

## АННОТАЦИЯ

учебной дисциплины Б1.В.04 «Алгебра операторов и  $C^*$ -алгебра»  
по образовательной программе направления подготовки  
01.06.01 Математика и механика,  
направленность «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»  
Квалификация (степень) выпускника: исследователь, преподаватель-  
исследователь

Цель дисциплины – формирование знаний, умений и навыков в области теории операторных алгебр, включая и социально-личностные качества, обеспечивающие успешность научной и педагогической деятельности, воспитание достаточно высокой математической культуры, являющейся основой для становления научно-педагогических кадров высшей квалификации для науки, образования и промышленности.

Задачи дисциплины – Углубленное изучение основных принципов и методов теории операторных алгебр, формирование умений в области применения теории  $C^*$ -алгебр к решению проблем математической физики и квантовой теории поля. Получение практических навыков работы с алгебрами операторов на бесконечномерном пространстве. Формирование навыков самостоятельной научно-исследовательской и педагогической деятельности, совершенствование математического образования, в том числе ориентированного на профессиональную деятельность.

**Объем дисциплины:** в 3 зачетных единицах и 108 часах;

**Семестр:** 4

Краткое содержание дисциплины:

### **Раздел 1. Элементарная спектральная теория**

Банаховы алгебры. Спектр и спектральный радиус. Спектр коммутативной банаховой алгебры. Преобразование Гельфанда. Банаховая алгебра  $B(H)$ . Компактные и фредгольмовы операторы на гильбертовых пространствах. Алгебра Калкина.

### **Раздел 2. $C^*$ -алгебры**

Определение  $C^*$ -алгебры и ее основные свойства. Унитализация  $C^*$ -алгебры. Коммутативные  $C^*$ -алгебры (Теорема Гельфанда-Наймарка). Самосопряженные и положительные элементы  $C^*$ -алгебры, полярное разложение элемента  $C^*$ -алгебры. Полуторалинейные формы. Спектральная теорема для самосопряженных элементов.

### **Раздел 3. Положительные функционалы и идеалы**

Идеалы в  $C^*$ -алгебрах. Фактор-алгебра. Положительные линейные функционалы, состояния и чистые состояния. Понятие веса и следа на  $C^*$ -алгебре. Типы  $C^*$ -алгебр.

### **Раздел 4. Представления $C^*$ -алгебр**

Точные представления и неприводимые представления. Унитарно эквивалентные представления. Теорема о транзитивности. Левые идеалы в  $C^*$ -алгебре. Примитивные идеалы. Лиминальные и постлиминальные  $C^*$ -алгебры. Чистые состояния. ГНС конструкция  $C^*$ -алгебр. Связь неприводимых представлений и чистых состояний.

### **Раздел 5. Алгебры фон Нойманна**

Теорема о бикоммутанте. Слабая и ультраслабая топологии. Теорема Капланского о плотности. Коммутативные алгебры фон Нойманна. Нетривиальные алгебры фон Ноймана. Нормальные и волне аддитивные состояния. Факторы и типы фактор. Модулярная теория Томита-Такесаки.

### **Раздел 6. Прямые пределы и тензорные произведения**

Прямые пределы  $C^*$ -алгебр. AF-алгебра. Равномерно гиперфинитные алгебры. Тензорные произведения  $C^*$ -алгебр. Ядерные  $C^*$ -алгебры. Бесконечные тензорные произведения.

### **Раздел 7. Групповые $C^*$ -алгебры**

Группы. Ковариантная динамическая система. Понятие скрещенного произведения. Групповая  $C^*$ -алгебра. Регулярное представление.  $C^*$ -алгебра, порожденная регулярным представлением. Структура  $C^*$ -алгебр, порожденных скрещенным произведением алгебры непрерывных функций на окружности и иррациональным вращением. Алгебра Бунца-Деденса.

Аудиторный курс включает в себя лекции и практические занятия.  
Форма промежуточной аттестации – зачет с оценкой.