пар морфизмов категории $\mathcal{C}_1$ справедливо:

$$\begin{aligned} F(z \otimes_1 z_1) &= F(z) \otimes_2 F(z_1)\ , \\ F(t \otimes_1 s) &= F(t) \otimes_2 (F(s)\ , \\ F(\varepsilon_1(z, z_1)) &= \varepsilon_2(F(z), F(z_1))\ . \end{aligned}$$

Две симметрические тензорные C^*-категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ называются эквивалентными (изоморфными), если существует симметрический тензорный *-функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, являющийся эквивалентностью (изоморфизмом). *Тензорное естественное преобразование* $u : F \to G$ между двумя симметрическими тензорными *-функторами $G, F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ есть такое естественное преобразование, что $u(z \otimes_1 z_1) = u(z) \otimes_2 u(z_1)$. Говорят, что имеет место *тензорный естественный изоморфизм* (*тензорная естественная унитарность*), если это естественный изоморфизм (естественная унитарность).

1.1.3 Статистика и сопряжение

Пусть $\mathcal{C}$ – симметрическая тензорная C^*-категория с левым обратным отображением. Говорят, что объект z имеет *конечную* статистику, если он допускает *стандартное левое обратное* такое, что левое обратное ϕ^z удовлетворяет соотношению

$$\phi^z_{z,z}(\varepsilon(z,z)) \cdot \phi^z_{z,z}(\varepsilon(z,z)) = c \cdot 1_z, \;\; c > 0.$$

Полная подкатегория $\mathcal{C}_f$ категории $\mathcal{C}$, объекты которой имеют *конечную статистику*, замкнута относительно прямой суммы, подобъектов, тензороного произведения и эквивалентности. Любой объект из $\mathcal{C}_f$ представляет собой прямую сумму неприводимых объектов. Если задан неприводимый объект z из $\mathcal{C}_f$ и левое обратное ϕ^z для z, то

$$\phi^z_{z,z}(\varepsilon(z,z)) = \lambda(z) \cdot 1_z \;.$$

Число $\lambda(z)$ представляет инвариант класса эквивалентности объекта z и называется *статистическим параметром.* Этот инвариант представляет собой произведение двух инвариантов:

$$\lambda(z) = \chi(z) \cdot d(z)^{-1} \;\; \text{где} \;\; \chi(z) \in \{1, -1\}, \;\; d(z) \in \mathbb{N}.$$

Возможная статистика объекта z классифицируется с помощью *статистической фазы* $\chi(z)$, которая разделяет пара-бозе (1) и пара-ферми

(-1) статистики, и т.н. *статистической размерностью* $d(z)$, которая определяет порядок парастатистики. Обычным Бозе и Ферми статистикам соответствует $d(z) = 1$.

Объект z имеет *сопряжение*, если существует объект $\bar{z}$ и пара морфизмов $r \in (\iota, \bar{z} \otimes z)$, $\bar{r} \in (\iota, z \otimes \bar{z})$, которые удовлетворяют *уравнениям сопряжения*

$$\bar{r}^* \otimes 1_z \cdot 1_z \otimes r = 1_z, \quad r^* \otimes 1_{\bar{z}} \cdot 1_{\bar{z}} \otimes \bar{r} = 1_{\bar{z}}.$$

Свойство сопряжения устойчиво относительно подобъектов, прямых сумм, тензорного произведения и эквивалентности. Отсюда следует, что если z имеет сопряжение, то z имеет конечную статистику.

Рассмотрим две симметрические тензорные C^*-категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ и пусть $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ – полный и верный симметрический тензорный *-функтор. Пусть $r \in (\iota, \bar{z} \otimes_1 z)$ и $\bar{r} \in (\iota, z \otimes_1 \bar{z})$ – решения уравнений сопряжения для z и $\bar{z}$. Тогда пара $F(r) \in (\iota, F(\bar{z}) \otimes_2 F(z))$ и $F(\bar{r}) \in (\iota, F(z) \otimes_2 F(\bar{z}))$ представляет решения уравнений сопряжения в $\mathcal{C}_2$ в соответствии с $F(z)$ и $F(\bar{z})$. В частности, z является неприводимым если и только если $F(z)$ является неприводимым и имеет ту же статистику, что и z.

Симметрическая тензорная C^*-категория имеет *сопряжение*, если *любой* объект категории имеет сопряжение.

1.1.4 Дуальность Допличера-Робертса

Суперотборная структура C^*-алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, как было показано С. Доплихером, Дж. Робертсом и Р. Хаагом, может быть описана с помощью локализованных транспортабельных эндоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ (см. §2.3 по поводу определений). Множество таких эндоморфизмов образует симметрическую тензорную C^*-категорию $End(\mathcal{A})$, где морфизмами служат сплетающие операторы, принадлежащие $\mathcal{A}$. Однако со структурной точки зрения, традиционное изложение квантовой теории поля основывается на полевой алгебре (алгебре, порожденной операторами заряженных полей), с которой ассоциируется компактная группа G калибровочных симметрий. Классическая теория дуальности Танаки и Крейна характеризует дуальный объект неабелевой компактной группы G с помощью категории гильбертовых пространств (на которых реализуются конечномерные представления G). Однако категории типа $End(\mathcal{A})$ не могут быть реализованы как категории гильбертовых пространств. В связи с этим возникает глубокий вопрос: являются ли изоморфными абстрактные симметрические тензорные категории к категории представлений компактной группы? Положительное в общем решение этой проблемы, принадлежит Доплихеру и Робертсу. Эту дуальность называют теперь абстрактной дуальностью Доплихера-Робертса для компактных групп и ее суть заключается в том, что любая абстрактная симметрическая тензорная категория с неприводимым единичным объектом и имеющая подобъекты, прямые суммы и сопряжения, изоморфна категории конечномерных представлений компактной группы G. Более полно эти вопросы будут рассмотрены в §2.2, а здесь ограничимся более кратким рассмотрением в контексте схематического изложения симметрических тензорных категорий.

Обозначим через $\overline{Sym}$ полную подкатегорию категории Sym, объектами которой являются симметрические тензорные C^*-категории с сопряжением. Главным результатом теоремы Доплихера-Робертса является теорема вложения: любой объект $\mathcal{C} \in \overline{Sym}$ можно вложить в категорию конечномерных гильбертовых пространств. Такое вложение есть пара (H, Hil), где $Hil \in \overline{Sym}$ – категория конечномерных гильбертовых пространств и $H : \mathcal{C} \to Hil$ есть симметрический тензорный *-функтор, являющийся полным и верным. Если (H, Hil) – вложение, множество

$$\mathrm{End}_{\otimes}(H) \equiv \{ \quad u : H \to H\},$$

удовлетворяющее правилу композиции $(u_1 \circ u)(z) \equiv u_1(z) \cdot u(z)$, есть компактная группа. Отсюда следует, что $\mathcal{C}$ является абстрактным дуальным объектом к $\mathrm{End}_{\otimes}(H)$. Эта группа ассоциируется с категорией $\mathcal{C}$ с точностью до изоморфизма. Это связано с тем, что вложение категории $\mathcal{C}$ определено не единственным образом и компактная группа, ассоциируемая с $\mathcal{C}$, зависит от выбора вложения. Однако для любого другого вложения (H', Hil') существует тензорная естественная унитарная эквивалентность

$$w : H \to H', \tag{1.1}$$

сопоставляющая любому объекту $z \in \mathcal{C}$ унитарный оператор $w(z)$, действующий из гильбертова пространства $H(z)$ в гильбертово пространство $H'(z)$. При этом w сохраняет тензорные произведения

$$w(z \otimes z_1) = w(z) \otimes' w(z_1)\ , \qquad z, z_1 \in \mathcal{C},$$

где $\otimes'$ есть тензорное произведение в категории Hil', и $w(z_1) \cdot H(t) = H'(t) \cdot w(z)$ для любых $z, z_1 \in \mathcal{C}$ и $t \in (z, z_1)$. Отсюда следует, что отображение

$$\mathrm{End}_{\otimes}(H) \ni u \to w \circ u \circ w^* \in \mathrm{End}_{\otimes}(H')$$

представляет изоморфизм групп, где

$$(w \circ u \circ w^*)(z) \equiv w(z) \cdot u(z) \cdot w^*(z), \qquad z \in \mathcal{C}.$$

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}$ – категории и (H, Hil), (H_1, Hil) – выбранные вложения. Рассмотрим полный и верный симметрический тензорный *–функтор $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$. Тогда пара $(H \circ F_1, Hil)$ обеспечивает другое вложение для $\mathcal{C}_1$. Обозначим через w_{F_1} тензорную естественную унитарную эквивалентность $w_{F_1} : H_1 \to H \circ F_1$ ассоциируемую с вложениями (H_1, Hil) и $(H \circ F_1, Hil)$. Для $u \in \mathrm{End}_{\otimes}(H)$ определим

$$\alpha_{F_1}(u)(z_1) \equiv w^*_{F_1}(z_1) \circ u(F(z_1)) \circ w_{F_1}(z_1), \qquad z_1 \in \mathcal{C}_1.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{F_1} : \mathrm{End}_{\otimes}(H) \to \mathrm{End}_{\otimes}(H_1)$$

есть морфизм групп. Рассмотрим теперь следующую категорию $\mathcal{C}_2$ и пусть (H_2, Hil_2) – вложение этой категории. Если $F_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ есть функтор, то существует тензорная естественная унитарная эквивалентность $w_{F_1} : H_2 \to H_1 \circ F_2$ и морфизм групп

$$\alpha_{F_2} : \mathrm{End}_{\otimes}(H_1) \to \mathrm{End}_{\otimes}(H_2),$$

определенный для любого $u_1 \in \mathrm{End}_{\otimes}(H_1)$ как

$$\alpha_{F_2}(u_1)(z_2) = w^*_{F_2}(z_2) \cdot u_1(F_2(z_2)) \cdot w_{F_2}(z_2) \ , \qquad z_2 \in \mathcal{C}_2.$$

Заметим, что $\alpha_{F_2} \circ \alpha_{F_1} : \mathrm{End}_{\otimes}(H) \to \mathrm{End}_{\otimes}(H_2)$. В частности, для $u \in \mathrm{End}_{\otimes}(H)$ и $z_2 \in \mathcal{C}_2$ имеем, что

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{F_2} \circ \alpha_{F_1})(u)(z_2) = \\
&\qquad = w^*_{F_2}(z_2) \cdot \alpha_{F_1}(u)(F_2(z_2)) \cdot w_{F_2}(z_2) \\
&\qquad = w^*_{F_2}(z_2) \cdot w^*_{F_1}(F_2(z_2)) \cdot u(F_1F_2(z_2)) \cdot w_{F_1}(F_2(z_2)) \cdot w_{F_2}(z_2).
\end{aligned}$$

Рассмотрим тензорную естественную унитарную эквивалентность $w_{F_1F_2} : H_2 \to H \circ F_1 \circ F_2$ и соответствующий морфизм групп $\alpha_{F_1F_2} : \mathrm{End}_{\otimes}(H) \to \mathrm{End}_{\otimes}(H_2)$ определенный для любого $u \in \mathrm{End}_{\otimes}(H)$ как

$$\alpha_{F_1F_2}(u)(z_2) = w^*_{F_1F_2}(z_2) \cdot u(F_1F_2(z_2)) \cdot w_{F_1F_2}(z_2) \ , \qquad z_2 \in \mathcal{C}_2 \ .$$

Теперь определим

$$w_{F_1,F_2;F_1F_2}(z_2) \equiv w^*_{F_2}(z_2) \cdot w^*_{F_1}(F_2(z_2)) \cdot w_{F_1F_2}(z_2) \ , \qquad z_2 \in \mathcal{C}_2 \ .$$

Отсюда следует, что $w_{F_1,F_2;F_1F_2}$ представляет элемент группы $\mathrm{End}_{\otimes}(H_2)$ и

$$(\alpha_{F_2} \circ \alpha_{F_1})(u)(z_2) = \mathrm{ad}_{w_{F_1,F_2;F_1F_2}(z_2)}(\alpha_{F_1F_2}(u)(z_2)).$$

1.2 Гомотопия частично упорядоченных множеств

Во многих приложениях алгебраической топологии для изучения физических вопросов и, в частности, для изучения суперотборых секторов в алгебраической квантовой теории поля, чрезвычайно полезными являются методы и подходы теории когомологий частично упорядоченных множеств. Однако, прежде чем перейти к когомологиям, рассмотрим предварительно гомотопии. Пусть M представляет собой некоторое многообразие и обозначим через K базу топологии для M, состоящую из открытых и линейно связных подмножеств M, имеющих непустое причинное дополнение. Кроме того, тем же символом K обозначим частично упорядоченное множество, которое для краткости будем назыать как *посет*, заимствуя этот термин от английского «Partial Ordered SET $\Rightarrow$ poset». Под посетом будем понимать непустое множество K с бинарным отношением порядка $\leq$, которое удовлетворяет соотношениям рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Посет K назовем направленным вверх, если $\forall\ a, a' \in K\ \exists o \in K$ такой, что $a, a' \leq o$. Посет называется линейно связным, если для любых пар $a, a' \in K$ найдутся такие две конечные последовательности $a_1, ..., a_{n+1}$ и $o_1, ..., o_n$ элементов K с $a_1 = a\ a_{n+1} = a'$, которые удовлетворяют соотношениям $a_i, a_{i+1} \leq o_i$, $i = 1, ..., n$. Заметим, что посет, направленный вверх, является также и линейно связным.

В приложениях к теории сетей C^*-алгебр посет удобно снабжать еше одним бинарным отношением – отношением причинной разделенности. Это нерефлексивное, но симметричное бинарное отношение $\perp$ удовлетворяет следующему свойству: $\forall o, a, \tilde{o} \in K$

$$o \perp a, \quad \tilde{o} \leq o \quad \Rightarrow \quad \tilde{o} \perp a.$$

Нерефлексивность означает, что $\nexists\ a \in K$ такой, что $a \perp a$. В физическом плане это соответствует тому, что никакая конечная область многообразия не может быть причинно разделенным с самим собой.

Посет всегда будем считать упорядоченным по *включению* $\subseteq$.

1.2.1 Симплициальные множества

Рассмотрим стандартный n-симплекс Δ_n, то есть подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемое как

$$\Delta_n = \big\{(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_i \in [0, 1]\big\},$$

где $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ – барицентрические координаты. Заметим, что Δ_n можно рассматривать как частично упорядоченное множество относительно включения его подсимплексов. Для всякого $n \geq 1$ существует семейство отображений $d_i^n : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$, где $0 \leq i \leq n$, такое, что

$$d_i^n(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_i, \ldots \lambda_{n-1}).$$

Данное семейство отображений сохраняет включение.

Пусть K – посет. *Сингулярный n-симплекс* посета K – это отображение $f:\Delta_n\to K$, сохраняющее включение. Обозначим через $\Sigma_n(K)$ множество сингулярных $n-$симплексов. Набор $\Sigma_*(K)$ всех сингулярных симплексов называется *симплициальным множеством* K. Отображения включения d_i^n между стандартными симплексами продолжаются до отображений $\partial_i^n:\Sigma_n(K)\to\Sigma_{n-1}(K)$, называемых *границами.* Все три отображения связаны соотношением дуальности $\partial_i^n f\doteq f\circ d_i^n$, где левую часть следует понимать не как композицию, а как одно отображение. Легко проверяется (см. также ниже), что в силу определения d_i^n выполняются следующие соотношения

$$\partial_i^{n-1}\circ\partial_j^n=\partial_j^{n-1}\circ\partial_{i+1}^n,\qquad i\geq j\ . \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем опускать верхние индексы в обозначении ∂_i^n. Обозначим композицию $\partial_i\circ\partial_j$ символом ∂_{ij}; 0-симплексы буквой a; 1-симплексы – b и 2-симплексы – c. Заметим, что 0-симплекс a – это всего лишь элемент K. 1-симплекс b образован из двух 0-симплексов $\partial_0 b$, $\partial_1 b$ и элемента $|b|$ из K, называемого *носителем* b, таких, что $\partial_0 b$, $\partial_1 b\subseteq|b|$; 2-симплекс c образован тремя 1-симплексами $\partial_0 c,\partial_1 c,\partial_2 c$ и 0-симплексом $|c|$ такими, что $\partial_0 c,\partial_1 c,\partial_2 c\subseteq|c|$. При этом так же, как и в случае 1-симплекса, $|c|\in K$ называется *носителем* 2-симплекса c. Таким образом, $\Sigma_1(K)$ представляет собой множество $\Sigma_1(K)\doteq\{b\doteq(|b|,\partial_0 b,\partial_1 b)\in K\times\Sigma_0(K)\times\Sigma_0(K):\partial_0 b,\partial_1 b\subseteq|b|\}$. Аналогично, $\Sigma_2(K)\doteq\{c\doteq(|c|,\partial_0 c,\partial_1 c,\partial_2 c)\in K\times\Sigma_1(K)\times\Sigma_1(K)\times\Sigma_1(K):\partial_0 c,\partial_1 c,\partial_2 c\subseteq|c|\}$ и т.д. Для 1-симплекса b *обратным* является 1-симплекс $\bar b$ заданный следующим образом:

$$\partial_0\bar b=\partial_1 b\ ,\quad \partial_1\bar b=\partial_0 b\ ,\quad |\bar b=|b|\ .$$

Говорят, что 1-симплекс b *вырождается в* 0-симплекс a_0, если

$$\partial_0 b=a_0=\partial_1 b,\qquad a_0=|b|\ .$$

Обозначим через $b(a_0)$ 1-симплекс, вырождаемый в a_0.

По индукции далее введем $n-$симплекс x как $(n+1)$ совокупности $(n-1)$ симплексов $\partial_0 x,...,\partial_n x$ с носителем $|x|\in K$. Таким образом,

$x \doteq \{\partial_0 x, \partial_1 x, ..., \partial_n x; |x|\}$ и $|\partial_i x| \leq |x|$ при любом $i = 0, 1, ..., n$. Заметим, что топологическому понятию «близости» точек в случае симплексов соответствует «близость» точек одного симплекса по сравнению с точками других симплексов.

Помимо отображений $\partial_i^n : \Sigma_n(K) \to \Sigma_{n-1}(K)$ введем на множестве $\Sigma_n(K)$ также отображения $\sigma_i : \Sigma_n(K) \to \Sigma_{n-1}(K)$ (где $0 \leq i \leq n$) и $\tau_i : \Sigma_n(K) \to \Sigma_n(K)$ (где $n \geq 1$ и $i \in \{0, ...n-1\}$). Последний тип отображения осуществляет перестановку соседних вершин и поэтому является отображением симметрии. При этом для отображений ∂ и σ должны выполняться следующие соотношения

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_{i+1}, \;\; i \geq j; \qquad \sigma_i \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_i, \;\; i \leq j;$$

$$\partial_i \sigma_j = \sigma_{j-1} \partial_i, \;\; i < j; \qquad \partial_j \sigma_j = \partial_{j+1} \sigma_j = 1; \qquad \partial_i \sigma_j = \sigma_j \partial_{i-1}, \;\; i > j+1.$$

Для всех трех отображений ∂, σ, τ выполнены следующие соотношения

$$\tau_i \tau_i = 1, \qquad \tau_i \tau_{i-1} \tau_i = \tau_{i-1} \tau_i \tau_{i-1}, \qquad \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_j, \;\; i < j-1;$$

$$\partial_j \tau_i = \tau_{i-1} \partial_j, \;\; i > j, \qquad \partial_{i+1} = \partial_i \tau_i, \qquad \partial_j \tau_i = \tau_i \partial_j, i < j-1;$$

$$\sigma_j \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_j, \;\; i > j, \quad \sigma_i \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \sigma_{i+1}, \quad \tau_i \sigma_i = \sigma_i, \quad \sigma_j \tau_i = \tau_i \sigma_j, \;\; i < j-1.$$

Согласно введенному отображению τ обратный $\bar{b}$ к 1-симплексу b можно определить как $\bar{b} = \tau_0 b$.

При изучении когомологий удобнее всего исходить из понятия контравариантного функтора из симплициальной категории в категорию множеств (в симплициальное множество). Симплициальную категорию, обозначаемую как $\triangle^+$, можно ввести несколькими способами. Проще всего ее ввести, если считать, что объектами этой категории являются порядковые числительные $\triangle_n = \{0, 1, ..., n\}$, где $n \geq 0$. При этом в качестве морфизмов следует взять монотонные отображения, являющиеся композициями следующих двух отображений. Первый вид отображения является инъективным монотонным отображением $d_i : (n-1) \to n$ с $i \in \{0, 1, ..., n\}$, которое определяется как

$$d_i(k) \equiv \begin{cases} k, & \text{если } k < i; \\ k+1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Например, рассмотрим объекты вида $\triangle_1 = \{0,1\}$ и $\triangle_2 = \{0,1,2\}$. Тогда $i = 0,1,2$ и d_0 отображает $0,1 \in \triangle_1$ в $1,2 \in \triangle_2$, d_1 отображает $0,1 \in \triangle_1$ в $0,2 \in \triangle_2$ и d_2 отображает $0,1 \in \triangle_1$ в $0,1 \in \triangle_2$. Второй вид отображения является монотонным сюръективным отображением $s_i(k)$: $(n+1) \to n$ с $i \in \{0,1,...,n\}$ и определяется следующим образом:

$$s_i(k) \equiv \begin{cases} k, & \text{если } k \le i; \\ k-1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Аналогично, если рассмотреть $s_i : \triangle_2 \to \triangle_1$, то при этом, например, s_0 отображает $0,1,2 \in \triangle_2$ в $\triangle_1$ следующим образом: образы точек 0 и 1, склеиваясь, отображаются в 0, а точка 2 отображается в точку 1.

Каждый объект $\triangle_n$ категории $\triangle^+$ можно считать частично упорядоченным множеством, подмножества (подсимплексы) которого упорядочены по включению. Чтобы отличить от $\triangle_n$ обозначим соответствующее частично упорядоченное множество как $\tilde{\triangle}_n$. Во избежание недоразумений заметим, что $\tilde{\triangle}_n$ есть ни что иное, как стандартный симплекс

$$\Delta_n = \big\{(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_i \in [0,1]\big\},$$

введенный в начале параграфа.

Любое отображение $m : \triangle_n \to \triangle_p$, являющееся в общем комбинациями отображений d и s, порождает также сохраняющее порядок отображение $\tilde{m} : \tilde{\triangle}_n \to \tilde{\triangle}_p$. Поэтому теперь становится понятным, почему рассмотрение контравариантного функтора из $\triangle^+$ удобно при рассмотрении когомологий: наряду с объектами категории рассматриваем также и морфизмы $\tilde{m}$, которые порождают морфизмы в категориях симплициальных множеств (сингулярных симплексов, групп, алгебр и пр.).

1.2.2 Пути в частично упорядоченных множествах

Для $a_0, a_1 \in \Sigma_0(K)$ *путем из* a_0 *в* a_1 является конечная упорядоченная последовательность $p = \{b_n, \ldots, b_1\}$ 1-симплексов, удовлетворяющих следующим соотношениям

$$\partial_1 b_1 = a_0 \ , \quad \partial_0 b_i = \partial_1 b_{i+1} \ \text{ где } \ i \in \{1, \ldots, n-1\} \ , \quad \partial_0 b_n = a_1 \ .$$

Начальной точкой p, обозначаемой $\partial_1 p$, является 0-симплекс a_0, *конечной точкой* p, обозначаемой $\partial_0 p$, является 0-симплекс a_1. *Носителем* $|p|$ пути p является открытое множество

$$|p| \doteq \cup_{i=1}^{n} |b_i| \ .$$

Обозначим через $K(a_0, a_1)$ множество путей из a_0 в a_1, а через $K(a_0)$ – множество замкнутых путей с начальной точкой a_0.

Множество путей снабжено следующими операциями. Рассмотрим путь $p = \{b_n, \ldots, b_1\} \in K(a_0, a_1)$. *Обратным* к p является путь

$$\bar{p} \doteq \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\} \in K(a_1, a_0) \ .$$

Композиция двух путей p и $q = \{b'_k, \ldots b'_1\}$ в $K(a_1, a_2)$ определяется следующим образом

$$q * p \doteq \{b'_k, \ldots, b'_1, b_n, \ldots, b_1\} \in K(a_0, a_2) \ .$$

Представив путь p в виде композиции 1-симплексов $p = b_n * b_{n-1} * ... * b_1$ и используя введенное выше отображение τ, обратный путь можно определить как $\bar{p} = \tau_0 b_1 * \tau_0 b_2 * ... * \tau_0 b_n$. Заметим, что операция взятия обратного – инволютивна, в то время как композиция $" * "$ ассоциативна.

Элементарная деформация пути p – это замена 1-симплекса $\partial_1 c$ пути на пару $\partial_0 c, \partial_2 c$, где $c \in \Sigma_2(K)$, или наоборот, замена последовательной пары $\partial_0 c, \partial_2 c$ 1-симплексов p одним 1-симплексом $\partial_1 c$. Два пути с одними и теми же концевыми точками являются *гомотопными*, если можно получить один из другого с помощью конечного набора элементарных деформаций. Гомотопия определяет отношение эквивалентности $" \sim "$ на множестве путей с одинаковыми концевыми точками. Например, с этой точки зрения пути

$$p = b_n * b_{n-1} * ... * b_i * \partial_1 c * b_{i-1} * ... * b_1$$

и

$$q = b_n * b_{n-1} * ... * b_i * \partial_0 c * \partial_2 c * b_{i-1} * ... * b_1$$

эквивалентны.

Операции взятия обратного и композиции связаны с отношением гомотопической эквивалентности следующими соотношениями:

$$\begin{array}{rcll} p \sim q & \Longleftrightarrow & \bar{p} \sim \bar{q}\ , & p, q \in K(a_0, a_1), \\ p \sim q\ ,\ p_1 \sim q_1 & \Rightarrow & p_1 * p \sim q_1 * q\ , & p_1, q_1 \in K(a_1, a_2)\ . \end{array} \tag{1.3}$$

Более того, для любого $p \in K(a_0, a_1)$ верно:

$$\begin{array}{lcl} p * b(a_0) \sim p & \text{и} & p \sim b(a_1) * p\ , \\ \bar{p} * p \sim b(a_0) & \text{и} & b(a_1) \sim p * \bar{p}\ , \end{array} \tag{1.4}$$

где $b(a_0)$ — это 1-симплекс, вырожденный к a_0. Рассмотрим теперь следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть $p = \{b_n, \ldots, b_1\}$ путь и $q = q_n * \cdots * q_1$ — путь, образованный композицией путей q_i таких, что*

$$|q_i| \subseteq |b_i|\ , \quad \partial_0 q_i \subseteq \partial_0 b_i\ , \quad \partial_1 q_i \subseteq \partial_1 b_i\ ,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Тогда выполняются следующие условия:
(a) Существует пара 1-симплексов $\tilde{b}, \hat{b}$, таких что $p \sim \tilde{b} * q * \hat{b}$;
(b) Если p и q — замкнутые пути, то найдется 1-симплекс b такой, что $p \sim \overline{b} * q * b$, где $\overline{b}$ — это обратный к b.

Доказательство:

(a) В силу (1.3) можно предположить, не теряя общности, что p – это 1-симплекс b. Пусть q — такой путь, что $|q| \subseteq |b|$, $\partial_0 q \subseteq \partial_0 b$, и $\partial_1 q \subseteq \partial_1 b$. Пусть $\hat{b}$ — 1-симплекс, заданный следующим образом

$$|\hat{b}| = |b|, \quad \partial_1 \hat{b} = \partial_1 b, \quad \partial_0 \hat{b} = \partial_1 q,$$

и пусть $\tilde{b}$ — это 1-симплекс:

$$|\tilde{b}| = |b|, \quad \partial_1 \tilde{b} = \partial_0 q, \quad \partial_0 \tilde{b} = \partial_0 b.$$

Заметим, что b и $\tilde{b} * q * \hat{b}$ имеют одинаковые концевые точки. Так как частично упорядоченное множество составлено из семейства $O \in K$ таких, что $O \subseteq |b|$ является направленным по включению, то эти два пути гомотопны.

Пункт (b) как легко видеть, следует из (a).

Аппроксимация многообразий частично упорядоченными множествами и линейная связность

Пусть S — открытое подмножество M. Пусть $K_S \doteq \{O \in K \mid cl(O) \subseteq S\}$. Поскольку элементы K являются линейно связными подмножествами M, оказывается, что S линейно связно тогда и только тогда, когда K_S является *линейно связным*:

$$\forall O_1, O_2 \in K_S \text{ найдется путь } \ p \text{ из } O_1 \text{ в } O_2 \text{ такой, что } cl(|p|) \subseteq S.$$

В частности, так как M линейно связно, то K линейно связно. Путь $p = \{b_n, \ldots, b_1\}$ называется *аппроксимацией* $\gamma : [0,1] \to M$, если есть разбиение $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ интервала $[0,1]$ такое, что

$$\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subseteq |b_i|, \qquad \gamma(s_{i-1}) \in \partial_1 b_i, \ \ \gamma(s_i) \in \partial_0 b_i, \ i = 1, \ldots n.$$

i=1,... n Обозначим через $App(\gamma)$ множество аппроксимаций γ. Оказывается, что $App(\gamma) \neq \emptyset$ для любой кривой γ. связи с этим рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1.1$'$**.** *Предположим, элементы K односвязны. Пусть $p, q \in K(a_0, a_1)$ — это соответственно две аппроксимации пар кривых γ и β с одинаковыми концевыми точками. Тогда γ и β гомотопны, если и только если p и q гомотопны.*

1.2.3 Фундаментальная группа частично упорядоченного множества

Зафиксируем базовый 0-симплекс a_0 и определим через

$$\pi_1(K, a_0) \doteq K(a_0)/\sim$$

факторизацию множества $K(a_0)$ замкнутых путей с концевой точкой a_0 относительно отношения гомотопической эквивалентности. Обозначим через $[p]$ класс эквивалентности $p \in K(a_0)$ относительно гомотопии и определим

$$[p] \cdot [q] \doteq [p * q] \ , \qquad [p], [q] \in \pi_1(K, a_0) \ .$$

Относительно этой композиции и в силу соотношений (1.3) и (1.4) мы видим, что $\pi_1(K, a_0)$ является группой. Единицей этой группы является класс эквивалентности $[b(a_0)]$, ассоциируемый с 1-симплексом, вырожденным к a_0, а обратным $[p]^{-1}$ к $[p]$ является класс эквивалентности $[\overline{p}]$, ассоциируемый обратным путем $\overline{p}$ к пути p. Эта группа представляет собой *первую гомотопическую группу посета K с базовым 0-симплексом a_0*. Более того, поскольку K является линейно связным, первая гомотопическая группа не зависит от выбора базового 0-симплекса a_0. Такой класс эквивалентности групп, обозначаемый как $\pi_1(K)$, называется *фундаментальной группой* посета K. В случае, когда $\pi_1(K)$ является тривиальной, говорят, что K является односвязной. Таким образом, имеет место импликация

$$K \text{ направлено} \quad \Rightarrow \quad K \text{ односвязно} . \tag{1.6}$$

Связь с топологическими понятиями соответствующего пространства-времени можно получить посредством леммы об аппроксимации частично-упорядоченных множеств. Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.2. *Положим, что элементы K односвязны. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(K)$ частично-упорядоченного множества и фундаментальная группа $\pi_1(M)$ пространства-времени M изоморфны.*

В качестве примера можно рассмотреть множество $K^d(M)$ ромбовидных областей многообразия M (diamonds), которое удовлетворяет требованию, описанному в теореме. Для таких областей имеем, что $\pi_1(K^d(M)) \simeq \pi_1(M)$. Но если только K является не односвязным, то такая изоморфность не имеет места.

1.2.4 Когомология сетей

С точки зрения приложений к квантовой теории поля, когомологии сетей служат для альтернативного описания суперотборных секторов. В случае пространства-времени Минковского традиционное определение суперотборных секторов как унитарно эквивалентных представлений алгебры наблюдаемых, удовлетворяющих критерию отбора Доплихера-Хаага-Робертса, эквивалентно определению секторов с помощью понятий когомологии сетей. При переходе к искривленным многообразиям традиционное определение секторов в вышеупомянутом смысле становится неполным и поэтому определение секторов с помощью когомологий открывает широкие возможности для исследования суперотборной структуры квантовых систем. В обычных абелевых когомологиях рассматриваются отображения из частично упорядоченных множеств в абелевы группы G. При изучении секторов в рамках *когомологии сетей*, как правило, рассматриваются когомологии посета K с коэффициентами в сети локальных алгебр (см. ниже, п. «Категория 1-коциклов»), что приводит к неабелевым 1-когомологиям. Однако рассмотрение неабелевых когомологий выше первой степени приводит к необходимости использования языка n-категорий, ассоциированного с группой G. Здесь теория высших категорий не будет рассматриваться, однако следует заметить, что обычную группу можно считать как категорию с одним объектом, где морфизмы – суть элементы этой группы. Если рассматривать морфизмы между такими морфизмами (т. е. между элементами этой грууппы), которые называются 2-морфизмами, мы приходим к понятию 2-категории, ассоциированной с группой G. Если ограничиться задачами, связанными лишь с расслоениями (за исключением кривизны связности), то далее понадобятся только понятия, связанные с 1-коциклами. В данном пособии ограничимся 1-коциклами, поэтому под термином «когомология сетей» будут подразумеваться 1-когомологии.

Категория 1-коциклов

Рассмотрим сеть алгебр фон Неймана над гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}_K : K \ni \mathcal{O} \to \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, индексируемую с помощью элементов K. Под *1-коциклом* z частично-упорядоченного множества K со значениями в $\mathcal{A}_K$ понимается поле

$$z : \Sigma_1(K) \ni b \to z(b) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

унитарных операторов в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, обладающих следующими свойствами:

$$\begin{array}{lll} (1) & z(\partial_0 c) \cdot z(\partial_2 c) = z(\partial_1 c)\ , & c \in \Sigma_2(K)\ ; \\ (2) & z(b) \in \mathcal{A}(|b|)\ , & b \in \Sigma_1(K)\ . \end{array}$$

Свойство (1) – это *тождество 1-коцикла*, свойство (2) – условие *локальности* для коциклов.

Если заданы 1-коциклы z и z_1, то *сплетающий оператор* t между z, z_1 представляет собой поле унитарных операторов вида:

$$t : \Sigma_0(K) \ni a \to t_a \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}),$$

со следующими свойствами:

$$\begin{array}{lll} (3) & t_{\partial_0 b} \cdot z(b) = z_1(b) \cdot t_{\partial_1 b}\ , & b \in \Sigma_1(K)\ ; \\ (4) & t_a \in \mathcal{A}(a)\ , & a \in \Sigma_0(K)\ . \end{array}$$

При этом свойство (4) представляет собой условие *локальности* для сплетающего оператора.

Множество сплетающих операторов, обозначаемых как (z, z_1), образует категорию – категорию 1-коциклов. Эту категорию обозначим как $\mathfrak{Z}^1(K)$. Таким образом, $\mathfrak{Z}^1(K)$ – это категория, объектами которой являются 1-коциклы, а морфизмами между объектами являются сплетающие операторы. Категория $\mathfrak{Z}^1(K)$ является C^*-категорией.

Два 1-коцикла z, z_1 *эквивалентны* (или *когомологичны*), если существует унитарный морфизм $t \in (z, z_1)$. 1-коцикл z *тривиален*, если он эквивалентен *тождественному* коциклу ι, который определяется как $\iota(b) = 1$ для любого 1-симплекса b.

Говорят, что 1-коцикл z является *не зависящим от пути*, если для любых $a_0, a_1 \in \Sigma_0(K)$ соотношение $z(p) = z(q)$ верно для любой пары путей $p, q \in K(a_0, a_1)$. Можно показать, что независимость от пути эквивалентна *тривиальности в* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, а именно, существованию поля $V : \Sigma_0(K) \ni a \to V_a \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ таких унитарных операторов, что

$$z(b) = V_{\partial_0 b} \cdot V^*_{\partial_1 b}, \qquad b \in \Sigma_1(K).$$

Также отметим, что тождественный коцикл ι является неприводимым, т.е. $(\iota, \iota) = \mathbb{C}1$.

Обозначим через $\mathfrak{Z}^1_t(K)$ множество не зависящих от пути 1-коциклов z посета K, и тем же символом обозначим C^*-подкатегорию категории $\mathfrak{Z}^1(K)$, объекты которой принадлежат категории $\mathfrak{Z}^1_t(K)$. Категорию $\mathfrak{Z}^1_t(K)$ назовем категорией *не зависящих от пути 1-коциклов.*

Замена множества индексов

Рассмотрим теперь не зависящие от пути 1-коциклы и их поведение при замене множества индексов. Пусть K – посет (частично-упорядоченное множество) и $K_1 \subseteq K$ – его подмножество, образующее базис топологии M. Тогда мы получим сеть алгебр фон Неймана $\mathcal{A}_{K_1}$, индексируемую элементами подмножества K_1. Другими словами, $\mathcal{A}_{K_1}$ представляет собой сужение $\mathcal{A}_K$ в K_1. Теперь рассмотрим связь между категориями $\mathfrak{Z}^1_t(K)$ и $\mathfrak{Z}^1_t(K_1)$ не зависящих от пути 1-коциклов над K_1 со значениями в $\mathcal{A}_{K_1}$. Не вдаваясь в детали и ссылаясь на работу [1], отметим, что существует ковариантный функтор из категории $\mathfrak{Z}^1_t(K)$ в ее подкатегорию $\mathfrak{Z}^1_t(K_1)$. Для любых $z, z_1 \in \mathfrak{Z}^1_t(K)$ и $t \in (z, z_1)$ определим

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}(z)(b) \equiv z(b)\ , \quad b \in \Sigma_1(K_1)\ , \\ &\mathfrak{R}(t)_a \equiv t_a\ , \qquad\quad a \in \Sigma_0(K_1)\ . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Легко заметить, что $\mathfrak{R}$: $\mathfrak{Z}^1_t(K) \to \mathfrak{Z}^1_t(K_1)$ есть ковариантный функтор (функтор сужения в K_1). Таким образом, на основании изложенного, можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 1.4. *Категории $\mathfrak{Z}^1_t(K_1)$ и $\mathfrak{Z}^1_t(K)$ являются эквивалентными, в частности, существует ковариантный функтор $\mathfrak{E} : \mathfrak{Z}^1_t(K_1) \to \mathfrak{Z}^1_t(K)$ такой, что*

$$\mathfrak{E} \circ \mathfrak{R} \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}^1_t(K)}, \quad \mathfrak{R} \circ \mathfrak{E} = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}^1_t(K_1)}\ ,$$

где символ $\simeq$ означает естественную эквивалентность.

1.2.5 Связь между гомотопией и когомологиями сетей

Отметим некоторые полезные свойства 1-коциклов. Во-первых, любой 1-коцикл z является *инвариантом* гомотопных путей, т.е. из гомотопности двух путей следует равенство соответствующих 1-коциклов

$$p \sim q \quad \Rightarrow \quad z(p) = z(q) \tag{1.8}$$

и, во-вторых, справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} &(1) \quad z(\overline{p}) = z(p)^* \quad \text{для любого пути } p\ , \\ &(2) \quad z(b(a_0)) = 1 \quad \text{для любого 0-симплекса } a_0\ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Следуя работе [1] и используя гомотопическую инвариантность 1-коциклов, сформулируем теорему.

Теорема 1.5. *Любому $z \in \mathfrak{Z}^1(K)$ можно поставить в соответствие унитарное представление σ_z фундаментальной группы $\pi_1(K)$ такое, что z не зависит от пути если и только если σ_z тривиально.*

Связь между когомологией сети множества K и топологией надлежащего пространства-времени устанавливается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.6. *Положим, что все элементы множества K линейно связны. Любому 1-коциклу $z \in \mathfrak{Z}^1(K)$ соответствует унитарное представление $\tilde{\sigma}_z$ фундаментальной группы $\pi_1(M)$ такое, что z не зависит от пути если и только если $\tilde{\sigma}_z$ тривиальное.*

В заключение этого параграфа сделаем следующие два замечания общего характера.

(1) Не зависящие от пути 1-коциклы множества K информацию о топологии пространства-времени не содержат, поскольку связаны только с тривиальными представлениями фундаментальной группы. С другой стороны, такие 1-коциклы имеют прямую физическую интерпретацию и соответствуют локализованным секторам сети алгебры локальных наблюдаемых;

(2) зависящие от пути 1-коциклы множества K, связанные с нетривиальными представлениями фундаментальной группы многосвязного пространства-времени M, содержат топологическую информацию и соответствуют зарядовым секторам, порождаемым нетривиальной топологией пространства-времени.

Глава 2

C^*-категории и алгебры Доплихера-Робертса

2.1 Алгебры Доплихера-Робертса $\mathcal{O}_\rho$

В этой главе рассмотрим основную конструкцию, с помощью которой можно охарактеризовать абстрактную категорию $U(G)$ конечномерных непрерывных унитарных представлений компактной группы G. С этой целью с помощью объекта ρ некоторой абстрактной моноидальной C^*-категории построим C^*-алгебру O_ρ, называемую алгеброй Доплихера-Робертса. В случае, когда ρ является специальным объектом симметрической моноидальной C^*-категории с сопряжением, C^*-алгебры O_ρ обладают особыми структурными особенностями, вытекающими из свойств строго симметрической моноидальной C^*- категории $U(G)$ конечномерных непрерывных унитарных представлений компактной группы G. При этом также требуется, чтобы тензорная единица ι категории была неприводимой, т.е. $(\iota, \iota) = \mathbb{C}1$.

Сначала рассмотрим важный специальный случай, когда операция тензорного произведения на 1_ρ справа является изометрической. Это возможно лишь тогда, когда объект ρ в симметрической моноидальной C^*-категории с сопряжением имеет размерность $d(\rho)$, кратную 1_ι (где $1_\iota \in end(\iota)$, эндоморфизм тензорной единицы). Прежде чем перейти к составлению индуктивной системы банаховых пространств для случая изометрической операции тензорного произведения, предварительно рассмотрим и докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть ρ является объектом моноидальной C^*-категории с сопряжением и функция $d(\rho)$ обратима. Тогда если $T \in (\sigma, \tau)$ и $T \times 1_\rho = 0$, то $T = 0$ и следовательно, $\|T\| = \|T \times 1_\rho\|$.*

Доказательство. Выберем $R \in (\iota, \bar{\rho}\rho)$ определяющим сопряжение $\overline{\rho}$ для объекта ρ и пусть $\bar{R} = \varepsilon(\bar{\rho}, \rho) \circ R$. Тогда $R^* \circ R = \overline{R}^* \circ \overline{R} = d(\rho)$. Из $T \times 1_\rho = 0$ вытекает, что $0 = 1_\tau \times \bar{R}^* \circ T \times 1_\rho \times 1_{\bar{\rho}} \circ 1_\sigma \times \bar{R} = T \times (\bar{R}^* \circ \bar{R})$. Таким образом, $T \times d(\rho) = 0$ влечет $T = 0$ благодаря обратимости $d(\rho)$. Поскольку морфизм $S \to S \times 1_\rho$ из (σ, σ) в $(\sigma\rho, \sigma\rho)$ инъективен, и, следовательно, изометричен, то

$$\|T \times 1_\rho\|^2 = \|(T^*T) \times 1_\rho\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 .$$

Для любых $k \in \mathbb{Z}$ имеем индуктивную систему банаховых пространств

$$(\rho^r, \rho^{k+r}) \to (\rho^{r+1}, \rho^{k+r+1}) \to (\rho^{r+2}, \rho^{k+r+2}) \to \ldots$$

определяемых для $r \in \mathbb{N}_0$ так, что $k+r \geqq 0$, где отображения задаются тензорным умножением справа на 1_ρ. Обозначим O_ρ^κ индуктивный предел этой системы банаховых пространств. Заметим, что $O_\rho^{k*} = O_\rho^{-k}$ и O_ρ^0, представляющие индуктивные пределы C^*-алгебр, являются C^*-алгебрами. Помимо операции сопряжения "$*$" для определения индуктивного предела необходимо определить еще и композицию. Если $T \in (\rho^r, \rho^{k+r}),\ S \in (\rho^{k+r}, \rho^{j+k+r})$, то композицию определим как $S \circ T \in (\rho^r, \rho^{j+k+r})$, причем

$$(S \circ T) \times 1_\rho = S \times 1_\rho \circ T \times 1_\rho$$

$$\|S \circ T\| \leqq \|S\| \, \|T\| .$$

Кроме того, композиция порождает ограниченное билинейное отображение $O_\rho^j \times O_\rho^k \to O_\rho^{j+k}$. Очевидно, что $(ST)^* = T^*S^*$, $S^*S \in O_\rho^0$ и $\|S^*S\| = \|S\|^2$. Отметим, что необходимо различать $T \in (\rho^k, \rho^{k+r})$ и T как элемент O_ρ^k, поэтому будем обозначать последнее как $i(T)$.

Система $\{O_\rho^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ представляет собой градуированную C^*-алгебру, где каждый элемент этой системы O_ρ^k является банаховым пространством.

Произведение $S, T \to ST$ определяет $O_\rho^j \times O_\rho^k \to O_\rho^{j+k}$, которое является билинейным с $\|ST\| \leqq \|S\| \, \|T\|$, и определяет антилинейную инволюцию $T \to T^*$ из O_ρ^k в O_ρ^{-k}. Более того, норма удовлетворяет C^*-условию $\|S^*S\| = \|S\|^2$. В частности, O_ρ^0 является C^*-алгеброй и C^*-норма на O_ρ^k, $k \in \mathbb{Z}$ единственна. Прежде чем приступить к построению C^*-алгебры O_ρ, рассмотрим случай, когда операция тензорного умножения справа на 1_ρ не является изометрическим отображением (т. к. тензорное умножение справа на единицу определяет вложения банаховых пространств). Пусть $\mathscr{T}_\rho$ – моноидальная C^*-категория, объектами которой являются целые числа и где морфизмы из r в s являются элементами (ρ^r, ρ^s). Если объекты ρ^r , $r \in \mathbb{N}_0$ попарно различимы (что естественно), то $\mathscr{T}_\rho$ является полной подкатегорией $\mathscr{T}$.

Пусть теперь $\| \ \|'$ обозначает наибольшую C^*-полунорму на $\mathscr{T}_\rho$, для которой операция тензорного умножения справа на 1_ρ является изометрией. Очевидно, что $\| \ \|'$ является верхней границей (супремумом) всех $*$-полунорм на $\mathscr{T}_\rho$. Множество морфизмов T из $\mathscr{T}_\rho$, для которых $\|T\|' = 0$, образует замкнутый двухсторонний идеал $\mathscr{I}$ категории $\mathscr{T}_\rho$ и поэтому можно образовать $*$-категорию $\hat{\mathscr{T}}_\rho = \mathscr{T}_\rho / \mathscr{I}$, являющуюся фактором. Тогда в категории $\hat{\mathscr{T}}_\rho$ операция тензорного умножения справа на 1_ρ – изометрия по построению, и согласно описанной выше процедуре можно сформировать $\mathbb{Z}$-градуированную C^*-алгебру $\{O_\rho^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Пусть $\{\mathscr{A}^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – некоторая $\mathbb{Z}$-градуированная C^*-алгебра поэтому можем сформировать алгебраическую прямую сумму $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^k$, которая является C^*-алгеброй с очевидными алгебраическими операциями.

Кроме того, на алгебре $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^k$ определено действие α группы окружности $\mathbb{T}$ с помощью $*$-гомоморфизмов:

$$\alpha_\lambda(S) := \sum_k \lambda^k S_k, \quad \lambda \in \mathbb{T}, \tag{2.1}$$

откуда видно, что

$$m_k(S) := \int \lambda^{-k} \alpha_\lambda(S) d\mu(\lambda), \tag{2.2}$$

где $\mu(\lambda)$ обозначает нормированную меру Хаара на $\mathbb{T}$.

Теорема 2.2. *Если* $\{\mathscr{A}^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *является* $\mathbb{Z}$*-градуированной* C^**-алгеброй, то существует единственная* C^**-норма на* $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^k$ *удовлетворяющая одному из двух условий*

а) $$\|\alpha_\lambda(S)\| = \|S\|, \quad \lambda\in\mathbb{T}$$

б) $$\|m_0(S)\| \leqq \|S\|,$$

где m_0 — условное математическое ожидание, полученное путем интегрирования действия по отношению к нормированной мере Хаара:

$$m_0(S) = \int \alpha_\lambda(S)d\mu(\lambda).$$

Доказательство. Единственность следует из работы Доплихера С. и Робертса Дж. [2] (лемма 2.11). Для доказательства существования заметим, что каждый $\mathscr{A}^k$ является правым эрмитовым $\mathscr{A}^0$-модулем, где действие $\mathscr{A}^0$ на $\mathscr{A}^k$ определяется умножением справа и $\mathscr{A}^0$-значное внутреннее произведение на $\mathscr{A}^k$ определяется S^*T.

Теперь можем ввести следующую 2-норму на $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^k$:

$$\|T\|_2^2 := \|(T,T)\| = \|m_0(T^*T)\|. \tag{2.3}$$

Пополнение $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^k$ по 2-норме позволяет получить правый эрмитов $\mathscr{A}^0$-модуль M, являющийся прямой суммой эрмитовых $\mathscr{A}^0$-модулей $\mathscr{A}^k$. Также можно утверждать, что каждый элемент X из $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^k$ действует как ограниченный справа $\mathscr{A}^0$-модульный гомоморфизм M. Достаточно предположить, что X определен степенями k, например, $X = X_k$, поэтому

$$(XT,XT) = \sum_r T^*_{r-k}X^*_kX_kT_{r-k} \leqq \|X\|^2 \sum_r T^*_{r-k}T_{r-k} =$$

$$= \|X\|^2 (T,T).$$

Во-первых, отсюда следует, что $\|XT\|_2^2 \leqq \|X\|^2 \|T\|_2^2$ так что X расширяется до $\mathscr{A}^0$ модульного гомоморфизма M, а во-вторых, имеем неравенство

$$(XT,XT) \leqq \|X\|^2 (T,T), \quad T\in M$$

означающее ограниченность X как $\mathscr{A}^0$-модульного гомоморфизма . Это $*$-гомоморфизм, поскольку

$$(S, XT) = m_0(S^*XT) = (X^*S, T).$$

Данный гомоморфизм является инъективным и тривиальным, когда $\mathscr{A}^0$ имеет единицу. Очевидно, что $(\alpha_\lambda(S), \alpha_\lambda(T)) = (S, T)$. Таким образом, каждый α_λ порождает унитарный $\mathscr{A}^0$-модульный гомоморфизм M и, следовательно, автоморфизм C^*-алгебры ограниченных $\mathscr{A}^0$-модульных гомоморфизмов M. Отсюда получаем, что C^*-норма на $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}^k$ порождается с помощью этой C^*-алгебры, удовлетворяющей условиям а) и б).

C^*-алгебру, полученную пополнением $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ по единственной C^*-норме согласно вышеуказанной теореме, обозначим как O_ρ. Эта алгебра оснащена действием группы $\mathbb{T}$, что позволяет восстановить градуировку:

$$O_\rho^k = \{X \in O_\rho : \alpha_\lambda(X) = \lambda^k X\}.$$

Полученная алгебра O_ρ также оснащена каноническим эндоморфизмом, который можно ввести следующим образом. Поскольку

$$1_\rho \times (T \times 1_\rho) = (1_\rho \times T) \times 1_\rho,$$

то отображение $T \to 1_\rho \times T$ совместимо с индуктивной системой. Кроме того, в случае, когда тензорное умножение справа на 1_ρ не является изометрией, мы имеем

$$\|1_\rho \times T\|' \leqq \|T\|',$$

поскольку $\|T\|'' = \|1_\rho \times T\|'$ определяет C^*-полунорму на $\mathscr{T}_\rho$, для которой тензорное умножение справа на 1_ρ является изометрией. Таким образом, существует эндоморфизм $\widehat{\rho}$ из O_ρ^k, для которого

$$\widehat{\rho}(i(T)) = i(1_\rho \times T), \quad T \in (\rho^r, \rho^{k+r}).$$

Поскольку $1_\rho \times (S \circ T) = 1_\rho \times S \circ 1_\rho \times T$ и $1_\rho \times S^* = (1_\rho \times S)^*$, то отображение $S \to \widehat{\rho}(S)$ является эндоморфизмом градуированной C^*-алгебры $\{O_\rho^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Итак, имеем эндоморфизм $\widehat{\rho}$ алгебры $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ и, поскольку отображение $T \to \sup\{\|T\|, \|\widehat{\rho}(T)\|\}$ является C^*-нормой на $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ удовлетворяющей условию а) теоремы, то $\|\widehat{\rho}(T)\| \leqq \|T\|$ и $\widehat{\rho}$ расширяется до эндоморфизма $\widehat{\rho}$ алгебры O_ρ.

Подведем некоторые итоги. Категория $\mathscr{T}_\rho$ ассоциируется с C^*-алгеброй O_ρ, т. е. для каждого морфизма $T \in (\rho^r, \rho^{k+r})$ из $\mathscr{T}_\rho$ ставится в соответствие элемент $i(T)$ из O_ρ. Отображение $T \to i(T)$ является линейным и сохраняет композицию и сопряжение. Если рассматривать на алгебру O_ρ с точки зрения C^*-категории с одним объектом, то $i : \mathscr{T}_\rho \to O_\rho$ является $*$-функтором. Образы морфизмов $\mathscr{T}_\rho$, порождают O_ρ как C^*-алгебру. Более того, имеем следующие соотношения

$$i(T \times 1_\rho) = i(T), \quad i(1_\rho \times T) = \widehat{\rho} i(T),$$

где $\widehat{\rho}$ − унитальный эндоморфизм C^*−алгебры O_ρ.

Поскольку рассматривается C^*−алгебра O_ρ, имеет смысл рассмотреть также и категорию эндоморфизмов $End(O_\rho)$ этой алгебры, которая (категория эндоморфизмов) является строгой моноидальной C^*-категорией. Тогда имеем следующую теорему вложения для $\mathscr{T}_\rho$.

Теорема 2.3. *Пусть O_ρ C^*-алгебра. Тогда существует строгий моноидальный (strict monoidal) *-функтор $i : \mathscr{T}_\rho \to End\ O_\rho$. Если тензорное умножение справа на 1_ρ является изометрией в $\mathscr{T}_\rho$, то i является точным (faithful).*

Доказательство. Так как $i(1_\iota) = 1, i(1_\rho \times T) = \widehat{\rho}(i(T))$ и $i(T \times 1_\rho) = i(T)$, определим i на объектах как $i(0) = \iota$, $i(m) = \widehat{\rho}^m$. Тогда для $T \in (\rho^r, \rho^{k+r})$ будем иметь:

$$i(T)\widehat{\rho}^r(A) = \widehat{\rho}^{k+r}(A)i(T), \quad A \in O_\rho.$$

Для этого достаточно проверить, что если $A = i(S)$ и $S \in (\rho^q, \rho^{j+q})$, то

$$\begin{aligned} i(T)\widehat{\rho}^r(i(S)) &= i(T \times 1_{\rho^{j+q}})i(1_{\rho^r} \times S) \\ &= i(T \times 1_{\rho^{j+q}} \circ 1_{\rho^r} \times S) \\ &= i(1_{\rho^{k+r}} \times S \circ T \times 1_{\rho^q}) \\ &= \widehat{\rho}^{k+r}(i(S))i(T), \end{aligned}$$

что и требуется. Здесь воспользовались законом чередования (interchange law) $(S \circ R) \times (S' \circ R') = S \times S' \circ R \times R'$ [3] (стр. 56-57).

Если ρ является эндоморфизмом C^*-алгебры с единицей $\mathscr{A}$, то тогда ρ является объектом строгой моноидальной C^*-категории $End(\mathscr{A})$ и благодаря вышеописанной конструкции можно получить C^*-алгебру, снабженную действием группы $\mathbb{T}$ и каноническим эндоморфизмом. Такую C^*-алгебру обозначим как $C^*(\rho)$. Если ρ унитален, то отображение $i(T)$ для $T \in (\rho^r, \rho^s)$ на T может рассматриваться как элемент $\mathscr{A}$ задающий канонический морфизм $^*(\rho)$ в $\mathscr{A}$, образ которого является C^*-подалгеброй $\mathscr{A}$ порожденным сплетающими операторами степеней ρ.

Теперь предположим, что ρ является объектом строгой симметрической моноидальной C^*-категории $(\mathscr{T}, \varepsilon)$. Тогда $\varepsilon(\rho^r, \rho^s) \in (\rho^{r+s}, \rho^{r+s})$ и полагая

$$\varepsilon(r, s) := i(\varepsilon(\rho^r, \rho^s)) \in O_\rho^0,$$

имеем, что

$$\varepsilon(r, s)\varepsilon(s, r) = I, \qquad\qquad \varepsilon(r, s + t) = \widehat{\rho}^s(\varepsilon(r, t))\varepsilon(r, s).$$

Если ввести обозначение $\varepsilon := \varepsilon(1, 1)$ то с помощью только что указанных правил морфизм $\varepsilon(r, s)$ можно определить по индукции. Легко увидеть, что он представляет собой слово в $\widehat{\rho}^r(\varepsilon)$, $r \in \mathbb{N}_0$. В частности,

$$\varepsilon(1, r) = \widehat{\rho}^{r-1}(\varepsilon)...\widehat{\rho}(\varepsilon)\varepsilon.$$

Пусть $\mathbb{P}_\infty$ обозначает группу конечных перестановок целых чисел $\mathbb{N}$. Если определить $\mathbb{P}_n$ как

$$\mathbb{P}_n := \{p \in \mathbb{P}_\infty : p(m) = m, m > n\},$$

то $\mathbb{P}_\infty$ является индуктивным пределом последовательности соответствующих подгрупп:

$$\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_2 \subset ... \subset \mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{n+1} \subset ...$$

Сдвиг на $\mathbb{N}$ индуцирует эндоморфизм σ из $\mathbb{P}_\infty$, определяемый как

$$(\sigma\rho)(1) = 1, \quad (\sigma\rho)(n + 1) = p(n) + 1.$$

Сформулируем теорему о действии такой группы на моноидальной категории.

Теорема 2.4. *Пусть* $(\mathscr{T}, \varepsilon)$ *является строгой симметрической моноидальной категорией и пусть* ρ *— заданный объект из* $\mathscr{T}$. *Тогда существует единственный строгий симметрический моноидальный функтор* $\varepsilon_\rho : \mathbb{P} \to \mathscr{T}$ *с* $\varepsilon_\rho(1) = \rho$.

Доказательство этой теоремы можно найти в приложении работы [4].

Также справедлива теорема:

Теорема 2.5. *Существует единственное унитарное представление* $\varepsilon : \mathbb{P}_\infty \to O_\rho$ *такое, что* $\varepsilon(1\ 2) = \varepsilon$, $\varepsilon(\sigma p) = \widehat{\rho}(\varepsilon(p))$, $p \in \mathbb{P}_\infty$. *Более того,*

$$\varepsilon(p)\widehat{\rho}^n(A) = \widehat{\rho}^n(A)\varepsilon(p), \quad A \in O_\rho, \quad p \in \mathbb{P}_n$$

и $\varepsilon((r,s)) = \varepsilon(r,s)$. Здесь (r,s) обозначает перестановку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r & r+1 & r+2 & ... & r+s \\ s+1 & s+2 & ... & s+r & 1 & 2 & ... & s \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Морфизм ε, если он существует, является единственным, поскольку $\mathbb{P}_\infty$ порождается транспозициями $(1\ 2)$ и эндоморфизмом σ. Для того чтобы убедиться в том, что ε существует, положим

$$\varepsilon(p) := i(\varepsilon_\rho(p)), \quad p \in \mathbb{P}_n \tag{2.4}$$

и тогда согласно теореме 2.5 $\varepsilon(p) \in (\widehat{\rho}^n, \widehat{\rho}^n)$. Кроме того, поскольку

$$\varepsilon(p \times 1) = i(\varepsilon_\rho(p) \times 1_\rho) = \varepsilon(p),$$

то ε определенный таким образом, совместим с включением $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$. Таким образом, задали унитарное представление группы $\mathbb{P}_\infty$ в алгебре O_ρ. Тогда

$$\varepsilon(\sigma p) = i(1_\rho \times \varepsilon_\rho(p)) = \widehat{\rho}(i(\varepsilon_\rho(p))) = \widehat{\rho}(\varepsilon(p))$$

и равенство

$$\varepsilon((r,s)) = i(\varepsilon(\rho^r, \rho^s)) = \varepsilon(r,s)$$

завершает доказательство теоремы.

Возникает естественный вопрос, будет ли ε определять перестановочную симметрию и для эндоморфизмов $\widehat{\rho}$, т. е. будет ли справедливо соотношение:

$$\varepsilon(s,1)X = \widehat{\rho}(X)\varepsilon(r,1), \quad X \in (\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s), \quad r, s \in \mathbb{N}_0.$$

Пока лишь известно, что соотношение выполняется только при $X \in i(\rho^r, \rho^s)$. Следующая задача заключается в том, чтобы показать, что ε определяет перестановочную симметрию для $\widehat{\rho}$ если только ρ является специальным объектом строгой симметричной моноидальной C^*-категории с сопряжением. В дальнейшем будем опираться на результаты работы [2].

Пусть ρ является единственным эндоморфизмом C^*-алгебры $\mathscr{A}$ ($k \in \mathbb{Z}$):

$$^0\left[\rho\right]^k := \bigcup_{r, r+k \geqq 0} (\rho^r, \rho^{r+k}), \tag{2.5}$$

и пусть $\left[\rho\right]^k$ есть замыкание по норме $^0\left[\rho\right]^k$. Оказывается, $\left[\rho\right]^k$, $k \in \mathbb{Z}$, определяет градуировку C^*-подалгебры в $\mathscr{A}$, которая является каноническим образом $C^*(\rho)$ в $\mathscr{A}$. Это следует из следующей леммы о градуировке.

Лемма 2.6. *Пусть ρ является единственным эндоморфизмом C^*-алгебры $\mathscr{A}$ и предположим, что существуют изометрии $S_m \in (\iota, \rho^{md^m})$ для некоторых $d > 1$ и всех $m \in \mathbb{N}$ с*

$$S_m^* \rho^m(S_m) = (-1)^{d^m - 1} d^{-m} I := \lambda_m I.$$

Тогда $\left[\rho\right]^k$ определяет градуировку C^*-алгебры, порожденную указанными изометриями. Более того, каноническое отображение $C^*(\rho)$ в $\mathscr{A}$ инъективно.

Доказательство. Пусть

$$X = X_0 + \left(\sum_{k=-n}^{-m} + \sum_{k=m}^{n}\right) X_k \tag{2.6}$$

с $X_k \in {}^0\left[\rho\right]^k$ и полагая

$$X' := \frac{1}{1-\lambda_m}(\rho^r(S_m^*) X \rho^r(S_m) - \lambda_m X),$$

получаем

$$X' = X_0 + \left(\sum_{k=-n}^{-(m+1)} + \sum_{k=m+1}^{n} \right) X'_k$$

где

$$X'_k := \frac{1}{1-\lambda_m} (\rho^r(S^*_m)\rho^{r+k}(S_m) - \lambda_m) X_k \in {}^0\left[\rho\right]^k$$

при условии, что r выбран так, что для каждого k $X_k \in (\rho^r, \rho^{r+k})$.

Отсюда можно прийти к выводу, что $X = 0$ влечет $X_0 = 0$, поэтому из $X = 0$ следует также и условие $X^*X = 0$. Более того, $X^*X = \sum\limits_k Y_k$, где $Y_k \in {}^0\left[\rho\right]^k$ и $Y_0 = \sum\limits_k X^*_k X_k$, значит, $\sum\limits_k X^*_k X_k = 0$, то есть $X_k = 0$. Таким образом, линейная оболочка ${}^0\left[\rho\right]^k$ является $\mathbb{Z}$-градуированной C^*-алгеброй ${}^0\left[\rho\right]$.

Из теоремы 2.5 вытекают два важных следствия. **Следствие 2.7.** *Пусть ρ – специальный объект и пусть $\widehat{\rho}$ канонический эндоморфизм алгебры O_ρ. Тогда $\left[\widehat{\rho}\right]^k = O^k_\rho$.*

Доказательство. Согласно теореме 3.3 имеем, что $O^k_\rho \subset \left[\widehat{\rho}\right]^k$. Если ρ является специальным, то имеем ρ^m, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, согласно теореме 3.3 имеем изометрию $S_m \in (\iota, \widehat{\rho}^{md^m})$, поэтому, согласно лемме о градуировке, есть действие группы $\mathbb{T}$ на $\left[\widehat{\rho}\right] = O_\rho$, определяющее градуировку. Это действие согласуется на всюду плотной $*$-подалгебре с действием, определяющим градуировку O_ρ. Следовательно, эти два действия согласованы, так что $\left[\widehat{\rho}\right]^k = O^k_\rho$.

Следствие 2.8. *Если ρ является специальным объектом, то унитарное представление ε из теоремы 2.4. определяет перестановочную симметрию для канонического эндоморфизма $\widehat{\rho}$ на O_ρ.*

Доказательство. Предположим $X \in \bigcup\limits_{r,r+k \geqq 0} i(\rho^r, \rho^{k+r})$ и тогда для достаточно большого r имеем

$$\varepsilon(r+k, 1)X = \widehat{\rho}(X)\varepsilon(r, 1).$$

Такие элементы плотны в O^k_ρ, поэтому получаем, что

$$\widehat{\rho}(X) = \lim_{s\to\infty} \varepsilon(s+k, 1)X\varepsilon(1, s).$$

Если $X \in (\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^{k+r})$, то согласно следствию 3.6 $X \in O_\rho^k$, однако согласно формуле

$$\varepsilon(1,r) = \widehat{\rho}^{r-1}(\varepsilon)...\widehat{\rho}(\varepsilon)\varepsilon,$$

имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon(s+k,1)X\varepsilon(1,s) &= \varepsilon\widehat{\rho}(\varepsilon)...\widehat{\rho}^{s+k-1}(\varepsilon)X\widehat{\rho}^{s-1}(\varepsilon)...\widehat{\rho}(\varepsilon)\varepsilon\\ &= \varepsilon\widehat{\rho}(\varepsilon)...\widehat{\rho}^{r+k-1}(\varepsilon)X\widehat{\rho}^{r-1}(\varepsilon)...\widehat{\rho}(\varepsilon)\varepsilon\end{aligned}$$

если только $s \geqq r$. Переходя к пределам, получаем, что

$$\widehat{\rho}(X) = \lim_{s\to\infty} \varepsilon(s+k,1)X\varepsilon(1,s) = \varepsilon(r+k,1)X\varepsilon(1,r).$$

Рассмотрим пример, показывающий, что можно иметь перестановочную симметрию, когда следствие 2.7 не применимо.

Пример.

Выберем ρ как объект строгой симметрической моноидальной C^*-категории $C^*(\mathbb{P})$, объектами которой являются конечные ординалы (целые числа), а морфизмы $(m,n) = 0$ при $m \neq n$, и $(0,0) = \mathbb{C}$. При $m = n$ морфизмы $(n,n) = C^*(\mathbb{P}_n)$ образуют C^*-алгебру группы перестановок $\mathbb{P}_n$ с n элементами. Тогда C^*-алгебра O_ρ является канонически изоморфной алгебре $C^*(\mathbb{P}_\infty) - C^*$-алгебре группы $\mathbb{P}_\infty$ и $\widehat{\rho}$ является каноническим эндоморфизмом алгебры $C^*(\mathbb{P}_\infty)$ порожденной эндоморфизмом σ из $\mathbb{P}_\infty$. Этот канонический эндоморфизм обладает перестановочной симметрией.

Далее рассмотрим структуру алгебры O_ρ, которая возникает, когда категория $(\mathscr{T}, \varepsilon)$ обладает сопряжением. В этом случае для заданного морфизма $S \in (\rho^r, \rho^{r+k})$, $r, k+r \geqq 1$ выбирая морфизм $R \in (\iota, \overline{\rho}\rho)$ из единицы ι категории в объект вида $\bar{\rho}\rho$ можно сформировать морфизм вида

$$R^* \times 1_{\rho^{k+r-1}} \circ 1_{\overline{\rho}} \times S \circ R \times 1_{\rho^{r-1}} \in (\rho^{r-1}, \rho^{k+r-1}).$$

Это отображение совместимо с нашей индуктивной системой и может быть использовано для определения отображения градуированной C^*-алгебры. Полагая

$$\Phi(i(S)) := i(R^* \times 1_{\rho^{k+r-1}} \circ 1_{\overline{\rho}} \times S \circ R \times 1_{\rho^{r-1}}),$$

получаем

$$\|\Phi(i(S)\| \leqq \|R\|^2 \|S\| .$$

Предположим, что операция тензорного произведения справа на 1_ρ является изометрией на $\mathscr{T}_\rho$ как и в случае, когда $d(\rho)$ обратимо (Лемма 2.1). Тогда $\|S\| = \|i(S)\|$ и Φ расширяется до линейного отображения O_ρ^k в себя. Очевидно, что

$$\Phi(S^*) = \Phi(S)^*,$$

$$\Phi(I) = i(d(\rho)).$$

Кроме того,

$$\Phi(\varepsilon) = I.$$

Если $T \in (\rho^{k+r+1}, \rho^{j+k+r+1})$, тогда

$$R^* \times 1_{\rho^{j+k+r}} \circ 1_{\overline{\rho}} \times T \circ 1_{\overline{\rho}\rho} \times S \circ R \times 1_{\rho^r} =$$

$$= R^* \times 1_{\rho^{j+k+r}} \circ 1_{\overline{\rho}} \times T \circ 1_{\rho^{k+r}} \times S.$$

Отсюда

$$\Phi(T\widehat{\rho}(S)) = \Phi(T)S,$$

$$\Phi(\widehat{\rho}(S)T) = S\Phi(T).$$

Теперь расширим найденное отображенние Φ до линейного отображения C^*-алгебры O_ρ. Для этого определим Φ на $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ по линейности и введем новое O_ρ^0-значное скалярное произведение на этой $*$-алгебре, положив

$$\langle S, T\rangle := \sum_k \Phi(S_k^* T_k) = m_0(\Phi(S^*T)). \tag{2.7}$$

Если допустить, что O_ρ^0 действует справа на $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ согласно

$$S \cdot A := \sum_k S_k \widehat{\rho}(A), \quad A \in O_\rho^0,$$

то

$$\langle S, T\cdot A\rangle = \sum_k \Phi(S_k^* T_k \widehat{\rho}(A)) = \sum_k \Phi(S_k^* T_k)A, \quad \text{поэтому}$$
$$\langle S, T\cdot A\rangle = \langle S, T\rangle A.$$

Каждый элемент X из $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ действует как O_ρ^0-модульный гомоморфизм M'. Поскольку X связан с некоторой степенью k, например, $X = X_k$, то

$$\langle XT, XT\rangle = \sum_j \Phi(T_{j-k}^* X_k^* X_k T_{j-k}) \leqq \|X\|^2 \sum_j \Phi(T_{j-k}^* T_{j-k}).$$

Таким образом, X расширяется до O_ρ^0-модульного гомоморфизма M' и

$$\langle XT, XT\rangle \leq \|X\|^2 \langle T, T\rangle, \quad T\in M'.$$

Следовательно, имеем гомоморфизм $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ в C^*-алгебру ограниченных O_ρ^0-модульных гомоморфизмов M'. Этот гомоморфизм является *-гомоморфизмом, так как

$$\langle S, XT\rangle = m_0\Phi(S^*XT) = \langle X^*S, T\rangle.$$

Поскольку согласно теореме 2.2 O_ρ есть пополнение $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ в максимальной C^*-норме, получаем представление π алгебры O_ρ с O_ρ^0-модульными гомоморфизмами M'. Так как

$$\langle \alpha_\lambda(S), \alpha_\lambda(T)\rangle = \sum_k \Phi(S_k^* T_k) = \langle S, T\rangle,$$

то получаем унитарное представление $\lambda \to U(\lambda)$ группы $\mathbb{T}$ O_ρ^0-модульными гомоморфизмами M' и

$$U(\lambda)\pi(X)U(\lambda)^{-1} = \pi(\alpha_\lambda(X)).$$

Отображение $\widehat{\rho} : \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k \to \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ обладает таким свойством, что

$$\langle \widehat{\rho}(S), \widehat{\rho}(T)\rangle = \sum_k \Phi(\widehat{\rho}(S_k)^* \widehat{\rho}(T_k)) = \sum_k S_k^* d(\rho) T_k = d(\rho)(S, T).$$

Следовательно, такое отображение порождает отображение $V\colon M \to M'$ с $V^*V = d(\rho)$ и являющееся также O_ρ^0-модульным гомоморфизмом благодаря

$$V(SA) = \widehat{\rho}(SA) = \widehat{\rho}(S)\widehat{\rho}(A) = V(S) \cdot A.$$

Теперь пусть $X \in O_\rho^k$, тогда

$$\begin{aligned}(S, V^*\pi(X)VS') = \left\langle VS, \pi(X)VS' \right\rangle = \left\langle \widehat{\rho}(S), \pi(X)\widehat{\rho}(S') \right\rangle \\ = \sum_j \Phi(\widehat{\rho}(S_j)^* X \widehat{\rho}(S'_{j-k})) = \sum_j S_j^* \Phi(X) S'_{j-k} = (S, \Phi(X)S')\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что можно расширить Φ до алгебры O_ρ, полагая

$$\Phi(X) := V^*\pi(X)V, \quad X \in O_\rho.$$

Также видим, что

$$\Phi(X)^*\Phi(X) \leqq \|d(\rho)\| \, \Phi(X^*X).$$

Лемма 2.9. *Пусть* $X = i(S)$, *где* $S \in (\rho^r, \rho^{r+k})$ *тогда*

$$\varepsilon(1, r-1)X^*X\varepsilon(r-1, 1) \leqq \|d(\rho)\| \, \Phi(X^*X).$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}&X^*X = \varepsilon(1, r)\widehat{\rho}(X^*X)\varepsilon(r, 1),\\ &\widehat{\rho}(X)\varepsilon(r, 1) = \widehat{\rho}(X)\varepsilon\widehat{\rho}(\varepsilon(r-1, 1)).\end{aligned}$$

Полагая $\widehat{\rho}(X)\varepsilon\widehat{\rho}(\varepsilon(r-1,1))$ за X в выражении

$$\Phi(X)^*\Phi(X) \leqq \|d(\rho)\| \, \Phi(X^*X)$$

и используя $\Phi(\varepsilon) = I$, получаем требуемый результат.

Из этой леммы следует

Следствие 2.10. Φ является точным на O_ρ^0.

Доказательство. Оценка $\|d(\rho)\| \, \|\Phi(X^*X\| \geqq \|X\|^2$ справедливо в частности, на плотном множестве O_ρ^0 и, следовательно, по непрерывности, на всех O_ρ^0.

Пусть π_0 обозначает определяемое представление O_ρ согласно ограниченным M-модульным гомоморфизмам, тогда если $B, S \in \bigoplus\limits_{r\in\mathbb{Z}} O_\rho^r$, получаем

$$V\pi_0(B)S = VBS = \widehat{\rho}(BS) = \widehat{\rho}(B)\widehat{\rho}(S) = \pi \circ \widehat{\rho}(B)VS.$$

Тем самым приходим к выводу, что

$$V\pi_0(B) = \pi \circ \widehat{\rho}(B)V, \quad B \in O_\rho.$$

Отбрасывая символ π_0, получаем, что

$$\Phi(X)B = V^*\pi(X)VB = V^*\pi(X\widehat{\rho}(B))V,$$

откуда

$$\Phi(X)B = \Phi(X\widehat{\rho}((B)), \quad X, B \in O_\rho.$$

Поскольку Φ точно на O_ρ^0 благодаря следствию 2.10, скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ на $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ является положительно определенным. Таким образом, если $0 \neq X \in \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$, то

$$\langle \pi(X)I, \pi(X)I\rangle = \sum_k \Phi(X_k^* X_k) \neq 0.$$

Следовательно, π инъективно на $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ и согласно теореме 2.2

$$\|\pi(X)\| = \|X\|, \quad X \in O_\rho.$$

Основные результаты можно сформулировать теперь в виде теоремы.

Теорема 2.11. *Если $(\mathscr{T}, \varepsilon)$ является строгой симметрической моноидальной C^*-категорией с сопряжениями и если тензорное умножение справа на 1_ρ является изометрией, то существует положительное линейное отображение Φ на O_ρ, которое коммутирует с градуировкой, являясь точным на O_ρ^0, и удовлетворяющее условиям*

$$\Phi(I) = d(\rho), \qquad \Phi(\varepsilon) = I,$$
$$\Phi(X(\widehat{\rho}(Y)) = \Phi(X)Y, \qquad X, Y \in O_\rho.$$

Теперь приходим к важной лемме, которая устанавливает, что для специальных объектов центр O_ρ совпадает с образом (ι, ι).

Лемма 2.12. *Пусть ρ – специальный объект категории$(\mathscr{T}, \varepsilon)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) Z находится в центре O_ρ,

б) $\widehat{\rho}(Z) = Z$,

в) $\phi(Z) = Z$ и $Z \in O_\rho^0$,

г) $Z \in i(\iota, \iota)$.

Доказательство. Пусть $\widehat{\iota}$ – тождественный автоморфизм алгебры O_ρ. Тогда если Z находится в центре O_ρ, то есть $Z \in (\widehat{\iota}, \widehat{\iota})$, и поэтому $\widehat{\rho}(Z) = Z$, поскольку $\widehat{\rho}$ обладает перестановочной симметрией согласно следствию 3.7. Таким образом, а) влечет б). Пусть $T \in (\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s)$. Тогда, учитывая, что $\widehat{\rho}(Z) = Z$, имеем

$$TZ = T\widehat{\rho}^r(Z) = \widehat{\rho}^s(Z)T = ZT.$$

Такие элементы T образуют полный набор в O_ρ, поэтому $Z \in (\widehat{\iota}, \widehat{\iota})$ и а) и б) эквиваленты. Теперь б) влечет, что $\phi(Z) = Z$, поскольку ϕ является левой обратной для $\widehat{\rho}$ в то время как из а) следует, что $Z \in O_\rho^0$ согласно следствию 2.10. Отсюда б) влечет в). Теперь предположим, что в) выполнено, тогда можем выбрать $T_n \in (\rho^{r_n}, \rho^{r_n})$ так, что $i(T_n) \to Z$. С другой стороны,

$$\|\phi^{r_n}(i(T_n)) - \phi^{r_n}(Z)\| \leqq \|i(T_n) - Z\| \to 0$$

по мере того, как $n \to \infty$. Отсюда по в) $\phi^{r_n}(i(T_n)) \to Z$. Однако $\phi^{r_n}(i(T_n)) = i(S_n)$ с $S_n \in (\iota, \iota)$. Но $i(\iota, \iota)$ является C^*-подалгеброй, замкнутой по норме, так что $Z \in i(\iota, \iota)$ и в) влечет г). С другой стороны, $i(\iota, \iota) \subset (\widehat{\iota}, \widehat{\iota})$ по теореме 2.3. так что г) влечет а), завершая доказательство леммы.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 2.13. *Пусть ρ является специальным объектом $(\mathscr{T}, \varepsilon)$, тогда*

$$(\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s) = i(\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s), \quad r, s \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство. Из теоремы 2.3 имеем, что $i(\rho^r, \rho^s) \subset (\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s)$. Теперь предположим, что $X \in (\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^{k+r})$, тогда, согласно лемме 2.6, существует

$X_n \in (\rho^{r_n}, \rho^{k+r_n})$ с $i(X_n) \to X$ и можно предположить, что $r_n \geqq r$. Более того $\widehat{\rho}$ обладает перестановочной симметрией согласно следствию 2.7 так что $\widehat{\rho}(X) = \varepsilon(k+r,1)X\varepsilon(1,r)$. Но тогда $X = \phi(\varepsilon(k+r,1)X\varepsilon(1,r))$. Вводя

$$\psi(Y) := \phi(\varepsilon(k+r,1)Y\varepsilon(1,r)), \quad Y \in O_\rho,$$

имеем $\|\psi(Y)\| \leqq \|Y\|$ и, следовательно,

$$\left\|\psi^{r_n-r}(i(X_n)) - X\right\| = \left\|\psi^{r_n-r}(i(X_n) - X)\right\| \leqq \|i(X_n) - X\| \to 0.$$

Однако, если $Y \in (\rho^s, \rho^{k+s}),\ s > r$, то $\psi i(Y) \in i(\rho^{s-1}, \rho^{k+s-1})$. Поскольку можем записать $\psi i(Y) = \Phi i(Y^{'})$, где

$$Y^{'} = d(\rho)^{-1} \times 1_{\rho^{k+s}} \circ \varepsilon(\rho^{k+r}, \rho) \times 1_{\rho^{s-r-1}} \circ Y \circ \varepsilon(\rho, \rho^r) \times 1_{\rho^{s-r-1}} \in (\rho^s, \rho^{k+s})$$

и $\Phi i(Y^{'}) = i(Y^{''})$, где

$$Y^{''} = R^* \times 1_{\rho^{k+s-1}} \circ Y^{'} \circ R \times 1_{\rho^{s-1}} \in (\rho^{s-1}, \rho^{k+s-1}).$$

Таким образом, $\psi^{r_n-r}(i(X_n)) \in i(\rho^r, \rho^{k+r})$. Поскольку i изометричен, то $i(\rho^r, \rho^{k+r})$ замкнуто в O_ρ, так что $X \in i(\rho^r, \rho^{k+r})$.

Докажем следующую важную теорему, которая имеет важную роль в теории двойственности для компактных групп.

Теорема 2.14. *Пусть $(\mathscr{T}, \varepsilon)$ является точной симметрической моноидальной C^*-категорией с сопряжением. Предположим, что $(\iota, \iota) = \mathbb{C}1_\iota$ и пусть ρ является специальным объектом категории $(\mathscr{T}, \varepsilon)$. Пусть $O_{d(\rho)}$ есть алгебра Кунца и H − каноническое гильбертово пространство в $O_{d(\rho)}$. Тогда существует замкнутая подгруппа G группы $SU(H)$, которая является специальной унитарной группой гильбертова пространства H, являющаяся единственной с точностью до сопряжения и унитальный мономорфизм $\pi : O_\rho \to O_{d(\rho)}$ с $\sigma_H \circ \pi = \pi \circ \widehat{\rho}$, где σ_H является внутренним эндоморфизмом $O_{d(\rho)}$, порожденным с помощью H. При этом*

$$\pi(\varepsilon(p)) = \theta(p), \quad p \in \mathbb{P}_\infty,$$

где $\theta(p) = \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \psi_{i_1}\psi_{i_2}\ldots\psi_{i_n}\psi^*_{i_{p(n)}}\ldots\psi^*_{i_{p(1)}}, \quad p \in \mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_\infty,$

$$\pi(R) = S,$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{d!}} \sum_{p \in \mathbb{P}_d} sign(p) \psi_{p(1)} ... \psi_{p(n)}, \quad R \in i(\iota, \rho^d).$$

Более того, $\pi(O_\rho) = O_G$, где O_G обозначает фиксированные точки $O_{d(\rho)}$ относительно канонического действия группы G :

$$\pi i(\rho^r, \rho^s) = \pi(\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s) = (H^r, H^s)_G, \tag{2.8}$$

а $(H^r, H^s)_G$ обозначает множество G-инвариантных линейных отображений из H^r в H^s, рассматриваемое как подмножество в $O_{d(\rho)}$.

Доказательство. Благодаря лемме 2.13, O_ρ является C^*-алгеброй с центром $\mathbb{C}I$. Эндоморфизм $\widehat{\rho}$ обладает перестановочной симметрией согласно следствию 2.7, которая имеет размерность $d = d(p)$ и удовлетворяет специальному свойству сопряжения. Тогда $R \in i(\iota, \rho^d)$ и

$$R^* \widehat{\rho}(R) = (-1)^{d-1} d^{-1} I, \tag{2.9}$$

$$RR^* = d!^{-1} \sum_{p \in \mathbb{P}_d} sign(p) \varepsilon(p). \tag{2.10}$$

Теперь рассмотрим конструкцию, приводящую к понятию скрещенного произведения, описанного в работе [5] (теорема 4.1). Согласно такой конструкции, существует единственный мономорфизм $\mu : O_{SU(d)} \to O_\rho$ с $\mu(\theta(p)) = \varepsilon(p)$, $p \in \mathbb{P}_\infty$, $\mu(S) = R$ и $\mu \circ \sigma = \widehat{\rho} \circ \mu$, где $\sigma = \sigma_{SU(d)}$ является каноническим эндоморфизмом $O_{SU(d)}$. Это определяет действие $O_{SU(d)}$ на O_ρ и мы можем построить скрещенное произведение $\mathscr{B} := O_\rho \otimes_\mu O_d$. Имеем действие $\widetilde{\alpha}$ $SU(d)$ на $\mathscr{B}$ с фиксированными точками $O_\rho \otimes_\mu I$ относительно этого действия, определенными как $\widetilde{\alpha}_g(A \otimes C) = A \otimes \alpha_g(C)$, где α каноническое действие группы $SU(d)$ на алгебре O_d. Пусть $\mathscr{C}$ – центр алгебры $\mathscr{B}$ и пусть $\Phi \in \sigma(\mathscr{C})$, где $\sigma(\mathscr{C})$ спектр $\mathscr{C}$. Пусть I_Φ – замкнутый идеал в $\mathscr{B}$, порожденный $\ker \Phi$, η_Φ – канонический гомоморфизмом из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{B}_\Phi := \mathscr{B}/I_\Phi$. Определим теперь $\pi_\Phi : O_\rho \to \mathscr{B}_\Phi$ посредством $\pi_\Phi(A) = \eta_\Phi(A \otimes I)$ и $\zeta_\Phi : O_d \to \mathscr{B}_\Phi$ посредством $\zeta_\Phi(C) = \eta_\Phi(I \otimes C)$. Пусть G_Φ обозначает подгруппу $SU(d)$ такую, что $\eta_\Phi \circ \widetilde{\alpha}_g = \Phi$. Тогда имеем действие α^Φ из G_Φ на $\mathscr{B}_\Phi$ такое, что $\eta_\Phi \circ \widetilde{\alpha}_g = \alpha_g^\Phi \circ \eta_\Phi$, $g \in G_\Phi$. Поскольку O_ρ порождается сплетающими операторами различных степеней $\widehat{\rho}$ [2] (лемма 4.6), то $\pi_\Phi(O_\rho) = \zeta_\Phi(O_{G_\Phi}) \subset \zeta_\Phi(O_d)$.

Таким образом, ζ_Φ сюръективен и следовательно изоморфизм, поскольку O_d является простым. Таким образом, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} O_\rho & \xrightarrow{\pi_\Phi} & \mathscr{B}_\Phi \\ {\scriptstyle\mu}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle\zeta_\Phi} \\ O_{SU(d)} & \longrightarrow & O_d \end{array}$$

и $\zeta_\Phi(\psi)\pi_\Phi(A) = \pi_\Phi \circ \widehat{\rho}(A)\zeta_\Phi(\psi)$, где $\psi \in H$ (H – каноническое гильбертово пространство в O_d). Определим представление $\pi = \zeta_\Phi^{-1} \circ \pi_\Phi$ и возьмем $G_\Phi = G$, Различный выбор Φ приводит G_Φ к сопряженной подгруппе и поэтому согласно работе [5] остается с точностью до изоморфизма, единственный выбор в данной конструкции. Это завершает доказательство теоремы.

2.1.1 Скрещенное произведение C^*-алгебры с полугруппой эндоморфизмов

Теория абстрактных C^*-алгебр для описания физических систем используется давно. Описание наблюдаемых величин квантовой физической системы в этом случае задается сетью C^*-алгебр над пространством Минковского или трехмерным евклидовым пространством. Такой подход открывает широкие возможности также для описания правил суперотбора, которые связаны с наличием в физической системе абсолютно сохраняющихся величин (различные абелевы заряды: электрический, барионный, лептонный и пр., неабелевы заряды типа изотопического спина, цвета и др.). Собственные значения суперотборных операторов индексируют суперотборные сектора – унитарно-эквивалентные классы неприводимых представлений алгебры наблюдаемых.

Существенным успехом алгебраического подхода явилось также выявление связи между квантованными полями – фундаментальными объектами «классической квантовой теории поля» и наблюдаемыми на опыте величинами. Ясное и строгое математическое описание такой связи на языке теории C^*-алгебр и C^*-категорий для случая массивных частиц в пространстве-времени Минковского было дано в работах Допличера и Робертса: полевая алгебра возникает как скрещенное произведение алгебры наблюдаемых с ее полугруппой эндоморфизмов. Красота теории заключается в том, что группа внутренних симметрий (калибровочная группа), которая задает группу автоморфизмов полевой алгебры, имеет в качестве дуального объекта C^*-категорию представлений этой группы в конечномерных гильбертовых пространствах. Эта категория в свою очередь, изоморфна категории представлений алгебры наблюдаемых, объекты которой нумеруются квантовыми числами, задающими суперотборную структуру теории. Такая структура позволяет исходя из наблюдаемых на опыте величин и суперотборной структуры физической системы восстановить группу внутренних симметрий и полевую алгебру системы. Все это составляет суть теоремы дуальности Допличера-Робертса, которая является развитием известной теории дуальности Танаки-Крейна.

Теперь построим скрещенное произведение алгебры канонических антикоммутационных соотношений (КАС), вложенной в алгебру Кунца с эндоморфизмом этой алгебры. Алгебра КАС порождается операторами рождения и уничтожения фермионов и наряду с своими представлениями является хорошо изученной операторной алгеброй. В своей работе [6] Эйбе и Кавамура показали, что генераторы алгебры КАС могут быть представлены через генераторы алгебры Кунца, что позволяет вложить алгебру КАС в алгебру Кунца с помощью так называемой рекурсивной схемы. Это дает возможность построить скрещенное произведение алгебры КАС с помощью хорошо разработанных методов и позволяет получить полевую алгебру для изучения свойств квантовых систем на аксиоматической аксиоме, предложенной в работах Допличера и Робертса.

Построим скрещенное произведение для случая алгебры Кунца O_4, что может быть полезно при изучении систем с парафермионной статистикой. Прежде чем приступить к процедуре скрещенного произведения, приведем основные сведения по алгебрам Кунца.

Алгебра Кунца – это простая C^*-алгебра O_{2d} $(d \geq 1)$, порожденная изометриями $\psi_1, ..., \psi_d$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\psi_i^* \psi_j = \delta_{i,j} I, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{d} \psi_i \psi_i^* = I, \tag{2.12}$$

где I является единицей алгебры. Введем для удобства следующие обозначения: $\psi_{i_1 i_2 ... i_m} \equiv \psi_{i_1}\psi_{i_2}...\psi_{i_m}$, $\psi^*_{i_1 i_2 ... i_m} \equiv \psi^*_{i_m}\psi^*_{i_{m-1}}...\psi^*_{i_1}$ и $\psi_{i_1 i_2 ... i_m; j_n ... j_2 j_1} \equiv$ $\equiv \psi_{i_1}...\psi_{i_m}\psi^*_{j_n}...\psi^*_{j_1}$. Условия (2.11), (2.12) показывают, что алгебра O_{2d} порождается *мономами* – операторами вида $\psi_{i_1 i_2 ... i_m; j_n ... j_2 j_1}$, образующими линейное пространство. При этом канонический унитальный $*$-эндоморфизм ρ на алгебре O_{2d} определяется как

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{d} \psi_i X \psi_i^*, X \in O_{2d}. \tag{2.13}$$

Хорошо известно, что генераторы a_m и a_n^* ($m, n =$1,2,... d) *-алгебры КАС удовлетворяют следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\{a_m,\ a_n\} = \{a_m^*,\ a_n^*\} = 0, \tag{2.14}$$

$$\{a_m,\ a_n^*\} = \delta_{m,n} I. \tag{2.15}$$

Алгебра КАС, которая с физической точки зрения описывает фермионные поля, изоморфна с $O_{2d}^{U(1)} \subset O_{2d}$. Эта алгебра состоит из элементов O_{2d}, инвариантных относительно стандартного действия группы $U(1)$. Другими словами, это подалгебра, порожденная мономами

$$\psi_{i_1}...\psi_{i_k}\psi^*_{j_k}...\psi^*_{j_1}, \tag{2.16}$$

где $i_1, ..., i_k,\ \ j_1, ..., j_k = 1,\ 2$. Действие τ группы $U(1)$ на O_{2d} задается следующим правилом:

$$\tau(z)(\psi_i) = z\psi_i, \quad z \in U(1) \quad i = 1,\ 2. \tag{2.17}$$

Следуя работе [6], опишем конструкцию вложения алгебры КАС в алгебру O_{2d}, названную *рекурсивной фермионной системой* (РФС).

Пусть $a \in O_{2d}$, $\zeta :\ O_{2d} \to O_{2d}$ является линейным отображением и φ является унитальным $*$-эндоморфизмом на O_{2d} соответственно и которые задаются следующими выражениями:

$$a = \sum_{k=1}^{d} \varepsilon_k \psi_{i_k} \psi^*_{j_k}, \tag{2.18}$$

$$\zeta(X) = \sum_{k=1}^{d} \varepsilon_k^1 (\psi_{i_k} X \psi_{i_k}^* - \psi_{j_k} X \psi_{j_k}^*), \quad X \in O_{2d}, \tag{2.19}$$

$$\varphi(X) = \ \rho(X) = \sum_{i=1}^{d} \psi_i X \psi_i^*, \quad X \in O_{2d}, \tag{2.20}$$

где (2.18) учитывает произвольное разделение индексов $\{1, ..., 2d\}$ на две упорядоченные части: $\{i_1 = 1, i_2, ..., i_d\}$, $\{j_1, j_2, ..., j_d\}$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^1 = +1$,$\varepsilon_k = \varepsilon_k^1 = \pm 1$ $(k \geq 2)$.

Тройка $R = (a, \zeta, \varphi)$ называется *рекурсивной фермионной системой (РФС)* в O_{2d}, если удовлетворяет следующим условиям:

1. $a^2 = 0, \quad \{a, a^*\} = I,$

2. $\{a, \zeta(X)\} = 0, \quad \zeta(X)^* = \zeta(X^*), \quad X \in O_{2d},$

3. $\zeta(X)\zeta(Y) = \varphi(XY), \quad X, Y \in O_{2d}.$

В [6] показывается, что для фиксированного элемента a из O_{2d} существует такое отображение ζ на O_{2d}, что

$$a_n = \zeta^{n-1}(a), \quad n = 1, 2, ...$$

Вложения Φ_R алгебры КАС в O_{2d}, соответствующей $R = (a, \zeta, \varphi)$ определяются путем отображения генераторов a_n $(n = 1, 2, ...)$ из алгебры КАС следующим образом:

$$\Phi_R(a_n) = \zeta^{n-1}(a) \in O_{2d}^{U(1)} \subset O_{2d}, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.21}$$

В силу условий (2.18)-(2.20) для образов верны следующие выражения:

$$\{\Phi_R(a_m), \Phi_R(a_n)\} = \varphi^{m-1}(\{a, \zeta^{n-m}(a)\}) = \varphi^{m-1}(0) = 0, \quad m \leq n, \tag{2.22}$$

$$\{\Phi_R(a_m), \Phi_R(a_n)^*\} = \varphi^{m-1}(\{a, \varphi^{n-m}(a^*)\}) = \varphi^{m-1}(0) = 0, \quad m < n, \tag{2.23}$$

$$\{\Phi_R(a_n), \Phi_R(a_n)^*\} = \varphi^{n-1}(\{a, a^*\}) = \varphi^{n-1}(I) = I. \tag{2.23'}$$

Обозначим через $A_R \equiv \Phi_R(KAC) \subset O_{2d}$ образ вложения. A_R называется КАС подалгеброй, соответствующей РФС.

Ограничимся рассмотрением случая $d = 2$, который с физической точки зрения соответствует дублету полей. Тогда имеем следующую стандартную РФС: $C = (a \equiv a_1, \widetilde{a} \equiv a_2, \zeta, \varphi)$:

$$a = \psi_1\psi_2^* + \psi_3\psi_4^*, \tag{2.24}$$

$$\widetilde{a} = \psi_1\psi_3^* - \psi_2\psi_4^*, \tag{2.25}$$

Из требования антикоммутативности $\zeta(X)$ с a и с $\widetilde{a}$, отображение ζ определяется единственным образом:

$$\zeta(X) = \psi_1 X\psi_1^* - \psi_2 X\psi_2^* + \psi_3 X\psi_3^* - \psi_4 X\psi_4^*, \quad X \in O_4. \tag{2.26}$$

Отображение $\varphi(X)$ при этом представляет собой канонический эндоморфизм алгебры O_4:

$$\varphi(X) = \psi_1 X\psi_1^* + \psi_2 X\psi_2^* + \psi_3 X\psi_3^* + \psi_4 X\psi_4^*, \quad X \in O_4. \tag{2.27}$$

Получившаяся четверка C задает отображение Φ_C из КАС в O_4:

$$\Phi_C(a_{2(n-1)+i}) = \zeta^{n-1}(a_i) \in O_4^{U(1)} \subset O_4, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.28}$$

КАС-подалгебра, соответствующая стандартной рекурсивной фермионной системе C, обозначается как A_C.

Скрещенное произведение

Построим теперь C^*-скрещенное произведение алгебры A_C с помощью эндоморфизма δ этой алгебры.

Рассмотрим отображение $\delta : A_C \to O_4$, которое для любого $a \in A_C$ задает эндоморфизм

$$\delta(a) = \psi_1 a\psi_1^*. \tag{2.29}$$

Лемма 2.15. *Отображение δ является *-эндоморфизмом $\delta : A_C \to A_C$.*

Доказательство. Алгебра A_C является *-подалгеброй O_4, порожденной мономами вида (2.16) и ψ_1 является изометрией, а δ – гомоморфизмом.

Пусть $a \in O_4$ является мономом вида (2.16) для $k = j$. Тогда $\delta(a)$ также будет мономом вида (2.16) для $k = j + 1$, поэтому $\delta(a) \in A_C$. Легко показать, что δ непрерывно. Таким образом образ A_C относительно действия δ содержится в A_C и δ является $*$-эндоморфизмом алгебры A_C.

Теперь введем понятие трансферного оператора, который определяется следующим образом. Пусть γ является $*$-эндоморфизмом на C^*-алгебре A. Линейное положительное отображение $\gamma_* : A \to A$ с сохранением инволюции называется *трансферным оператором* (по отношению к γ), если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее условие:

$$\gamma_*(\gamma(a)b) = a\gamma_*(b). \tag{2.30}$$

Более того, если выполняется соотношение

$$\gamma\gamma_*(a) = \gamma(1)a\gamma(1) \tag{2.31}$$

для любого $a \in A$, тогда трансферный оператор γ_* называется *полным трансферным оператором.*

На основе введенного определения рассмотрим следующее отображение на алгебре A_C:

$$\delta_*(a) = \psi_1^* a \psi_1, \qquad a \in A_C \tag{2.32}$$

Лемма 2.16. *Отображение δ_* заданное с помощью (2.32) является полным трансферным оператором $\delta_* : A_C \to A_C$ по отношению к δ.*

Доказательство. Достаточно показать, что δ_* является линейным, непрерывным, сохраняющим инволюцию отображением, для которого $\delta_*(a) \in A_C$ для любого $a \in A_C$. Положительность данного отображения очевидна. Для любых $a, b \in A_C$ получаем

$$\delta_*(\delta(a)b) = \psi_1^*\psi_1 a \psi_1^* b \psi_1 = a\delta_*(b).$$

Следовательно, δ_* является трансферным оператором. Осталось убедиться, что δ_* является полным. Действительно, для любого $a \in A_C$ мы получаем

$$\delta\delta_*(a) = \psi_1\psi_1^* a \psi_1 \psi_1^* = \delta(1)a\delta(1),$$

т.к. $\delta(1) = \psi_1 I \psi_1^* = \psi_1\psi_1^*$. Это соответствует определению полного трансферного оператора, следовательно, δ_* является полным трансферным оператором.

Утверждение 2.17. *C^*-подалгебра (алгебры Кунца) соответствующей рекурсивной фермионной системы удовлетворяет следующим условиям:*

$$\delta_*\zeta(X) = X, \quad X \in A_C, \tag{2.33}$$

$$\delta_*(a) = 0. \tag{2.34}$$

Доказательство. Уравнение (2.34) верно, т.к. из (2.11), (2.12) имеем:

$$\delta_*(a_1) = \psi_1^*(\psi_1\psi_2^* + \psi_3\psi_4^*)\psi_1 = \psi_2^*\psi_1 = 0, \tag{2.35}$$

$$\delta_*(a_2) = \psi_1^*(\psi_1\psi_3^* - \psi_2\psi_4^*)\psi_1 = \psi_3^*\psi_1 = 0. \tag{2.36}$$

Из (2.33) получаем:

$$\delta_*\zeta(X) = \psi_1^*\zeta(X)\psi_1 = \psi_1^*(\psi_1 X\psi_1^* - \psi_2 X\psi_2^* + \psi_3 X\psi_3^* - \psi_4 X\psi_4^*)\psi_1 = X\ . \tag{2.37}$$

Рассмотрим *-алгебру $B := B(A_C, \psi_1)$, порожденную алгеброй A_C и изометрией ψ_1. A_C является *алгеброй коэффициентов* для B, если выполнено следующее дополнительное условие:

$$\psi_1 a = \delta(a)\psi_1, \quad a \in A_C. \tag{2.38}$$

В нашем случае это условие выполняется, поэтому имеет место следующая лемма.

Лемма 2.18. *Алгебра A_C является алгеброй коэффициентов для B.*

Обозначим через B_0 векторное пространство, состоящее из конечных сумм вида:

$$x = \psi_1^{*N}a_{\overline{N}} + ... + \psi_1^* a_{\overline{1}} + a_0 + a_1\psi_1 + ...a_N\psi_1^N, \tag{2.39}$$

где $a_k, a_{\overline{l}} \in A_C$, $N \in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$. Из результатов работы [5] следует, что B_0 является плотной $*$-подалгеброй C^*-алгебры B. Введем следующие обозначения $A_k = a_k\psi_1^k$ и $A_{\overline{k}} = \psi_1^{*k}a_{\overline{k}}$. Следующее условие, называемое $*$-условием, обеспечивает единственность разложения (2.39) и налагает на коэффициенты следующее условие:

$$\|a_0\| \leq \|x\| \tag{2.40}$$

для любых $x \in B_0$ определяемых в (2.39).

На основе работы [5] алгебра B рассматривается как скрещенное произведение

$$B = A_C \times_\delta \mathrm{Z} = B(A_C, \psi_1).$$

Элементы этого скрещенного произведения являются конечными суммами вида (2.39).

Утверждение 2.19. *C^*-алгебра $A_C \times_\delta \mathrm{Z}$ является алгеброй Кунца.*

Доказательство. Согласно свойствам генераторов алгебры Кунца ψ_1 и ψ_2 и принимая $a_1 = \psi_1\psi_1^*$ и $a_i = 0$ для $i = 0, 2, 3...$ получаем $x = a_1\psi_1 = \psi_1\psi_1^*\psi_1 = \psi_1$; $a_1 = \psi_2\psi_1^*$ и $a_i = 0$ для $i = 0, 2, 3...$, то $x = a_1\psi_1 = \psi_2\psi_1^*\psi_1 = \psi_2$; $a_1 = \psi_3\psi_1^*$ и $a_i = 0$ для $i = 0, 2, 3...$, то $x = a_1\psi_1 = \psi_3\psi_1^*\psi_1 = \psi_3$;$a_1 = \psi_4\psi_1^*$ и $a_i = 0$ для $i = 0, 2, 3...$, то $x = a_1\psi_1 = \psi_4\psi_1^*\psi_1 = \psi_4$.

Таким образом мы показали, что алгебра Кунца может быть представлена в виде скрещенного произведения алгебры КАС с её эндоморфизмом ψ_1, т.е. $O_4 \cong A_C \times_\delta \mathrm{Z}$, где A_C является $U(1)$-инвариантной подалгеброй O_4.

2.1.2 Действие C^*-категории на алгебре O_ρ

В этом параграфе мы будем рассматривать действие тензорной моноидальной C^*-категории на C^*-алгебре, а вследующем параграфе покажем единственность вложения такой симметрической категории $(\mathscr{T}, \varepsilon)$ в категорию гильбертовых пространств.

Пусть $F : \mathscr{T}_1 \to \mathscr{T}_2$ является строгим моноидальным $*$-функтором между соответствующими строгими моноидальными C^*-категориями и пусть ρ является объектом $\mathscr{T}_1$. Тогда F совместим с индуктивными пределами, определяющими O_ρ^k и $O_{F(\rho)}^k$, так что F индуцирует отображения $F^k : O_\rho^k \to O_{F(\rho)}^k$, $k \in \mathbb{Z}$, которые дают морфизм $\mathbb{Z}$-градуированных C^*-алгебр. Поэтому получаем $*$-гомоморфизм $F_* : \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k \to \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_{F(\rho)}^k$ сплетающий действия из $\mathbb{T}$. Поскольку единственная C^*-норма совпадает с максимальной C^*-нормой на $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$, F_* обладает нормой $\leqq 1$. Она может быть изометрией, если F^0 изометрия. Таким образом, порождаем морфизм $F_* : O_\rho \to O_{F(\rho)}$, сплетающий действия из $\mathbb{T}$ и канонические эндоморфизмы $\widehat{\rho}$ и $\widehat{F(\rho)}$:

$$F_*(\widehat{\rho}(X)) = \widehat{F(\rho)}(F_*(X)), \quad X \in O_\rho. \tag{2.41}$$

Теорема 2.20. *Если $F : \mathscr{T}_1 \to \mathscr{T}_2$ является строгим моноидальным $*$-функтором и ρ является объектом $\mathscr{T}_1$, то существует единственный индуцированный морфизм $F_* : O_\rho \to O_{F(\rho)}$ такой, что*

$$F_* i(T) = iF(T), \quad T \in (\rho^r, \rho^s), \quad r, s \in \mathbb{N}_0. \tag{2.42}$$

F_* сплетает действия из $\mathbb{T}$ и эндоморфизмы $\widehat{\rho}$ и $\widehat{F(\rho)}$, т.е.

$$F_* \circ \alpha_\lambda = \alpha_\lambda \circ F_*, \tag{2.43}$$

$$F_* \circ \widehat{\rho} = \widehat{F(\rho)} \circ F_*. \tag{2.44}$$

Если $F : (\mathscr{T}_1, \varepsilon_1) \to (\mathscr{T}_2, \varepsilon_2)$ является строгим симметрическим моноидальным $*$-функтором, то выполняется условие:

$$F_*(\varepsilon_1(p)) = \varepsilon_2(p), \quad p \in \mathbb{P}_\infty. \tag{2.45}$$

Если $(\mathscr{T}_1, \varepsilon_1)$ и $(\mathscr{T}_2, \varepsilon_2)$ также обладают сопряжением и тензорным умножением справа с помощью 1_ρ, а $1_F(\rho)$ являются изометриями, тогда

$$F_*(\Phi(X)) = \Phi(F_*(X)), \quad X \in O_\rho. \tag{2.46}$$

Если $F, G : \mathscr{T}_1 \to \mathscr{T}_2$ являются строгими моноидальными $*$-функторами и $\eta : F \to G$ является моноидальным естественным унитарным преобразованием, то существует единственный изоморфизм $\eta_* : O_{F(\rho)} \to O_{G(\rho)}$ с

$$\eta_*(i(T)) = i(\eta_\rho^{\times s} \circ T \circ \eta_\rho^{\times r *}), \quad T \in (F(\rho^r), F(\rho^s)), \quad r, s \in \mathbb{N}_0. \tag{2.47}$$

Более того $\eta_* \circ \widehat{F(\rho)} = \widehat{G(\rho)} \circ \eta_*$, а также $G_* = \eta_* \circ F_*$, $\eta_* \circ \alpha_\lambda = \alpha_\lambda \circ \eta_*$, и $\eta_*(\varepsilon_2(p)) = \varepsilon_2(p)$, $\eta_* \circ \Phi = \Phi \circ \eta_*$ если F, G симметричны и $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ обладают сопряжениями.

Доказательство. Существование $F_* : O_\rho \to O_{F(\rho)}$ доказано выше. Единственность является следствием (2.42), поскольку элементы вида $i(T)$ порождают O_ρ. Уравнение (2.42) подразумевает, что $F_* \circ \alpha_\lambda = \alpha_\lambda \circ F_*$ и, поскольку F является моноидальным, $F_* \circ \widehat{\rho} = \widehat{F(\rho)} \circ F_*$. Когда F является симметричным, (2.42) вместе с (2.44) и теоремой 2.4 показывают, что $F_*(\varepsilon_1(p)) = \varepsilon_2(p)$. Когда $R \in (\iota, \overline{\rho}\rho)$ определяет сопряжение для ρ, то $F(R)$ определяет сопряженное для $F(\rho)$, следовательно,

$$F_*(\Phi(i(T)) = \Phi(i(F(T))), \quad T \in (\rho^r, \rho^s), \quad r, s \in \mathbb{N}_0,$$

поскольку Φ не зависит от выбора R. Так как элементы вида $i(T)$ порождают O_ρ как банахово пространство, и Φ и F_* ограничены, то имеем, что $F_* \circ \Phi = \Phi \circ F_*$. Если η является моноидальной унитарной эквивалентностью из F в G, то отображение $T \to \eta_\rho^{\times s} \circ T \circ \eta_\rho^{\times r^*}$ из $(F(\rho^r), F(\rho^s))$ в $(G(\rho^r), G(\rho^s))$ совместимо с индуктивными пределами, определяющими $O^k_{F(\rho)}$ и $O^k_{G(\rho)}$ и определяет изоморфизм $\mathbb{Z}$-градуированных C^*-алгебр и следовательно изоморфизм $\eta_* : \mathrm{O}_{F(\rho)} \to O_{G(\rho)}$ с $\eta_* \circ \alpha_\lambda = \alpha_\lambda \circ \eta_*$, $\lambda \in \mathbb{T}$ показывает, что $\eta_* \circ \widehat{F(\rho)} = \widehat{G(\rho)} \circ \eta_*$. Если $T \in (\rho^r, \rho^s)$ то

$$\begin{aligned}\eta_* \circ F_*(i(T)) &= \eta_* i(F(T)) = i(\eta_\rho^{\times s} \circ F(T) \circ \eta_\rho^{\times r*}) \\ &= i(\eta_{\rho^s} \circ F(T) \circ \eta^*_{\rho^r}) = i(G(T)) = G_*(i(T)).\end{aligned}$$

Отсюда $\eta_* \circ F_* = G_*$. Это уравнение также показывает, что $\eta_*(\varepsilon_2(p)) = \varepsilon_2(p)$ когда F и G симметричны. Наконец, если $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ также имеют сопряжения и $S \in (F(\rho^r), F(\rho^s))$, то

$$\begin{aligned}\eta_*\Phi(i(S)) &= i(\eta_\rho^{\times s-1} \circ F(R^* \times 1_{\rho^{s-1}}) \circ 1_{F(\overline{\rho})} \times S \circ F(R \times 1_{\rho^{r-1}}) \circ \eta_\rho^{\times r-1*}) \\ &= i(G(R^* \times 1_{\rho^{s-1}}) \circ (\eta_{\overline{\rho}} \circ 1_{F(\rho)} \circ \eta^*_{\overline{\rho}}) \times (\eta_\rho^{\times S} \circ S \circ \eta_\rho^{\times r*}) \circ G(R \times 1_{\rho^{r-1}})) \\ &= \Phi\eta_*(i(S))\end{aligned}$$

так, что $\eta_* \circ \Phi = \Phi \circ \eta_*$. Этим завершается доказательство.

Если $\mathscr{A}$ является C*-алгеброй, тогда под **действием** строгой моноидальной C*-категории $\mathscr{T}$ на $\mathscr{A}$ понимается строгий моноидальный *-функтор

$$F : \mathscr{T} \to End\mathscr{A}$$

Согласно теореме 2.20 действие F из $\mathscr{T}$ на $\mathscr{A}$ и объект ρ из $\mathscr{T}$ определяют морфизмом $F_* : O_\rho \to O_{F(\rho)} = C^*(F(\rho))$. Когда $F(\rho)$ является унитальным, то получаем канонический морфизм $C^*(F(\rho)) \to \mathscr{A}$ отображающий $C^*(F(\rho))$ в C^*-подалгебру $\mathscr{A}$, порожденную сплетающими операторами между тензорными степенями $F(\rho)$. Следовательно, композируя с F_*, получаем унитальный морфизм $\mu : O_\rho \to \mathscr{A}$, обладающий следующими свойствами: $\mu(\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s) \subset (F(\rho)^r, F(\rho)^s)$, $r, s \in \mathbb{N}_0$, и $\mu \circ \widehat{\rho} = F(\rho) \circ \mu$. Это есть действие O_ρ на $\mathscr{A}$. Наоборот, если задано действие O_ρ на $\mathscr{A}$ с помощью унитального морфизма $\mu : O_\rho \to \mathscr{A}$ и задан эндоморфизм σ на $\mathscr{A}$ такой, что $\mu \circ \widehat{\rho} = \sigma \circ \mu$ и $\mu(\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s) \subset (\sigma^r, \sigma^s)$, $r, s \in \mathbb{N}_0$, то существует ассоциированное действие T_ρ на $\mathscr{A}$ с помощью $F(r) = \sigma^r$ и $F(T) = \mu i(T)$ для $T \in (\rho^r, \rho^s)$.

Заметим, что Теорема 2.3 определяет каноническое действие $\mathscr{T}_\rho$ на O_ρ, для которого ассоциированный морфизм $\mu : O_\rho \to O_\rho$ является тождественным автоморфизмом.

Понятие действия F строгой моноидальной C^*-категории $\mathscr{T}$ на C^*-алгебру $\mathscr{A}$, введенное выше, является довольно ограничительным, поскольку, когда $F(\rho)$ унитально, то это приводит к унитальному морфизму $\mu : O_\rho \to \mathscr{A}$ и O_ρ является бесконечной C^*-алгеброй. Чтобы избежать таких ограничений на существование таких действий, мы можем заменить $End\mathscr{A}$ в приведенном выше определении строгой моноидальной C^*-категорией $Bimod(\mathscr{A})$. Здесь $Bimod(\mathscr{A})$ обозначает категорию, объектами которой являются гомоморфизмы $\rho : \mathscr{A} \to M_m(\mathscr{A})$, $m \in N$, где M_m-матричная алгебра и $m \in \mathbb{N}$. Пусть $F : \mathscr{T} \to Bimod(\mathscr{A})$ является строгим моноидальным $*$-функтором и пусть ρ – объект $\mathscr{T}$. Тогда получаем морфизм $F_* : O_\rho \to O_{F(\rho)}$. Отсюда видим, что $O_{F(\rho)}$ также есть C^*-алгебра $C^*(\widetilde{\rho})$ для эндоморфизма $\widetilde{\rho}$ определенной C^*-алгебры.

В самом деле объект ρ категории $Bimod(\mathscr{A})$ является морфизмом $\rho : \mathscr{A} \to M_n(\mathscr{A}) \simeq \mathscr{A} \otimes M_n$. Пусть $\widetilde{M_n}$ обозначает простую C*-алгебру, которая является бесконечным тензорным произведением счетного числа копий M_n. Тогда ρ определяет эндоморфизм $\widetilde{\rho}$ наименьшего C^*-тензорного произведения $\mathscr{A} \otimes \widetilde{M_n}$ такого, что $\widetilde{\rho}(A \otimes B) = \rho(A) \otimes B$, $A \in \mathscr{A}$, $B \in \widetilde{M_n}$.

Лемма 2.21. O_ρ и $O_{\bar{\rho}}$ канонически изоморфны.

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathscr{T}_\rho$ и $\mathscr{T}_{\bar{\rho}}$ канонически изоморфны. Это удобнее рассматривать в терминах гильбертовых пространств, так что пусть $\mathscr{A}$ является точно представимой алгеброй на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть $\mathscr{K}$ является бесконечным тензорным произведением

$$\mathscr{K} = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\xi} \mathscr{K}_i,$$

где $\mathscr{K}_i = \mathbb{C}^n$ и $\xi = (\xi_i)$, ξ_i является единичным вектором $\mathbb{C}^n$, независимым от i. Пусть $V_1 : \mathbb{C}^n \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ – канонический унитарный оператор, определяемый как $V_1(\lambda \otimes x) = y$, где $y_1 = \lambda, y_{i+1} = x_i$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть V_r определен индуктивным образом как $V_r = V_1 1_{\mathbb{C}^n} \otimes V_{r-1}$. Тогда для морфизма $\rho_1 = \mathscr{A} \to M_{n^r}(\mathscr{A})$ можно определить эндоморфизм $\tilde{\rho}_1$ для $\mathscr{A} \otimes \tilde{M}_n$ посредством

$$\tilde{\rho}_1(A \otimes B) = 1_{\mathscr{H}} \otimes V_r \rho_1(A) \otimes B 1_{\mathscr{H}} \otimes V_r^*.$$

В этой формуле есть подразумеваемый изоморфизм $M_{n^r}(\mathscr{A})$ с произведением $\mathscr{A} \otimes M_n \otimes \cdots \otimes M_n$ благодаря соглашению, что если $\rho_1 = \rho^r$, то $\tilde{\rho_1} = \tilde{\rho}^r$. Теперь для заданных $\rho_2 : \mathscr{A} \to M_{n^r}(\mathscr{A})$ и $T \in (\rho_1, \rho_2)$ мы можем определить $\tilde{T} \in (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ посредством

$$\tilde{T} = 1_{\mathscr{H}} \otimes V_s T \otimes 1_{\mathscr{H}} 1_{\mathscr{H}} \otimes V_r^*.$$

Обратно, если $S \in (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2), S^{'} = 1_{\mathscr{H}} \otimes V_s^* S 1_{\mathscr{H}} \otimes V_r$ должен иметь вид $T \in 1_{\mathscr{H}}$ для $T \in (\rho_1, \rho_2)$, поскольку для T справедливо соотношение

$$S\rho_1(A) \otimes B = \rho_2(A) \otimes BS^{'}, A \in \mathscr{A}, B \in \widetilde{M}_n, S^{'} = S^{'}\rho_1(I) \otimes I = \rho_2(I) \otimes IS^{'},$$

и $\widetilde{M}_n$ представляется неприводимым образом на $\mathscr{H}$. Отсюда легко следует, что $T \to \widetilde{T}$ является изоморфизмом категорий T_ρ и $T_{\tilde{\rho}}$.

Теперь обобщим понятие гильбертова пространства в C^*-алгебре с единицей для C^*-категории (здесь гильбертовы пространства обозначим как H, которое в дальнейшем будем использовать и для обозначения функтора). Под гильбертовым пространством в C^*-категории $\mathscr{B}$ понимается замкнутое подпространство H в множестве морфизмов (B, C), где B и C являются объектами $\mathscr{B}$. Скалярное произведение в H определяется как

$\psi^*\psi \in \mathbb{C}1_B$ для $\psi \in H$. Стоит напомнить, что в тензорной C^*-категории множества морфизмов между объеками образуют в общем банахово пространство, поэтому гильбертовы пространства, о которых идет здесь речь, образуют замкнутые подпространства в них. Здесь ограничимся только конечномерными гильбертовыми пространствами. Если выберем ортонормированный базис $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_d$ для H, тогда проектор

$$1_H := \sum_{i=1}^{d} \psi_i \psi_i^* \tag{2.48}$$

для (C, C) является независимой от выбора ортонормированного базиса и называется носителем H. Если $H \subset (B, C)$ и $H^{'} \subset (B, C^{'})$ – гильбертовы пространства в $\mathscr{B}$, то $(H, H^{'})$ есть множество линейных отображений из H в $H^{'}$, которое может быть отождествлено с множеством $T \in (C, C^{'})$, удовлетворяющем условиям $TH \subset H^{'}$ и $T1_H = 1_{H^{'}}T$. При этом H порождает морфизм σ_H из (B, B) в (C, C) посредством

$$\sigma_H(b) := \sum_{i=1}^{d} \psi_i b \psi_i^* \tag{2.49}$$

Если $H \subset (B, C)$ и $K \subset (C, D)$ есть гильбертовы пространства в $\mathscr{B}$, то $KH \subset (B, D)$ также является гильбертовым пространством и $\sigma_{KH} = \sigma_K \sigma_H$.

Теперь возьмем в качестве $\mathscr{B}$ C^*-категорию матриц $Mat(\mathscr{A})$ над $\mathscr{A}$. Тогда гильбертово пространство $H \subset (1, n)$ определяет морфизм σ_H из $(1, 1) = \mathscr{A}$ в $(n, n) = M_n(\mathscr{A})$ и следовательно, является объектом $Bimod(\mathscr{A})$. Такие объекты называются **внутренними**. В частности, морфизм из $\mathscr{A}$ в $M_n(\mathscr{A})$, который ставит элемент из $\mathscr{A}$ под диагональ, является внутренним, поскольку этот морфизм и есть σ_H, где H представляет собой множество $n \times 1$-матриц со значениями в $\mathbb{C}1_{\mathscr{A}}$. Таким же образом можем определить объект σ из $Bimod(\mathscr{A})$, являющимся также внутренним, если только он будет представлять собой конечную прямую сумму копий моноидальной единицы ι. При этом соответствующее гильбертово пространство есть множество (ι, σ), рассматриваемое как набор морфизмов в $Mat(\mathscr{A})$.

Теперь имеем строгую симметрическую моноидальную категорию $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{A})$, объектами которой являются гильбертовы пространства в $Mat(\mathscr{A})$, порождающие внутренние объекты в $Bimod(\mathscr{A})$, а морфизмы $-$ суть линейные отображения между данными гильбертовыми пространствами (т.е морфизмы в $Mat(\mathscr{A})$). Моноидальная структура на морфизмах определяется по тем же формулам, как и для $Bimod(\mathscr{A})$. Итак, имеем каноническое моноидальное вложение $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{A})$ в $Bimod(\mathscr{A})$, то есть каноническое действие $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{A})$ на $\mathscr{A}$.

Пусть теперь имеется C^*-система $(\mathscr{A}, \alpha)$ над компактной группой G. Тогда имеем индуцированное действие G на $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{A})$. Обозначим через $\tilde{U}(\mathscr{A}, \alpha)$ поточечно фиксированную подкатегорию относительно действия G. Любой объект из $\tilde{U}(\mathscr{A}, \alpha)$ содержит непрерывное унитарное представление G. Мы также получаем индуцированное действие G на $Mat(\mathscr{A})$ и поточечно фиксированную подкатегорию $Mat(\mathscr{A}^\alpha)$. Морфизмы в $\tilde{U}(\mathscr{A}, \alpha)$ одновременно являются и морфизмами в $Bimod(\mathscr{A})$, так что получаем каноническое моноидальное вложение из $\tilde{U}(\mathscr{A}, \alpha)$ в $Bimod(\mathscr{A})$ и, соответственно, действие $\tilde{U}(\mathscr{A}, \alpha)$ в $\mathscr{A}^\alpha$.

Действие из $\tilde{U}(\mathscr{A}, \alpha)$ в $\mathscr{A}^\alpha$, определенное выше, может быть описано следующим образом. С d-мерным гильбертовым пространством $H \subset (1, n)$ можно ассоциировать $\mathscr{A}$-значную $n \times d$ матрицу X, столбцы которой образуют ортонормированный базис в H. Тогда $X^*X = I, XX^* = \sigma_H(I)$ и если H объект $\tilde{U}(\mathscr{A}, \alpha)$, то получаем

$$\tilde{\alpha}_g(X) = Xv(g),$$

где v $-$ непрерывное унитарное представление G в $M_d(\mathbb{C})$, и произведению представлений соответствует обычное матричное произведение. Тогда для $A \in \mathscr{A}^\alpha$ имеем,

$$\sigma_H(A) = XA \otimes I_d X^* \in M_n(\mathscr{A}).$$

Этот эндоморфизм остается поточечно фиксированным в $M_n(\mathscr{A})^{\tilde{\alpha}} = M_n(\mathscr{A}^\alpha)$ относительно действия группы G и не зависит от выбора базиса в H.

2.2 Теория дуальности для компактных групп

Теперь наша следующая задача заключается в формулировке теоремы, которая характеризует категорию конечномерных непрерывных унитарных представлений компактной группы как абстрактную категорию. По сути необходимо показать, как абстрактная категория $(\mathscr{T}, \varepsilon)$ может быть вложена в категорию $(\mathscr{H}, \theta)$ гильбертовых пространств так, чтобы сохранилась при этом структура. Это означает, что должен существовать строгий симметричный моноидальный функтор $H : (\mathscr{T}, \varepsilon) \to (\mathscr{H}, \theta)$.

Определенный шаг в этом направлении уже был сделан, когда рассматривали теорему 2.14, согласно которой категория $\mathscr{T}_\rho$ (где ρ является специальным объектом) была вложена в симметрическую моноидальную C^*-категорию, порожденную каноническим гильбертовым пространством в $\mathscr{O}_{d(\rho)}$. Расширим это вложение до полной симметрической моноидальной C^*-подкатегории с сопряжением и которая к тому же еще замкнута относительно прямых сумм и подобъектов, порожденных с помощью ρ. Для установления теоремы двойственности, такое расширение вполне достаточно для случая, когда категория $\mathscr{T}$ порождена одним объектом и которая соответствует при этом такой группе G, которая является компактной группой Ли. В общем же случае, категория $\mathscr{T}$ является индуктивным пределом подкатегорий, порожденных своими объектами (т.е. каждая такая подкатегория порождена своим одним оо6ъектом), а компактная группа G соответственно при этом будет проективным пределом соответствующих компактных групп Ли.

Пусть G является компактной группой. В этом разделе через $U(G)$ обозначим строгую симметричную моноидальную C^*-категорию конечномерных непрерывных представлений, для которых для любых $g \in G$, $g \neq e$, существует ρ из $U(G)$ с $\rho(g) \neq \rho(e)$. Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 2.22. *Пусть $(\mathscr{T}, \varepsilon)$ – строгая симметрическая моноидальная C^*-категория с сопряжением и обладающая подобъектами и прямыми суммами, где $(\iota, \iota) = \mathbb{C}1$. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма компактная группа G и изоморфизм $H : (\mathscr{T}, \epsilon) \to$*

$(U(G), \theta)$ *симметрических моноидальных* C^**-категорий.*

Замечание. Поскольку H является изоморфизмом, то $U(G)$ замкнуто относительно прямых сумм, подобъектов и сопряжения. Тривиальное представление при этом связано с единицей $U(G)$. Таким образом, коэффициенты представления G реализующиеся в $U(G)$, образуют унитальную $*$-подалгебру $\mathscr{L}(G)$, разделяющую точки G. Поэтому, согласно теореме Стоуна-Вейерштрасса, каждое неприводимое представление G реализуется на $U(G)$. Пусть $f : G' \to G$ непрерывный гомоморфизм компактных групп. Тогда если σ есть непрерывное унитарное представление G, то $g' \to \sigma f(g')$ является непрерывным унитарным представлением группы G'. В связи с этим рассмотрим следующую лемму.

Лемма 2.23. *Пусть* $f : G' \to G$ *непрерывный гомоморфизм компактных групп, тогда* G' *может быть представлена неприводимым образом в каждом неприводимом представлении* G *и не нетривиальное 1-мерное представление* G *будет тривиальным на* G' *тогда и только тогда, когда оно сюръективно.*

Доказательство. Если f является сюръективным, то G' будет неприводимо представлено в каждом неприводимом представлении G и всякое нетривиальное представление G будет нетривиальным на G'. Если f не сюръективна, тогда, заменив G' на $f(G)$ можно предположить, что G' является собственной подгруппой G. Можно подобрать такую функцию $f \in L^2(G)$, не являющуюся постоянной, которая будет инвариантной относительно действия слева замкнутой подгруппы G'. Далее, разлагая $L^2(G)$ на неприводимые компоненты, видим, что в некоторых неприводимых представлениях G должен содержаться ненулевой вектор, инвариантный лишь относительно G' (но не относительно G). Такое представление должно быть либо приводимым, как и представление G', либо тривиальным 1-мерным представлением.

Пусть $(\mathscr{H}, \theta)$ – строгая моноидальная C^*-категория конечномерных гильбертовых пространств, единичным объектом которой является $\mathbb{C}$. Пусть $H : (\mathscr{T}, \epsilon) \to (\mathscr{H}, \theta)$ – строгий симметрический моноидальный *-функтор. Заметим, что если R удовлетворяет уравнениям сопряжения для объекта

ρ категории $\mathscr{T}$, т.е. уравнениям

$$\bar{R}^* \times 1_\rho \circ 1_\rho \times R = 1_\rho,$$

$$R^* \times 1_{\bar{\rho}} \circ 1_{\bar{\rho}} \times \bar{R} = 1_{\bar{\rho}}$$

(где $\bar{R} = \varepsilon(\bar{\rho}, \rho) \circ R$, $\varepsilon(\bar{\rho}, \rho) \in (\bar{\rho}\rho, \rho\bar{\rho})$), то $H(R)$ удовлетворяет уравнениям сопряжения для объекта $H(\rho)$ категории $\mathscr{H}$. Отсюда следует, что ρ и $H(\rho)$ имеют одинаковые размерности.

Теперь определим $End_\otimes(H)$ как группу моноидальных естественных унитарных преобразований из H в H. Другими словами, если $u \in End_\otimes(H)$ и $T \in (\rho, \rho^{'})$ в $\mathscr{T}$, то $u_\rho \in (H(\rho), H(\rho))$ является унитарным оператором, $H(T)u_\rho = u_{\rho'} H(T)$ и $u_{\rho_1\rho_2} = u_{\rho_1} \otimes u_{\rho_2}$ для каждой пары ρ_1, ρ_2 объектов из $\mathscr{T}$. $End_\otimes(H)$ становится компактной группой, если ее оснастить топологией, индуцированной произведением унитарных групп объектов $H(\rho)$ при варьировании ρ по всем объектам $\mathscr{T}$. $H(\rho)$ при этом осуществляет унитарное представление $u \to u_\rho$ группы $End_\otimes(H)$. Поэтому мы имеем категорию вида $U(End_\otimes(H))$ с теми же объектами, как и $\mathscr{T}$, и, более того, H порождает симметрический моноидальный *-функтор $\widehat{H} : \mathscr{T} \to U(End_\otimes(H))$. В случае выполнения условий теоремы 2.22 ясно, что G может быть рассмотрена естественным образом, как подгруппа группы $End_\otimes(H)$. Но все это означает, что $\widehat{H}$ осуществляет изоморфизм категорий и следовательно, каждое неприводимое представление группы $End_\otimes(H)$ должно появляться в $U(End_\otimes(H))$. Отсюда, согласно лемме 2.23 получаем, что $G = End_\otimes(H)$.

Таким образом, доказан вклад Таннаки в теорию дуальности компактных групп. Классическая теория дуальности Таннаки-Крейна позволяет более точно доказать, что $\widehat{H} : \mathscr{T} \to U(End_\otimes(H))$ с необходимостью является изоморфизмом, если даже не знаем заранее группу G. Чтобы установить связь с приближением Крейна нужно построить алгебру Крейна из H. Это построение может быть выполнено введением множества $3j$-символов, определяемых H. Однако здесь введен независимый подход без использования алгебры Крейна и в предположении, что категория $\mathscr{T}$ является конечнопорожденной.

Лемма 2.24. *Пусть $\mathscr{T}$ – индуктивное семейство полных монои-*

дальных подкатегорий категории $\mathscr{T}$ *с* $\bigcup_i \mathscr{T}_i = \mathscr{T}$. *Пусть* H *является строгим моноидальным* **-функтором* $H : \mathscr{T} \to \mathscr{H}$ *в категорию гильбертовых пространств и положим* $G = End_{\otimes}(H), G_i = End_{\otimes}(H||\mathscr{T}_i)$. *Тогда:*

(а) G является проективным пределом G_i, т.е. $G = lim_{\leftarrow} G_i$.

(б) Если каждый $\mathscr{T}_i$ имеет подобъекты, сопряжения и прямые суммы и $H|\mathscr{T}_i : \mathscr{T}_i \to U(G_i)$ является изоморфизмом, тогда $\widehat{H} : \mathscr{T} \to U(G)$ есть изоморфизм.

Доказательство. Сужение отображения $G \to G_i$ совместимо с сужениями $G_i \to G_j$ для $j \leq i$, т.е. для $\mathscr{T}_j \subset \mathscr{T}_i$. Пусть $\psi_i : G' \to G_i$ есть непрерывный гомоморфизм топологических групп при каждом i, который также совместим с отображениями сужения $G_i \to G_j$, $j \leq i$. Тогда любой гомоморфизм $\psi : G' \to G$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] & & G_i \\ & G' \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, должен быть единственным, поскольку для заданных $g \in G'$ и $\rho \in \mathscr{T}$ можно выбрать i такое, что ρ является объектом $\mathscr{T}$. Поэтому можем определить $\psi(g)_\rho = \psi_i(g)_\rho$. Это определение не зависит от выбора $\mathscr{T}_i$, поскольку у нас имеется индуктивное семейство. Следовательно, это определяет элемент $\psi(g) \in G$, где ψ - непрерывный гомоморфизм. Это доказывает (а).

Для доказательства (б) отметим, что если $j \leq i$, тогда сужение отображений $G_i \to G_j$ должно быть сюръективным, поскольку $\mathscr{T}_i$ является изоморфной к $U(G_i)$ и $\mathscr{T}_i$ изоморфна к $U(G_i)$. Но теперь отображение сужения $G \to G_i$ должно быть сюръективно, поскольку $G = lim_{\leftarrow} G_i$. Таким образом, $\widehat{H} : \mathscr{T} \to U(G)$ является изоморфизмом.

Следует отметить, что если $\mathscr{T}'$ есть полная моноидальная подкатегория категории $\mathscr{T}$ такая, что $\mathscr{T}$ получается путем пополнения $\mathscr{T}'$ подобъектами и прямыми суммами. Тогда справедлива следующая лемма:

Лемма 2.25. *Сужение* $G \to G' := End_{\otimes}(H|\mathscr{T})$ *является изоморфизмом таким, что если* $\mathscr{T}'$ *изоморфна к* $U(G')$, *то* $\mathscr{T}$ *изоморфна к* $U(G)$.

Рассмотрим функтор $H : \mathscr{T} \to \mathscr{H}$. Если потребовать лишь, чтобы H был *-функтором, то H определяется как естественная унитарная эквивалентность с помощью размерности $H(\sigma)$, где σ пробегает все неприводимые объекты из $\mathscr{T}$. Как было отмечено, если H является строгим симметрическим моноидальным *-функтором, то нужно положить, что $d(\sigma) = dim H(\sigma)$. Поскольку функтор является *-функтором, то H определяется с точностью до естественной унитарной эквивалентности. Дальнейшая задача заключается в том, чтобы сделать H строгим симметрическим моноидальным *-функтором. Для этого достаточно определить слабый симметрический моноидальный *-функтор, представляющий собой пару $(H, \widehat{H})$, где $H : \mathscr{T} \to \mathscr{H}$ – *-функтор и для каждой пары ρ, σ объектов кактегории $\mathscr{T}$ есть унитарный оператор

$$\widetilde{H}_{\rho,\sigma} : H(\rho) \otimes H(\sigma) \to H(\rho\sigma),$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$\widetilde{H}_{\rho,\iota} = 1_{H(\rho)}, \quad \widetilde{H}_{\iota,\rho} = 1_{H(\rho)}. \tag{2.50}$$

Если $R \in (\rho, \rho^{'})$ и $S \in (\sigma, \sigma^{'})$, тогда

$$H(R \times S) \circ \widetilde{H}_{\rho,\sigma} = \widetilde{H}_{\rho^{'},\sigma^{'}} \circ H(R) \otimes H(S), \tag{2.51}$$

$$\widetilde{H}_{\rho,\sigma\tau} \circ 1_{H(\rho)} \otimes \widetilde{H}_{\sigma,\tau} = \widetilde{H}_{\rho\sigma,\tau} \circ \widetilde{H}_{\rho,\sigma} \otimes 1_{H(\tau)}, \tag{2.52}$$

$$H(\epsilon(\rho, \sigma)) \circ \widetilde{H}_{\rho,\sigma} = \widetilde{H}_{\sigma,\rho} \circ \theta(H(\rho), H(\sigma)). \tag{2.53}$$

Существование $\widetilde{H}$ зависит только от естественных классов унитарной эквивалентности H, поскольку если $u : H \to H^{'}$ является естественным унитарным преобразованием, то можем положить

$$\widetilde{H}^{'}_{\rho,\sigma} := u_{\rho\sigma} \widetilde{H}_{\rho,\sigma} u^*_\rho \otimes u^*_\sigma. \tag{2.54}$$

Достаточность определения слабого симметрического моноидального *-функтора $(H, \widetilde{H})$ кроется в том, что $\widetilde{H}$ можно использовать для переопределения тензорного произведения. Если $\phi \in H(\rho)$ и $\psi \in H(\sigma)$, то определим $\phi \times \psi \in H(\rho\sigma)$ как

$$\phi \times \psi \ = \widetilde{H}_{\rho,\sigma} \phi \otimes \sigma. \tag{2.55}$$

Поскольку $\widetilde{H}_{\rho,\sigma}$ унитарен, это определяет $H(\rho\sigma)$ как тензорное произведение $H(\rho) \times H(\sigma)$ из $H(\rho)$ и $H(\sigma)$. Формула (2.52) показывает, что операция $\times$ является ассоциативной для тензорного произведения гильбертовых пространств. Формула же (2.50) показывает, что $\mathbb{C}$ действует как моноидальная единица. Симметрия, связанная с новым определением тензорного произведения, определяется как

$$\theta^{'}(H(\rho), H(\sigma)) = \widetilde{H}_{\sigma,\rho}\theta(H(\rho), H(\sigma))\widetilde{H}^{'}_{\rho,\sigma}. \tag{2.56}$$

Отсюда можуј определить новую симметрическую моноидальную C^*-категорию гильбертовых пространств $(\mathscr{H}^{'}, \theta^{'})$, для которой $H : (\mathscr{T}, \epsilon) \to (\mathscr{H}^{'}, \theta^{'})$ является строгим симметрическим моноидальным *-функтором согласно (2.51) и (2.53). Обозначим связанную с этим компактную группу через $End_{\times}(H)$.

Предположим, что задан *-функтор $H : \mathscr{T} \to \mathscr{H}$ и выберем определенный набор неприводимых объектов в $\mathscr{T}$, по одному из каждого класса (унитарной эквивалентности), где ι – представитель тривиального класса. Далее, для каждой пары $\tau, \tau^{'}$ неприводимых представителей выберем унитарный оператор $H_{\tau,\tau'} : H(\tau)\otimes H(\tau^{'}) \to H(\tau\tau^{'})$ при условии, что выполнено условие (2.50). При этом (2.51) автоматически удовлетворяется. Выберем для каждого объекта ρ из $\mathscr{T}$ изометрии $W_{\rho,i} \in (\tau_{\rho,i}, \rho)$, где $\sum_i W_{\rho,i}W^*_{\rho,i} = 1_\rho$ и определим

$$\widetilde{H}_{\rho,\sigma} = \sum_{i,j} H(W_{\rho,i} \times W_{\sigma,j}) \circ \widetilde{H}_{\tau_{\rho,i},\tau_{\sigma,j}} \circ H(\widetilde{W}^*_{\rho,i}) \otimes H(\widetilde{W}^*_{\sigma,j}). \tag{2.57}$$

Можно проверить, что определенный таким образом $\widetilde{H}_{\rho,\sigma}$ удовлетворяет условиям (2.50) и (2.51) и в частности, он не зависит от выбора изометрий $W_{\rho,i}$.

Аналогичные соображения приводят к следующему результату.

Лемма 2.26. *Пусть $\mathscr{T}_1$ – полная моноидальная подкатегория категории $\mathscr{T}$ и предположим, что $\widetilde{H}$ удовлетворяет условиям (2.50)-(2.53) на $\mathscr{T}_1$. Тогда существует единственное расширение $\widetilde{H}$ к полной моноидальной подкатегории $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}$, полученной замыканием относительно* *подобъектов и прямых сумм. Тогда функтор $\widetilde{H}$ удовлетворяет условиям (2.50)-(2.53) на $\mathscr{T}_2$.*

Доказательство. Для каждого объекта ρ из $\mathscr{T}_2$ выберем объекты ρ_i из $\mathscr{T}_1$ и частичные изометрии $W_i^\rho \in (\rho_i, \rho)$ с $\sum_i W_i^\rho \circ W_i^{\rho *} = 1_\rho$. Для объекта ι из $\mathscr{T}_2$ условимся обозначать $W^\iota = 1_\iota$. Определим

$$\widetilde{H}_{\rho,\sigma} := \sum_{i,j} H(W_i^\rho \times W_j^\sigma) \circ \widetilde{H}_{\rho_i,\sigma_j} \circ H(\widetilde{W_i^{\rho *}}) \otimes H(\widetilde{W_j^{\sigma *}}).$$

Доказательство следует во-первых, из вычислений, проводимых по проверке соотношения (2.52), и, во-вторых, следующей отсюда независимости $\widetilde{H}_{\rho,\sigma}$ от выбора изометрий W_i^ρ, W_j^σ.

Теперь сформулируем «аргумент компактности», позволяющий упростить задачу путем сведения ее к случаю, когда $\mathscr{T}$ имеет «фундаментальный объект». Пусть F – непустое множество объектов и пусть $\mathscr{T}(F)$ – наименьшая полная моноидальная подкатегория категории $\mathscr{T}$, содержащая F среди своих объектов, причем данная подкатегория замкнута относительно сопряжения, прямых сумм и подобъектов. Если $\mathscr{T} = \mathscr{T}(F)$, то множество F называется фундаментальным. Пусть $\mathscr{J}$ – множество подкатегорий категории $\mathscr{T}$, имеющих форму $\mathscr{T}(F)$ для некоторого конечного множества F, упорядоченного по включению. Тогда, очевидно, $\mathscr{J}$ является индуктивной системой. Поэтому зафиксируем *-функтор $H : \mathscr{T} \to \mathscr{H}$, как было выше, и для каждого $\mathscr{T}' \in \mathscr{J}$ обозначим $\sum(\mathscr{T}')$ множество из $\widetilde{H}$, определенное для каждой пары ρ, σ объектов $\mathscr{T}$, удовлетворяющих (2.50)-(2.53) для подкатегории $\mathscr{T}'$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2.27. *Удовлетворяющий условиям (2.50)-(2.53) $\widetilde{H}$ существует тогда и только тогда, когда $\sum(\mathscr{T}') \neq \emptyset$ для каждого $\mathscr{T}' \in \mathscr{J}$.*

Доказательство. Условия (2.50)-(2.53) показывают, что $\sum(\mathscr{T}')$ рассматривается как подмножество множества $\prod_{\rho,\sigma} \mathscr{U}(H(\rho) \otimes H(\sigma), H(\rho\sigma))$ унитарных операторов $\mathscr{U}(H, K)$ из H в K. Это множество предполагается замкнутым и следовательно, компактным, согласно теореме Тихонова. Поскольку $\mathscr{J}$ как было сказано выше, является индуктивной системой и $\sum(\mathscr{T}')$ является компакнтной, то $\sum(\mathscr{T}') \neq \emptyset$ для любых $\mathscr{T}' \in \mathscr{J}$ влечет, что $\bigcap_{\mathscr{T}'} \sum(\mathscr{T}') \neq \emptyset$. Обратное тривиально.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.28. (а) *Если ρ является специальным объектом категории $(\mathscr{T}, \varepsilon)$, то существует строгий симметрический моноидальный *-функтор F из $(\mathscr{T}_\rho, \varepsilon_\rho)$ в строгую симметрическую моноидальную C^*-категорию гильбертовых пространств $(\mathscr{H}, \theta)$. Функтор F является единственным с точностью до естественного моноидального унитарного преобразования и $\widehat{F} : \mathscr{T}_\rho \to U(End_\otimes(F))$ является изоморфизмом.*

(б) *Каждый элемент из $\mathscr{J}$ имеет форму $\mathscr{T}(\rho)$ для некоторого специального объекта ρ.*

Доказательство. Пусть $(\mathscr{H}, \theta)$ симметрическая моноидальная C^*-категория конечноразмерных гильбертовых пространств в $\mathscr{O}_{d(\rho)}$. Определим $F(n) = H^n$, где H является каноническим гильбертовым пространством в $\mathscr{O}_{d(\rho)}$ и для $T \in (\rho^r, \rho^s)$ определим $F(T) = \pi i(T) \in (H^r, H^s)$, где $\pi : \mathscr{O}_\rho \to \mathscr{O}_{d(\rho)}$ есть мономорфизм (который существует согласно теореме 2.14). Непосредственно проверяется, что F – строгий моноидальный *-функтор, являющийся симметрическим, так как

$$F(\varepsilon(\rho^r, \rho^s)) = \pi(\varepsilon(r, s)) = \theta(r, s) = \theta(H^\rho, H^s).$$

Пусть $E : (\mathscr{T}_\rho, \varepsilon_\rho) \to (\mathscr{H}, \theta)$ – другой какой-нибудь строгий симметрический моноидальный *-функтор, и тогда, согласно теореме 2.20, существует индуцированный морфизм $E_* : \mathscr{O}_\rho \to \mathscr{O}_{E(1)}$. Теперь $\mathscr{O}_{E(1)}$ есть просто алгебра Кунца с каноническим гильбертовым пространством $K := i(\mathbb{C}, E(1))$. Теперь сравним E_* с π. Пусть $\zeta : \mathscr{O}_d \to \mathscr{O}_{E(1)}$ – изоморфизм с $\zeta(H) = K$. Тогда $\zeta(\theta(p)) = E_*(\varepsilon(p)), p \in \mathbb{P}_\infty$, поскольку функтор E симметричен. Если $R \in (\iota, \widehat{\rho}^d)$ и $RR^* = d!^{-1} \sum_{p \in \mathbb{P}_d} sign(p)\varepsilon(p), d = d(\rho)$, то $\zeta\pi(R) = E_*(R)$. Поэтому существует единственный мономорфизм $\mu : \mathscr{O}_{SU(d)} \to \mathscr{O}_\rho$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{O}_\rho & \xrightarrow{E_*} & \mathscr{O}_{E(1)} \\
\mu \Big\uparrow & & \Big\uparrow \zeta \\
\mathscr{O}_{SU(d)} & \longrightarrow & \mathscr{O}_d
\end{array}$$

Здесь $\pi \circ \mu$ есть вложение $\mathscr{O}_{SU(d)}$ в $\mathscr{O}_d$. Более того,

$$\zeta(\psi)E_*(A) = E_*(\widehat{\rho}(A))\zeta(\psi), \psi \in H, A \in \mathscr{O}_\rho. \tag{2.58}$$

Следовательно, благодаря универсальности скрещенного произведения, получаем эпиморфизм $\eta : \mathscr{B} := \mathscr{O}_p \otimes_\mu \mathscr{O}_d \to \mathscr{O}_{E(1)}$ с $\eta(A \otimes C) = E_*(A)\zeta(C)$. Поскольку $E_*(\varepsilon(p)) = \zeta(\theta(p)), p \in \mathbb{P}_\infty$, то $E_*(\mathscr{O}_\rho)' \bigcap \mathscr{O}_{E(1)} = \mathbb{C}I$ и поэтому сужение η к центру $\mathscr{L}$ алгебры $\mathscr{B}$ имеет вид $\Phi(\cdot)I$, где $\Phi \in \sigma(\mathscr{L})$ спектр $\mathscr{L}$. Таким образом (в соответствии с обозначениями из доказательства теоремы 2.14), η факторизуется как $\eta_\Phi : \mathscr{B} \to \mathscr{B}_\Phi$ давая изоморфизм $\widetilde{\eta} : \mathscr{B}_\Phi \to \mathscr{O}_{E(1)}$. Поскольку образ $\mathscr{O}_\rho$ в $\mathscr{B}_\Phi$ есть поточечно фиксированная алгебра относительно действия компактной группы G_Φ, то $E_*(\mathscr{O}_\rho)$ есть поточечно фиксированная алгебра для $\mathscr{O}_{E(1)}$ относительно действия компактной группы автоморфизмов. Применяя теорему 4.7 из работы [5], можно показать, что существует $h \in SU(d)$ и изоморфизм $\zeta : \mathscr{O}_d \to \mathscr{O}_{E(1)}$ такой, что $\xi \circ \alpha_h = \zeta$ и $\xi \circ \pi = E_*$. Определим унитарный оператор $u : H \to K$ с помощью соотношения $u\psi := \xi(\psi), \xi \in H$. Тогда

$$u^{\times r}\psi_{j_1}\psi_{j_2}\ldots\psi_{j_r} = \xi(\psi_{j_1})\xi(\psi_{j_2})\ldots\xi(\psi_{j_r}) = \xi(\psi_{j_1}\psi_{j_2}\psi_{j_r}).$$

Тогда если $T \in (\rho^r, \rho^s)$, то благодаря соотношению $\xi \circ \pi = E_*$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^\rho & \xrightarrow{u^{\times r}} & K^r \\ {\scriptstyle \pi i(T)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle E_* i(T)} \\ H^s & \xrightarrow[u^{\times s}]{} & K^s \end{array}$$

Соотношение $\upsilon i(X) := X1$ для $X \in (\mathbb{C}, E(1))$ определяет унитарное отображение $\upsilon : K \to E(1)$. Поскольку $E_*i(T) = i(E(T))$ по определению, то получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K^\rho & \xrightarrow{u^{\times r}} & E(r) \\ {\scriptstyle E_* i(T)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle E(T)} \\ K^s & \xrightarrow[u^{\times s}]{} & E(s) \end{array}$$

Определяя $w_r := \upsilon^{\times r} \circ u^{\times r} : F(r) \to E(r)$ и помня, что $F(T) = \pi i(T)$, видим, что w представляет собой естественное моноидальное унитарное преобразование из F в E.

Пусть $u \in End_{\otimes}(F)$, тогда $u_n = \upsilon^{\otimes n}$, где $\upsilon := u_1$ является унитарным оператором на H и

$$F(T)\upsilon^{\otimes r} = \upsilon^{\otimes s}F(T), T \in (\rho^r, \rho^s).$$

Существует также единственный автоморфизм α_υ из $\mathscr{O}_d$ с $\alpha_\upsilon(\psi) = \upsilon\psi, \psi \in H$. Если $X \in (H^r, H^s)$, то тогда $\alpha_\upsilon(X) = \upsilon^{\otimes s}X\upsilon^{\otimes r*}$. Таким образом, $\alpha_\upsilon(\pi i(T)) = \pi i(T)$ для любых $T \in (\rho^r, \rho^s), r, s \in \mathbb{N}_0$. Однако данные элементы порождают алгебру $\pi(\mathscr{O}_\rho)$ и согласно теореме 2.14, $\pi(\mathscr{O}_\rho) = \mathscr{O}_G$, так что α_υ оставляет $\mathscr{O}_G$ поточечно фиксированной. Следовательно, согласно работе [5], $\alpha_\upsilon \in \alpha_G$. Обратно, если $g \in G$, то полагая, что u_n есть сужение α_g на H^n, определяем элемент u из $End_{\otimes}(F)$. Следовательно, $u \to \alpha_{u(1)}$ определяет изоморфизм между $End_{\otimes}(F)$ и G. Тогда согласно лемме 2.13 имеем, что $i(\rho^r, \rho^s) = (\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s)$ и согласно формуле (2.8) получаем, $\pi(\widehat{\rho}^r, \widehat{\rho}^s) = (H^r, H^s)_G$. Таким образом, $F(\rho^r, \rho^s) = (H^r, H^s)_G$ и $\widehat{F}$ есть изоморфизм строгих моноидальных C^*-категорий. Это завершает доказательство части a) леммы 2.28.

Прежде чем перейти ко второй части леммы, без доказательства приведем следующую теорему, которая является одной из центральных теорем теории моноидальных симметрических C^*-категорий.

Теорема 2.29. *Строго симметрическая моноидальная C^*-категория имеющая прямые суммы, подъобекты и сопряжения, является специально направленной.*

Доказательство. Специальная направленность зависит от таких понятий, как прямые суммы, подобъекты и сопряжения. Понятие о сопряжении было приведено выше, поэтому ограничимся пояснением понятий прямых сумм и подобъектов. Если $T \in (\rho, \sigma)$ - морфизм категории, то категория имеет подобъекты, если для каждого самосопряженного $E \in (\rho, \rho)$ можно найти такой $V \in (\sigma, \rho)$, что $VV^* = E$, $V^*V = (\rho, \sigma) \circ (\sigma, \rho) = 1_\sigma$, то есть $V^*V \in (\sigma, \sigma)$. Что касается прямых сумм, то по определению, категория имеет конечные прямые суммы, если для ее произвольных объектов ρ, σ можно найти такие изометрии $V \in (\rho, \tau)$, $W \in (\sigma, \tau)$, что $VV^* + WW^* = 1_\tau$. В самом деле, из $V \in (\rho, \tau)$ следует, что $V\rho(A) = \tau(A)V$, а из $W \in (\sigma, \tau)$ следует, что $W\sigma(A) = \tau(A)W$. Поэтому

$$V\rho(A)V^* + W\sigma(A)W^* = \tau(A)VV^* + \tau(A)WW^* =$$

$$= \tau(A)(VV^* + WW^*) = \tau(A)1_\tau = \tau(A).$$

Это означает, что $VV^* \in (\tau, \tau)$ является проектором, то есть $VV^* = E_1$, $WW^* = E_2$ и $E_1\tau(A) + E_2\tau(A) = \tau(A)$ $(E_1 + E_2 = 1_\tau)$. Отсюда следует, что $E_1\tau(A)$ и $E_2\tau(A)$ являются подобъектами объекта τ.

Пусть $D = \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ представляет собой конечное множество объектов $\mathscr{T}$. Тогда, согласно сформулированной теореме $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_n \oplus \overline{\rho_n} \oplus \cdots \oplus \overline{\rho_2} \oplus \overline{\rho_1}$ является специальным объектом, доминирующим над $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ и ρ является объектом $\mathscr{T}(D)$. Таким образом, $\mathscr{T}(D) = \mathscr{T}(\rho)$, которое завершает доказательство леммы.

Для доказательства единственности компактной группы в теореме 2.22 необходимо показать, что функтор $H : (\mathscr{T}, \varepsilon) \to (\mathscr{H}, \theta)$ является единственным с точностью до моноидальной естественной унитарной эквивалентности. Ввиду нетривиальности этого доказательства, мы его здесь опускаем.

2.3 Локальная квантовая теория

Теория симметричесих тензорных C^*-категорий находит широкое применение при анализе суперотборной структуры алгебры наблюдаемых в рамках локальной квантовой теории поля. Целью настоящего пункта является краткое изложение основных понятий алгебраической квантовой теории поля (или, по-другому, локальной квантовой физики) и теории суперотборных секторов с помощью аппарата тензорных категорий.

В квантовой механике наблюдаемые задаются как ограниченные операторы в фиксированном гильбертовом пространстве. В квантовой теории поля можно выбрать гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, называемое *вакуумным сектором.* Основной постулат алгебраической квантовой теории гласит, что существует множество *(квази)локальных наблюдаемых*, которое получается с помощью отображения из областей пространства-времени к

$*$-подалгебре операторов

$$\mathcal{O} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset B(\mathcal{H}_0). \tag{2.59}$$

Самосопряженные элементы такой подалгебры соответствуют наблюдаемым величинам, которые могут быть измерены в области пространства-времени $\mathcal{O}$. Это фундаментальное отображение должно удовлетворять основным постулатам (аксиомам). Например, для таких отображений нужно потребовать выполнения аксиомы *локальной коммутативности*, т.е. измерения двух наблюдаемых, разделенных пространственно-подобным интервалом, не должны возмущать друг-друга. Это выражается с помощью следующего условия:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)', \qquad\qquad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \tag{2.60}$$

где штрих в случае алгебры означает коммутант (множество всех ограниченных операторов, коммутирующих со всеми операторами некоторого множества), а в случае областей пространства-времени – пространственно-подобную разделенность. Также такое отображение должно удовлетворять аксиоме изотонии, т.е. имеем отображение, сохраняющее вложение областей:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2), \quad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2.$$

В качестве таких областей удобно выбрать множество так называемых двойных конусов $\mathcal{K}$ - пересечений открытых конусов прошлого и будущего. Любая подалгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ тогда включена в пересечение коммутантов всех $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_n)$, где $\mathcal{O}_n$ пробегает множество всех двойных конусов, пространственно-подобных к $\mathcal{O}$.

Это есть так называемый принцип локальности, а его усиленной формой является понятие *дуальности*, которая требует вдобавок, чтобы любая алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ была максимальной:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(\mathcal{O}')', \tag{2.61}$$

где $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ означает замкнутую по норме *-подалгебру, порожденную всеми локальными алгебрами, ассоциированными с различными двойными конусами, которые разделены пространственно подобным интервалом из $\mathcal{O}$, т.е. которые вложены в $\mathcal{O}'$.

Более слабая форма дуальности однако требует, чтобы дуальная сеть определялась лишь с помощью следующих требований:

$$\mathfrak{A}^d(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(\mathcal{O}')',$$

$$\mathfrak{A}^{dd}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}^d(\mathcal{O}),$$

где последнее выражение соответствует также локальной сети.

Если теория описывается с помощью вайтмановских полей, то как можно легко доказать, слабая форма дуальности очевидно выполняется; ослабленная форма дуальности указывает на наличие спонтанно нарушенной глобальной калибровочной симметрии, которую можно описать с помощью группы всех автоморфизмов, оставляющих алгебру $\mathfrak{A}$ поточечно фиксированной. В полевой алгебре, куда $\mathfrak{A}$ вкладывается как подалгебра, при этом ненарушенная калибровочная симметрия описывается с помощью подгруппы, оставляющей вакуумное состояние инвариантным.

Физически основной характеристикой вакуумного сектора является наличие *вакуумного состояния* ω_0, которое индуцируется единичным вектором Ω_0 в $\mathcal{H}_0$; при этом одним из характеристических свойств является *стабильность*: общий спектр оператора энергии-импульса на $\mathcal{H}_0$ должен принадлежать верхнему световому конусу и при этом вакууму соответствует нулевое собственное значение, его энергия минимальна. Операторы энергии-импульса – суть генераторы унитарных и непрерывных представлений группы трансляций и которые действуя на квазилокальные наблюдаемые, определяют свойство ковариантности. Такое действие может быть сужением группы Пуанкаре, если теория является Лоренц-инвариантной. Во всех случаях группа геометрически действует на набор $\mathcal{K}$ областей и ковариантность определяется действием группы автоморфизмов квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$.

Единичные векторы в $\mathcal{H}_0$ порождают чистые состояния, которые принадлежат одному и тому же суперотборному сектору, называемому вакуумным суперотборным сектором. Среди таких векторов есть основное векторное состояние ω_0, порожденное единичным вектором Ω_0 и которое обычно называют *вакуумным состоянием* (соответственно вакуумным вектором (состояния)).

В общем случае имеем множество других чистых состояний, которые появляются благодаря ГНС-конструкции как векторные состояния других неэквивалентных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{A}$. Для описания суперотборных секторов необходимо рассматривать представления, описывающие в точном математическом смысле *элементарные вакуумные возбуждения.*

С помощью такого критерия отбираются определенные представления и, как правило, изучается их неприводимость, эквивалентность, сплетающие операторы и прочие свойства. Унитарно эквивалентные классы неприводимых представлений определяют *суперотборные секторы.* Набор таких классов образует категорию, объектами которой являются представления алгебры $\mathfrak{A}$, удовлетворяющие критерию суперотбора, а морфизмами - сплетающие операторы этих представлений.

Критерий суперотбора позволяет изучать заряды, локализованные, например, в ограниченных областях пространства-времени. Математически точная формулировка этого критерия выглядит следующим образом: представления π алгебры $\mathfrak{A}$, описывающие элементарные возбуждения вакуума, при сужении к $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ (для любого двойного конуса $\mathcal{O}$) унитарно эквивалентны к сужению к $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ вакуумного представления.

Это означает, что любое такое представление имеет среди всех векторных состояний состояния, которые являются строго локализованными. Состояние ω называется строго локализованным в некотором двойном конусе $\mathcal{O}$, если ожидаемое значение в ω локальной наблюдаемой, измеряемой в пространственноподобном дополнении алгебры $\mathcal{O}$, совпадает с вакуумным ожиданием. Однако можно заметить, что электрический заряд не может быть локализован в этом смысле в силу теоремы Гаусса. Если унитарный оператор U осуществляет эквивалентность представления π с вакуумным представлением при их сужении к $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ для выбранного двойного конуса $\mathcal{O}$, можем реализовать представление π в том же гильбертовом пространстве вакуумного представления (где обратное отображение осуществляется с помощью оператора U^{-1}. Представление ρ получаем как обратное отображение на $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$:

$$\rho(A) = A, \quad A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}') \tag{2.62}$$

и постулат дуальности сводится к отображению алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ в себя; если $\mathcal{O}$ заменить более большим двойным конусом, то $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ заменятся на меньшую алгебру, следовательно, ρ есть *эндоморфизм* алгебры $\mathfrak{A}$.

Поскольку выбор $\mathcal{O}$ произволен с точностью до унитарной эквивалентности, локализованные морфизмы являются эндоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$ и которые с точностью до унитарной эквивалентности могут быть локализованы в некотором двойном конусе.

Унитарную эквивалентность можно изучить рассматривая сплетающие операторы $T \in (\pi, \pi')$ т.е. $T\pi(A) = \pi'(A)T, A \in \mathfrak{A}$. Из дуальности следует, что сплетающие операторы между двумя локализованными морфизмами должны быть локальными наблюдаемыми и, в частности, они должны принадлежать алгебре $\mathfrak{A}$. Следовательно, морфизмы действуют на свои сплетающие операторы.

В общем, если $\mathfrak{A}$ есть C^*-алгебра с единицей I, центр которой составляют операторы, кратные единице I, то можно рассматривать категорию $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$, объектами которой служат унитальные эндоморфизмы, а морфизмами между объектами являются сплетающие операторы в $\mathfrak{A}$.

Произведение объектов при этом можно определить как композицию морфизмов, а композицию сплетающих операторов (например $R \in (\rho, \rho')$ и $S \in (\sigma, \sigma')$) как

$$R \times S \equiv R\rho(S) \in (\rho\sigma, \rho'\sigma'). \tag{2.63}$$

Тогда $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$ становится *строгой ассоциативной C^*-тензорной категорией.*

Категория, описывающая суперотборную структуру, при этом оказывается полной тензорной подкатегорией категории $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$, объектами которой являются *транспортабельные локализованные эндоморфизмы*, областью локализации которых являются двойные конуса.

Свойство транспортабельности имеет два аспекта. С одной стороны, это своего рода слабая замена трансляционной ковариантности: унитарно эквивалентные классы представлений не меняются при изменении области локализации представителей с помощью пространственно-временных трансляций. С другой стороны, требований на минимальность размера области локализации суперотборного заряда никаких нет. Но в принципе для анализа суперотборной структуры более важным является лишь первое условие.

Подпредставление ρ соответствует самосопряженному проектору E в (ρ, ρ) и, благодаря свойству B, существует локальная изометрия W такая, что $E = WW^*$ и композиция Ad W^* с ρ задает соответствующий подобъект эндоморфизма ρ в данной категории; аналогично можно использовать локальные изометрии, суммируемые к I для конструирования конечных прямых сумм объектов. Данная рассматриваемая категория удовлетворяет этим условиям и имеет как подобъекты так и прямые суммы. Конечномерные объекты формируют полную тензорную подкатегорию, объектами которой являются конечные прямые суммы неприводимых объектов.

Эту подкатегорию будем называть *суперотборной категорией* и обозначим как $\mathcal{T}$. Она является строгой симметрической тензорной C^*-категорией с неприводимой тензорной единицей. Любому объекту этой категории можно сопоставить сопряженный объект и его произведение с самим объектом содержит тензорную единицу (тождественный морфизм): $\rho \otimes \bar{\rho} = \iota \oplus \dots$.

Структура суперотборной категории соответствует структуре категории Rep G конечномерных непрерывных унитарных представлений компактной группы G, морфизмами которой являются сплетающие линейные операторы с обычным тензорным умножением и перестановочной симметрией. Сопряженными объектами при этом являются комплексно сопряженные представления. Другими словами, Rep G является симметрической тензорной подкатегорией категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ конечномерных комплексных векторных пространств.

В то же время $\mathcal{T}$ априори не задана как симметрическая тензорная подкатегория категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$: здесь отсутствует априори заданный симметрический тензорный функтор $\mathcal{F}$ из $\mathcal{T}$ на $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$. Важность F заключается в том, что если он существует, то из классических теорем Таннаки и Крейна следует, что упомянутая аналогия описывается функтором $\mathcal{F}$ для компактной группы G.

В §2.2 было показано, что для любой строгой симметрической тензорной категории с неприводимой тензорной единицей, например, для $\mathcal{T}$, существует единственная компактная группа G и верные симметрические тензорные функторы F из $\mathcal{T}$ на $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ и из $\mathcal{T}$ на эквивалентную подкатегорию категории $\mathrm{Rep}\, G$, и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \\ & \mathrm{Rep}\, G \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

где f – забывающий функтор.

Доказательство основано на том, что $\mathcal{T}$ является полной тензорной подкатегорией категории $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ является унитальной C^*-алгеброй, центр которой составляют операторы, кратные единице. В этом случае G выступает в качестве дуального действия, т.е. дуальна к действию $\mathcal{T}$ на $\mathfrak{A}$, т.е. скрещенного произведения $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathcal{T}$. Более точно, G есть множество всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{B}$, оставляющих алгебру $\mathfrak{A}$ поточечно фиксированной.

Скрещенное произведение содержит $\mathfrak{A}$ как подалгебру с тривиальным коммутантом и, как следствие, для любого эндоморфизма ρ алгебры $\mathfrak{A}$, подпространство всех сплетающих операторов в $\mathfrak{B}$ между действиями на $\mathfrak{A}$ тождественного отображения и эндоморфизмов ρ образует гильбертово пространство $\mathfrak{B}$, которое естественным образом определяет тензорный функтор $\mathcal{G}$ из категории $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$ на категорию гильбертовых пространств в $\mathfrak{B}$ (где морфизмы - непрерывные линейные операторы). Тензорное произведение двух гильбертовых пространств в $\mathfrak{B}$ задается операторным умножением в $\mathfrak{B}$. *Конечномерные гильбертовы пространства в* $\mathfrak{B}$ *с тривиальным левым аннигилятором* (т.е. с носителем I) формируют *симметриче-*

скую тензорную C^* категорию $\mathcal{H}(\mathfrak{B})$, симметрия в которой определяется флип-операторами тензорного произведения.

Сформулируем условия, которые определяют единственное скрещенное произведение:

1) $\mathfrak{A}$ унитально вложена в $\mathfrak{B}$ с тривиальным относительным коммутантом;

2) сужение $\mathcal{G}_0$ фуктора $\mathcal{G}$ к категории $\mathcal{T}$ есть верный симметрический тензорный функтор в $\mathcal{H}(\mathfrak{B})$;

3) объекты в образе $\mathcal{G}_0$ порождают C^*-алгебру $\mathfrak{B}$.

Определяя G как множество всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{B}$, оставляющее $\mathfrak{A}$ поточечно фиксированной, видим, что его элементы должны оставлять также каждый объект в образе функтора $\mathcal{G}_0$ стабильным, и следовательно, порождать на каждом таком объекте (конечномерное гильбертово пространство, порождающее локализованный эндоморфизм на $\mathfrak{A}$) конечномерное унитарное представление. Благодаря условию 3 сильная топология на G совпадает с топологией Тихонова, которая определяет эти представления и, следовательно, превращает G в компактную группу. Композируя $\mathcal{G}_0$ с отображением его образа к представлениям G получаем необходимый функтор $\mathcal{F}$.

Как уже было упомянуто, основные свойства категории $\mathcal{T}$ (эта категория является строгой симметрической тензорной C*-категорией с неприводимой тензорной единицей) являются следствием аксиомы локальности.

Тензорная структура унаследована из $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$, неприводимость тензорной единицы следует из тривиальности центра $\mathfrak{A}$.

Симметрия возникает из того, что локальность для $\mathfrak{A}$ распространяется на категории транспортабельных локализованных морфизмов: если локализованные морфизмы ρ, σ локализованы во взаимно пространственноподобных двойных конусах, то они коммутируют:

$$\rho\sigma = \sigma\rho;$$

боле того,

$$T \times S = S \times T$$

если морфизмы, соответствующие началам стрелок T и S попарно пространственноподобны, то то же самое верно и для морфизмов, соответствующих концам этих стрелок.

Если любые два морфизма (стрелки между объектами) T, S композировать с подходящими унитарными сплетающими операторами между рассматриваемыми пространственноподобными эндоморфизмами, то они тоже станут пространственноподобными. Если

$$\epsilon(\rho, \sigma) \in (\rho\sigma, \sigma\rho),$$

то

$$\epsilon(\rho, \sigma) \circ T \times S = S \times T \circ \epsilon(\rho, \sigma),$$

что с учетом согласованности с тензорным умножением

$$\epsilon(\rho, \sigma) = \epsilon(\sigma, \rho)^{-1}$$

определяет требуемые свойства симметрии.

Из этих свойств имеем, что

$$\epsilon_\rho^{(n)}(j, j+1) = I_{\rho^{j-1}} \times \epsilon(\rho, \rho)$$

определяет унитарное представление группы перестановок из n элементов и для каждого $n > j$, это представление имеет значение во множестве самосплетающих операторов ρ^n.

Важность этих свойств с физической точки зрения можно увидеть, если ассоциировать с каждым локализованным морфизмом локализованное состояние, которое получается композицией локализованного морфизма с вакуумным состоянием.

Локальная коммутативность морфизмов показывает, что произведение морфизмов транслируется с помощью отображения к коммутативному произведению попарно пространственноподобных строго локализованных состояний:

$$\omega_1 \times \omega_2 \times \cdots \times \omega_n \equiv \omega_0 \circ \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n, \tag{2.64}$$

если $\omega_j = \omega_0 \circ \rho_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Такое произведение имеет смысл композиции состояний.

Пара объектов сопряжена между собой, если композиция их зарядов среди возможных каналов содержит также и вакуумный сектор.

Если все морфизмы эквивалентны заданному морфизму ρ в вышеприведенном соотношении для композиции состояний и U_j − локальный унитарный сплетающий оператор в $\mathfrak{A}$, то произведение $\rho_1\rho_2\ldots\rho_n$ эквивалентно ρ^n и

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \in (\rho^n, \rho_1\rho_2\ldots\rho_n).$$

Очевидно, что состояния ω_j являются векторными состояниями в представлении ρ, порождаемыми векторами состояний

$$\Psi_j = U_j^*\Omega_0,$$

и можно определить вектор $\Psi_1\times\Psi_2\times\cdots\times\Psi_n$, который порождает состояние $\omega_1 \times \omega_2 \times \cdots \times \omega_n$ в представлении ρ^n посредством:

$$\Psi_1 \times \Psi_2 \times \cdots \times \Psi_n \equiv (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n)^*\Omega_0.$$

Если изменить порядок $(1, 2, \ldots, n)$ с помощью перестановки p, то произведение состояний не изменится, ибо произведение векторов состояний сводится при этом к выражению

$$\begin{aligned} &\Psi_{p^{-1}(1)} \times \Psi_{p^{-1}(2)} \times \cdots \times \Psi_{p^{-1}(n)} = \\ &= (U_{p^{-1}(1)} \times U_{p^{-1}(2)} \times \cdots \times U_{p^{-1}(n)})^*(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n)\Psi_1 \times \Psi_2 \times \cdots \times \Psi_n \\ &= \epsilon_\rho^{(n)}(p)\Psi_1 \times \Psi_2 \times \cdots \times \Psi_n, \end{aligned}$$

где $\epsilon_\rho^{(n)}(p)$ представление группы перестановок канонически ассоциированное с ρ, со значениями в коммутанте ρ^n.

Если от ρ перейти к другому локализованному морфизму ρ' с помощью оператора унитарной эквивалентности, например, с помощью U из (ρ, ρ'), $\epsilon_\rho^{(n)}$ изменится к $\epsilon_{\rho'}^{(n)}$ благодаря унитарной эквивалентности, осуществляемой произведением $U \times U \times \cdots \times U$; совокупность унитарно эквивалентных классов представлений $\epsilon_\rho^{(n)}$, $n = 2, 3, \ldots$, зависит только от унитарно эквивалентных классов на ρ (*суперотборный сектор*), если ρ неприводим.

Эта совокупность представляет *статистику* суперотборного сектора. Статистика суперотборного сектора единственным образом характеризуется *статистическим параметром*, который принимает значения $\pm 1/d$, где d целое положительное число. Это число d определяет *порядок парастатистики*, а знаки $+$ и $-$ соответствуют обычным *Бозе и Ферми* статистикам соответственно.

Пусть $\mathcal{H}$ фиксированное гильбертово пространство размерности d и пусть $\theta_n^{(d)}$ – представление группы перестановок из n объектов, которое действует на n-ю тензорную степень гильбертовых пространств $\mathcal{H}$, переставляя факторы. Если задан суперотборный сектор и его статистический параметр λ есть $+1/d$, тогда при любом n $\epsilon_\rho^{(n)}$ унитарно эквивалентно сумме бесконечного числа копий θ_n^d; если λ имеет значение $-1/d$, то же самое справедливо лишь с учетом знака перестановки.

Более того, $d(\rho) = 1$, если ρ – автоморфизм; факторизация группы всех *локализованных автоморфизмов* по нормальной подгруппе внутренних автоморфизмов является коммутативной группой, снабженной дискретной топологией. В случае отсутствия парастатистик проблема дуальности решается с помощью классических теорем. Более того, если суперотборная группа имет независимые генераторы, то получаем скрещенное произведение с помощью действия этой группы.

Обращение локализованного автоморфизма приводит к понятию сопряжения. Физический смысл сопряжения становится более ясным, если рассмотреть локальные унитарные операторы U_n, сплетающие ρ, тогда области локализации двойных конусов при $n \to \infty$ принадлежат причиному дополнению некоторого двойного конуса.

Существование сопряжения на языке теории категорий называется «строгостью» и этот термин относится специальным свойствам сопряжения в тензорных категориях конечномерных унитарных представлений групп. Тензорное произведение представления на $\mathcal{H}$ с его комплексным сопряжением, действующим в сопряженном гильбертовом пространстве $\bar{\mathcal{H}}$ всегда содержит тождественное представление в одномерном гильбертовом пространстве комплексных чисел. Сплетающие операторы определяются как отображения, меняющие числа λ от λ до $\lambda\cdot\sum_{j=1}^{d} e_j\otimes\bar{e}_j$ или до $\lambda\cdot\sum_{j=1}^{d} \bar{e}_j\otimes e_j$, для любого ортонормированного базиса в d-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Эти сплетающие операторы связаны друг с другом с помощью флип-оператора, определяющего стандартную симметрию в категории.

Флип-оператор, осуществляющий симметрию функториально, также будет соответствовать осуществляющему симметрию флип-оператору и конструкции скрещенного произведения. Этот оператор производит флип-переходы тензорных степеней в произведениях двух гильбертовых пространств в $\mathfrak{B}$. Если ψ и ψ' – элементы алгебры $\mathfrak{B}$, которые соответственно порождают в $\mathfrak{A}$ два *неприводимыех* пространственноподобно разделенных морфизма ρ, ρ', то имеем

$$\psi\psi' = \theta\psi'\psi = \pm\epsilon(\rho,\rho')\psi'\psi = \pm\psi'\psi,$$

где знак минус появляется в случае, если оба морфизма относятся параферми статистике, а плюс - в противном случае. Композируя вакуумное состояние в $\mathfrak{A}$ с G - инвариантным условным ожиданием отображения алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, заданным с помощью интегрирования действия группы G, расширяем его до *вакуумного состояния* алгебры $\mathfrak{B}$, которое является чистым G инвариантным состоянием. Ассоциируемое ГНС-представление должно быть вакуумным представлением алгебры $\mathfrak{B}$.

Определим локальные полевые алгебры, сопоставляющие каждому двойному конусу $\mathcal{O}$ алгебру фон Неймана $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$, порождаемые гильбертовыми пространствами алгебры $\mathfrak{B}$ (которые порождают в $\mathfrak{A}$ морфизм, локализованный в данном двойном конусе). Полевая квазилокальная С*-алгебра $\mathfrak{F}$ является неприводимой, но при сужении ее к подалгебре наблюдаемых $\mathfrak{A}$ получаем приводимое представление, которое является прямой суммой неприводимых объектов категории $\mathcal{T}$.

Если условие дуальности выполнено в вакуумном представлении, то теория будет справедливой также и в так называемой дуальной сети $\mathcal{O}\mapsto \mathfrak{A}^d(\mathcal{O})$. Представления данной сети, удовлетворяющие критерию отбора, могут быть сужены также и к дуальной сети с теми же сплетающими операторами. Соответственно получаем тогда вложения

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^d \subset \mathfrak{F}.$$

. Компактная группа G всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{F}$ также оставляет $\mathfrak{A}^d$ поточечно фиксированной.

В то же время можно заметить, что расширение этой теории к теориям с безмассовыми частицами остается еще открытой проблемой (например, квантовая электродинамика). Электрически заряженные состояния не удовлетворяют критерию отбора благодаря закону Гаусса. Подходящие семейства представлений, описывающие суперотборные сектора должны иметь лишь асимптотические локализационные свойства. В таких условиях теория может быть описана с помощью тензорной категории локализованных эндоморфизмов алгебры квазилокальных наблюдаемых. Еще стоит заметить, что эта категория является асимптотически абелевой категорией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ruzzi, G. Homotopy of posets, net-cohomology and superselection sectors in globally hyperbolic space-times / G. Ruzzi // Reviews in Mathematical Physics. – 2005. – Vol. 17, Is. 9. – Pp. 1021–1070.

2. Doplicher, S. Duals of compact Lie groups realized in the Cuntz algebras and their actions on C^*-algebras / S. Doplicher, J. E. Roberts // Journal of Functional Analysis. – 1987. – Vol. 74, Is. 1. – Pp. 96–120.

3. Маклейн, С. Категории для работающего математика / С. Маклейн. – Москва : Физматлит, 2004. – 350 с.

4. Doplicher, S. A new duality theory for compact groups / S. Doplicher, J. E. Roberts // Inventiones mathematicae. – 1989. – Vol. 98, Is. 1. – Pp. 57–218.

5. Doplicher, S. Endomorphisms of C^*-algebras, cross products, and duality for compact groups / S. Doplicher, J. E. Roberts // Annals of Mathematics. – 1989. – Vol. 130, Is. 1. – Pp. 75–119.

6. Abe, M. Recursive Fermion System in Cuntz Algebra. I / M. Abe, K. Kawamura // Communications in Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 228, Is. 1. – Pp. 85–101.

Учебное издание

Ситдиков Айрат Салимович

ТЕНЗОРНЫЕ *C-КАТЕГОРИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

Учебное пособие

Кафедра высшей математики КГЭУ

Подписано в печать 11.12.2020.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 3,94. Заказ № 292/эл.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ
420066, г. Казань, ул. Красносельская, 51