АННОТАЦИЯ
учебной дисциплины Б1.В.03 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
по образовательной программе направления подготовки
01.06.01 Математика и механика,
направленность «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»,
квалификация (степень) выпускника: исследователь, преподаватель-исследователь

Цель дисциплины – формирование знаний, умений и навыков в области математических дисциплин, включая знания, умения, навыки и социально-личностные качества, обеспечивающие успешность научно-педагогической деятельности, воспитание высокой математической культуры.

Задачи дисциплины – изучение основных принципов и методов теории вещественного, комплексного и функционального анализа; формирование умений в области применения основных методов теории вещественного, комплексного и функционального анализа при решении проблем математического анализа; получение практических навыков работы с методами теории вещественного, комплексного и функционального анализа.

Объем дисциплины: в 5 зачетных единицах и 180 часах;

Семестр: 7, 8.

Краткое содержание дисциплины:

Раздел 1. Теория функций действительного переменного

Меры измеримых функций, интеграл. Аддитивность функций множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые продолжения мер. Теорема Фубини.

Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченной вариацией. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стилтьеса.

Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. Пространства L_p, их полнота. Полные и замкнутые системы функций.

Ортонормированные системы в L_2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам. Теорема Мерсера о стремлении к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стилтьеса.

Раздел 2. Теория функций комплексного переменного

Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки. Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Приближение аналитических функций многочленами.

Целые и мероморфные функции. Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Лефлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Свойства конформных отображений. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. Аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные свойства функций. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара. Гармонические функции, их связь с аналитическими.

Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Раздел 3. Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Отделимость выпуклых множеств. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха—Штейнгауза о равномерной ограниченности последовательностей линейных ограниченных операторов, теорема об открытом отображении. Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Критерии компактности множеств в пространствах C[a,b] и L_p[a,b].

Линейные топологические пространства. Полунормы и локальная выпуклость. Метризация линейного топологического пространства. Слабые топологии. Компактные выпуклые множества. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

Дифференциальное исчисление в линейных пространствах. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста: их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

Аудиторный курс включает в себя лекции и практические занятия.
Формы промежуточной аттестации – зачет и экзамен.