Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Казанский государственный энергетический университет»

А.С. Ситдиков, Е.В. Липачева

*C**-АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебно-методическое пособие

Казань
2020

УДК 530.145
ББК 22.31
С41

С41 **Ситдиков, А. С., Липачева, Е. В.**

*C**-алгебры и их приложения к квантовой теории поля: учебно-методическое пособие / А. В. Ситдиков, Е. В. Липачева. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2020. – 42 с.

Содержит краткие сведения и упражнения, которые составляют математическую основу современной квантовой физики и способствуют лучшему усвоению и закреплению теории *C**-алгебр.

Изложенный *C**-алгебраический подход к квантовой теории поля является одним из современных разделов аксиоматической квантовой теории поля. В качестве приложения рассмотрено представление локализованных физических наблюдаемых как элементов абстрактных или конкретных *C**-алгебр над областями физического пространства-времени.

Адресовано аспирантам физико-математических специальностей, а также может быть полезно студентам старших курсов, интересующимся приложениями *C**-алгебр в теоретической физике.

Издание публикуется в авторской редакции и авторском наборе.

УДК 530.145
ББК 22.31

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Развитие теории C^*-алгебр связано с работами Гельфанда и Наймарка, в которых был дан аксиоматический подход к описанию замкнутых по норме *-алгебр операторов в гильбертовом пространстве, которые стали называть $*$-алгебрами. В своем современном положении теория C^*-алгебр представляет собой абстрактное исследование алгебр ограниченных операторов, которые действуют в гильбертовых пространствах. В тоже время теорию C^*-алгебр можно рассматривать и как специальный раздел теории банаховых алгебр - полных нормированных алгебр с дополнительным условием на норму $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для любого элемента алгебры A. В связи с этим теорию C^*-алгебр можно излагать в двух вариантах – абстрактном, в смысле общей теории банаховых алгебр и конкретном, в виде реализации этой алгебры операторами в гильбертовом пространстве.

Использование некоммутативных C^*-алгебр в квантовой физике связано с тем, что экспериментально наблюдаемые величины определенной физической системы описываются показаниями тех или иных приборов и, следовательно, распределения зарегистрированных наблюдаемых значений формулируются на языке вещественных чисел. Поэтому сопоставление таким наблюдаемым эрмитовых (самосопряженных) элементов C^*-алгебры оказалось особенно удобным и продкутивным. При этом абстрактная и конкретная формулировки теории C^*-алгебр открывают дополнительные удобства в зависимости от особенностей исследования конкретной квантовой физической системы.

Поскольку данное предлагаемое небольшое по объему пособие адресовано преимущественно аспирантам, авторы преследовали также и педагогические цели, суть которых в том, что в образовательных программах многих университетов теория C^*-алгебр и их представлений отсутствует, поэтому изложение должно быть в разумной мере простым и в тоже время максимально полным.

В первую очередь, пособие адресовано аспирантам, выполняющим кандидатские диссертации по специальностям 01.01.03 и 01.01.04 отрасли «физико-математические науки», которые хотят использовать результаты теории C^*-алгебр в своих исследованиях. Аспирантам, планирующим защитить диссертации специальности 01.01.01 следует обратиться к более специфической монографической литературе [1–4]. Более того, в качестве потенциальной области приложений авторы видят квантовую физику и поэтому в ходе изложения основных понятий (спектр C^*-алгебры, положительные функционалы, представления) старались раскрыть их физическую сущность. В §6 мы описали в схематической форме основные понятия алгебраической формулировки квантовой теории поля - одного из базовых объектов приложения теории C^*-алгебр. Для чтения этого параграфа необходимы сведения также по теории C^*-категорий, поэтому с целью обеспечения максимальной независимости от других источников в §7 приведено в весьма сжатой форме основное содержание этой теории. В конце пособия приведено достаточное количество упражнений, большинство из которых содержит указания к решению, что, несомненно, будет способствовать более глубокому усвоению теории C^*-алгебр.

Авторы выражают благодарность профессору С. А. Григоряну, который предложил рассматривать приложения C^*-структур в задачах квантовой физики и чьи семинары не только вдохновляли, но и способствовали формированию наших собственных взглядов в этой тематике, что позволило получить непосредственные скромные результаты.

1. C^*-алгебры

В настоящем параграфе приведены основные сведения по теории C^*-алгебр, которые необходимы для дальнейшего изложения.

Под алгеброй понимают линейное пространство над полем комплексных чисел с определенной бинарной операцией (т.е. операцией над двумя элементами), которую обычно называют произведением. Приведем следующее определение алгебры.

Определение 1.1. *Множество $\mathscr{U}$ элементов $A, B, \ldots$ называется алгеброй, если оно замкнуто относительно определенного в нем коммута-*

тивного и ассоциативного сложения и умножения на комплексные числа, а также если на нем задано билинейное отображение, называемое произведением,

$$\mathscr{U} \times \mathscr{U} \to \mathscr{U}, \quad (A, B) \mapsto AB,$$

удовлетворяющее условиям

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = \lambda_1(A_1 B) + \lambda_2(A_2 B),$$

$$A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1(AB_1) + \lambda_2(AB_2).$$

Здесь мы будем рассматривать ассоциативные алгебры, то есть удовлетворяющие условию:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Заметим, что в соответствии с приведенным определением алгебра относительно коммутативного и ассоциативного бинарного сложения является аддитивной группой, где нейтральным (единичным) элементом является нулевой элемент.

Подмножество $\mathscr{B}$ алгебры $\mathscr{U}$ называется *подалгеброй*, если из того, что $A \in \mathscr{B}$, $B \in \mathscr{B}$ следует, что $AB \in \mathscr{B}$.

Подалгебра $\mathscr{B}$ называется *левым (правым) идеалом* в $\mathscr{U}$, если элементы из $\mathscr{U}$ действуют на $\mathscr{B}$ как линейные операторы при умножении слева (справа), т. е. если $AB \in \mathscr{B}$ (соответственно $BA \in \mathscr{B}$) для всех $A \in \mathscr{U}$, $B \in \mathscr{B}$. Если подалгебра $\mathscr{B}$ является одновременно левым и правым идеалом, то она называется *двусторонним идеалом.* Заметим, что если алгебра является коммутативной (т.е. если $AB = BA$), то все три вида идеалов совпадают.

В приложениях к квантовой физике большую роль играют алгебры с инволюцией, или, $*$-*алгебры*, где каждому элементу $A \in \mathscr{U}$ поставлен в соответствие сопряженный элемент $A^* \in \mathscr{U}$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \; (AB)^* = B^* A^*,$$

$$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*,\ (A^*)^* = A,$$

где черта над α означает комплексное сопряжение.

Для введения понятия сходимости элементов в алгебре, необходимо ввести понятие нормы, т.е. определить функцию, сопоставляющую каждому элементу алгебры неотрицательное вещественное число. Тогда $*$-алгебра $\mathscr{U}$ называется *нормированной*, если в ней определена *норма* $\|A\|$, удовлетворяющая условиям

(а) для любого скаляра $\lambda:\ \ \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ (положительная однородность);

(б) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|A\|$ (неравенство треугольника);

(в) если $\|A\| = 0$, то и $A = 0$ (отделимость)

и условиям

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,\ \|A^*\| = \|A\|.$$

Полная нормированная алгебра называется *банаховой* алгеброй.

Элемент $\mathbf{1} \in \mathscr{U}$ такой, что $\mathbf{1} \cdot A = A \cdot \mathbf{1} = A$ при всех $A \in \mathscr{U}$, называется *единичным* элементом. Алгебра, содержащая единичный элемент, называется *унитальной.* Единичный элемент, если он существует, единствен (что легко доказывается), кроме того, справедливо $\mathbf{1}^* = \mathbf{1},\ \|\mathbf{1}\| = 1$. Элементы алгебры вида $\lambda \cdot \mathbf{1}$, где λ — комплексное число, называют скалярами или c-числами и часто пишут λ вместо $\lambda \cdot \mathbf{1}$. Подразумевается также, что единица подалгебры совпадает с единицей алгебры.

Элемент A алгебры с инволюцией $\mathscr{U}$ называется *эрмитовым*, если он удовлетворяет соотношению $A^* = A$. Элемент $U \in \mathscr{U}$ со свойством $U^*U = UU^*$ называется *нормальным.* Если $U^*U = UU^* = \mathbf{1}$, то элемент U называется *унитарным.* Эрмитов элемент E со свойством $E^2 = E$ называется (эрмитовым) *проектором.*

Инволютивная банахова алгебра $\mathscr{U}$ называется *C^*-алгеброй*, если выполнено равенство

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

для всех $A \in \mathscr{U}$.

Поскольку каждая C^*-алгебра $\mathscr{U}$ является, в частности, банаховым пространством, то можно рассматривать множество всех линейных непрерывных функционалов $F : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, которые также образуют некоторое банахово пространство (сопряженное пространство $\mathscr{U}'$). Соответственно, в $\mathscr{U}$ можно ввести слабую топологию, а в $\mathscr{U}'$ пользоваться $*$-слабой топологией.

В качестве примера можно указать, что алгебра всех линейных ограниченных операторов в произвольном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ образует C^*-алгебру, которую будем обозначать через $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. В качестве нормы здесь принимается операторная норма, а в качестве инволюции — эрмитово сопряжение. Поэтому всякая подалгебра в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, замкнутая относительно топологии нормы и операции эрмитова сопряжения, является C^*-алгеброй.

C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\mathscr{U}$ можно назвать всякое подмножество в $\mathscr{U}$, которое само является C^*-алгеброй относительно алгебраических операций, инволюции и нормы, заимствованных из $\mathscr{U}$. C^*-подалгебры алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ называются также операторными (или конкретными) C^*-алгебрами, в отличие от общих абстрактных C^*-алгебр. Имеется глубокий результат Гельфанда и Наймарка, согласно которому всякая (абстрактная) C^*-алгебра может быть реализована как C^*-подалгебра в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ при подходящем выборе $\mathscr{H}$. Другими словами, всякая абстрактная C^*-алгебра изоморфна некоторой конкретной C^*-алгебре.

Под гомоморфизмом между C^*-алгебрами (C^*-гомоморфизм, или просто морфизм) понимается линейное отображение γ из C^*-алгебры $\mathscr{U}_1$ в C^*-алгебру $\mathscr{U}_2$, сохраняющее операции умножения и инволюции:

$$\gamma(AB) = \gamma(A)\gamma(B),\ \gamma(A)^* = \gamma(A^*),$$

а также переводящее единичный элемент в единичный: $\gamma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Аналогично C^*-изоморфизм между алгебрами $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ можно определить как C^*-гомоморфизм из $\mathscr{U}_1$ на $\mathscr{U}_2$, который взаимно однозначно отображает $\mathscr{U}_1$ на $\mathscr{U}_2$. C^*-изоморфизмы алгебры $\mathscr{U}$ на себя называют C^*-автоморфизмами. Отметим, что всякий C^*-изоморфизм автоматически оказывается изометрическим отображением, т.е. $\|\gamma(A)\| = \|A\|$.

2. Спектр элемента C^*–алгебры

В алгебраической квантовой теории наблюдаемым физическим величинам (наблюдаемые квантовой системы) сопоставляют эрмитовы (самосопряженные) элементы C^*-алгебры наблюдаемых. При этом в интуитивном понимании норма оператора наблюдаемой представляет собой наибольшую абсолютную величину измеряемого числового значения физической величины. На опыте измеряются вещественные числовые значения, поэтому квантовые наблюдаемые, описываемые с помощью линейных операторов, должны быть связаны с экспериментальными данными. Обычно постулируют, что возможные числовые значения квантовой наблюдаемой, которые могут быть измерены экспериментально, являются собственными значениями (спектром) оператора этой наблюдаемой. Другими словами, на опыте измеряются вещественные числовые значения, соответствующие наблюдаемой в заданном состоянии. Важнейшими характеристиками измеряемых величин являются среднее значение (математическое ожидание) и дисперсия. В случае, когда дисперсия равна нулю, то наблюдаемая в заданном состоянии имеет точное значение.

Как уже выше отметили, для некоммутативных C^*-алгебр, описывающих квантовые наблюдаемые, имеет место теорема Гельфанда – Наймарка: любая C^*-алгебра может быть реализована алгеброй ограниченных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве (обычно берется комплексное бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство). При этом для коммутативных C^*-алгебр, описывающих классические наблюдаемые, имеется теорема, утверждающая, что всякая коммутативная C^*-алгебра изоморфна алгебре непрерывных функций, заданных на компактном множестве максимальных идеалов данной алгебры.

Также отметим, что понятия квантовой наблюдаемой и квантового состояния являются дуальными, поскольку в понятие среднего значения одновременно входит и понятие наблюдаемой, и понятие состояния.

Как мы ниже увидим, спектр банаховых и, в частности, C^*-алгебр имеет достаточно простую структуру (хотя в случае произвольных алгебр это не так). Теперь приведем основные результаты, относящиеся к понятию спектра элемента абстрактной C^*-алгебры.

Назовем элемент A унитальной C^*-алгебры $\mathscr{U}$ *обратимым*, если существует элемент $A^{-1} \in \mathscr{U}$, называемый его обратным, такой, что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{1}.$$

Определение 2.1. *Пусть A — фиксированный элемент C^*-алгебры $\mathscr{U}$. Множество всех комплексных чисел λ, для которых элемент $\lambda - A$ обратим, называется резольвентным множеством элемента A, а обратный элемент $(\lambda - A)^{-1}$ (как функция параметра λ) называется резольвентой элемента A.*

Дополнение к резольвентному множеству называется *спектром* элемента A. Обозначим спектр элемента A через $\sigma(A)$.

Величина

$$\rho(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

называется *спектральным радиусом* элемента A.

Предложение 2.1. *Спектр $\sigma(A)$ любого элемента A C^*-алгебры $\mathscr{U}$ является непустым компактным множеством, причем для спектрального радиуса имеет место формула*

$$\rho(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}. \tag{2.1}$$

Данное предложение справедливо для всех банаховых алгебр (с единицей). Укажем еще ряд полезных свойств C^*-алгебр в виде следующих предложений.

Предложение 2.2. *Спектр эрмитова элемента C^*-алгебры вещественен.*

Элемент A C^*-алгебры $\mathscr{U}$ называется *положительным*, если он эрмитов и его спектр неотрицателен, то есть $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

На эрмитовых элементах C^*-алгебры $\mathscr{U}$ можно ввести отношение частичного порядка.

Для любой пары эрмитовых элементов $A, B \in \mathscr{U}$ будем говорить, что $A \leq B$, если элемент $B - A$ положителен.

Введенное отношение действительно является отношением частичного порядка: транзитивность следует из того, что сумма двух положительных элементов положительна, что, в свою очередь, следует из ГНС-конструкции и аналогичного факта для линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Совокупность положительных элементов в C^*-алгебре $\mathscr{U}$ образует правильный конус в $\mathscr{U}$.

Предложение 2.3. *Пусть f —голоморфная функция, определенная в открытом множестве $\mathscr{O} \subset \mathbb{C}$, пусть $A \in \mathscr{U}$ и $\sigma(A) \subset \mathscr{O}$. Тогда функции f можно поставить в соответствие элемент $f(A) \in \mathscr{U}$, такой, что отображение $f \mapsto f(A)$ есть гомоморфизм алгебры голоморфных функций в алгебру $\mathscr{U}$, причем:*

(а) $f(A) = A$, если $f(\lambda) \equiv \lambda$;

(б) $f(A) = (A - \lambda_0)^{-1}$, если $f(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_0)^{-1}$;

(в) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Для эрмитовых элементов A достаточно лишь требования непрерывности функции f.

Предложение 2.4. *Пусть $\mathscr{C}(K)$ есть C^*-алгебра непрерывных функций на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{\lambda \in K} |f(\lambda)|$. Алгебраические операции в $\mathscr{C}(K)$ определены поточечно, а инволюция есть комплексное сопряжение. Пусть A есть эрмитов элемент C^*-алгебры $\mathscr{U}$ и $\sigma(A) \subset K$. Тогда функции f можно поставить в соответствие элемент $f(A) \in \mathscr{U}$, такой, что отображение $f \mapsto f(A)$ есть C^*-гомоморфизм алгебры $\mathscr{C}(K)$ в алгебру $\mathscr{U}$, и выполняются пункты (а)-(в) из предложения 2.3.*

3. Положительные функционалы

Когда рассматривали понятие спектра, то указывали на тот факт, что наблюдаемая имеет определенное измеряемое числовое значение в некотором состоянии. Это означает, что распределение значений физической величины A при измерениях получается при условии, что перед измерением физическая система находилась в конкретном состоянии. Если в обычной квантовой механике состояния описываются с помощью векторов (волновых функций) в гильбертовом пространстве, отвечающие так называемым чистым состояниям, то в формализме алгебраического подхода эти состояния (в общем, смешанные) представляют собой положительные нормальные линейные функционалы над C^*-алгеброй. Значение функционала для самосопряженных элементов алгебры соответствует среднему значению наблюдаемой. Значение функционала, соответствующее единичному элементу алгебры, равно единице. При этом чистым состояниям отвечают экстремальные точки в множестве всех состояний. Другими словами, чистым состояниям соответствуют так называемые неразложимые положительные функционалы (о неразложимых функционалах см. ниже), связанные с неприводимыми представлениями алгебры.

Теперь приведем наиболее важные определения.

Линейный функционал $F \in \mathscr{U}'$ называется *мультипликативным* функционалом, если $F(AB) = F(A)F(B)$ для любых $A, B \in \mathscr{U}$.

Определение 3.1. *Линейный функционал $F \in \mathscr{U}'$ называется положительным функционалом, если на положительных элементах алгебры $\mathscr{U}$ он принимает неотрицательные значения, или, что тоже самое, $\forall A \in \mathscr{U}$ выполнено неравенство*

$$F(A^*A) \geq 0.$$

Приведем простейшие свойства положительных функционалов:

(а) всякий положительный функционал принимает вещественные значения на эрмитовых элементах алгебры;

(б) если F — положительный функционал, то $\forall A, B \in \mathscr{U}$ справедливо неравенство

$$|F(A^*B)|^2 \leq F(A^*A) \cdot F(B^*B), \tag{3.1}$$

которое называется неравенством Коши — Буняковского — Шварца.

В случае C^*-алгебр имеем следующее дополнительное свойство:

(в) всякий положительный функционал F на C^*-алгебре непрерывен (по норме) и его норма равна $F(\mathbf{1})$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Для любого элемента A в C^*-алгебре $\mathscr{U}$ существует положительный функционал $F \equiv F_A$ на $\mathscr{U}$ такой, что*

$$\|F_A\| = 1 \quad \textit{и} \quad F_A(A^*A) = \|A\|^2.$$

Легко видеть, что для произвольных положительных функционалов $F_1, \ldots, F_n$ на инволютивной алгебре и для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ функционал $F = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j F_j$ положителен; назовем его выпуклой линейной комбинацией функционалов $F_1, \ldots, F_n$.

Положительный функционал F называется неразложимым, если он не может быть представлен в виде суммы неколлинеарных положительных функционалов, т. е. если равенство $F(A) = F_1(A) + F_2(A)$ выполняется при всех $A \in \mathscr{U}$, где F_1 и F_2 — положительные функционалы, то тогда справедливо $F_1 = \lambda F_2, (\lambda \geq 0)$.

Множество $[a, b]$ точек x вида $x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ в линейном пространстве Ω называется отрезком. Точка $x_0 \in K$ называется крайней (или экстремальной) точкой подмножества K линейного пространства Ω, если она не является внутренней точкой ни одного отрезка с различными концами в K.

Обозначим через $\mathscr{U}_1^{'}$ множество всех нормированных функционалов на C^*-алгебре $\mathscr{U}$:

$$\mathscr{U}_1^{'} = \{F \in \mathscr{U}' \mid \|F\| = 1\}.$$

Обозначим через $\mathscr{U}_{1+}^{'}$ множество всех нормированных положительных функционалов на C^*-алгебре $\mathscr{U}$.

Нетрудно видеть, что ненулевой положительный функционал F на C^*-алгебре $\mathscr{U}$ неразложим в точности тогда, когда $||F||^{-1}F$ является крайней точкой множества $\mathscr{U}_{1+}^{'}$.

Множество $\mathscr{U}_{1+}^{'}$ порождается своими экстремальными точками.

Предложение 3.2. *Единичный шар $\mathscr{U}_1^{'}$ в $\mathscr{U}^{'}$ компактен в $*$-слабой топологии (следовательно, множество $\mathscr{U}_{1+}^{'}$ также компактно в этой топологии).*

Теорема 3.1 (Теорема Крейна—Мильмана)**.** *Всякое компактное выпуклое подмножество в линейном выпуклом пространстве является замкнутой выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.*

Примерами неразложимых положительных функционалов на алгебре $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ являются так называемые векторные функционалы F_x вида:

$$F_x(A) =< x, Ax >,\ A \in \mathscr{B}(\mathscr{H}),$$

где x — произвольный вектор из $\mathscr{H}$.

4. Действия

Прежде чем переходить к описанию представлений C^*-алгебр, кратко опишем более общую конструкцию, называемую *действием.* В дальнейшем также встретимся с понятием действия полугруппы с единицей (или, C^*-категории) на C^*-алгебре, что является обобщением действия на другие алгебраические системы. С исторической точки зрения понятие действия возникло в связи с возможностью реализации заданной группы G в качестве подгруппы группы $S(X)$ всех преобразований некоторого множества X (т.е. всех взаимно однозначных отображений X на себя). Например, если X=$\{1, 2, ..., n\}$, то $S(X)$ является группой всех подстановок множества $\{1, 2, ..., n\}$, т.е. симметрической группой S_n (которую часто обозначают еще символом $\mathbf{P}_n$). Как было только что упомянуто, если в качестве G и X взять какие-нибудь другие алгебраические системы, то соответственно можно прийти к понятиям представления, модуля и пр. Важную роль играет также понятие действия группы на объектах некоторой категории.

Определение 4.1. *Действием группы G на некотором множестве X называется гомоморфизм групп*

$$\alpha : G \to S(X).$$

Другими словами, задание действия группы подразумевает сопоставление любому элементу $g \in G$ элемента $\alpha_g \in S(X)$, причем $\forall g, h \in G$ выполняется $\alpha_{gh} = \alpha_g \alpha_h$, единице e группы ставится в соответствие тождественное преобразование id, обратному элементу соответствует обратное преобразование. Образ $\alpha_g(x)$ элемента $x \in X$ обозначают как gx, что позволяет говорить об отображении $(g, x) \mapsto gx$ декартова произведения $G \times X$ в X (однако следует отметить, что в случае когда X представляет собой некоторую алгебраическую структуру, образ $\alpha_g(x)$ в общем нельзя представить как gx). Тогда отмеченные свойства преобразования α_g можно записать в виде

1) $ex = x$;

2) $(gh)x = g(hx)$.

В этом случае, т.е. когда отображение $(g, x) \mapsto gx$ декартова произведения удовлетворяет свойствам 1) и 2), говорят, что группа действует на множестве X слева. Аналогично определяется и правое действие. При этом X называется $G-$множеством, ядро $ker\,\alpha$ называют *ядром действия* группы G.

Действие группы G задает отношение эквивалентности на X следующим образом: две точки $x, x' \in X$ называются эквивалентными относительно действия группы G, если существует $g \in G$, такой, что $x' = gx$. Легко проверить, что это отношение является отношением эквивалентности, то есть выполняются свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности. Отношение эквивалентности разбивает X на непересекающиеся классы эквивалентности, которые принято называть *G-орбитами.* Орбиту точки $x \in X$ принято обозначать $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$. Если, к примеру, взять группу вращений плоскости $\mathrm{SO}(2)$ вокруг некоторой точки O, то орбитой точки x будет окружность с центром в точке O, проходящая через x, а множество (плоскость) $X = \mathbb{R}^2$ представляет при этом объединение всех таких концентрических окружностей (включая также и точку O - окружность нулевого радиуса).

Введем теперь понятия эффективного, свободного и транзитивного действия, которые подчеркивают особенности того или иного действия G на X. Действие называется *эффективным*, если α есть мономорфизм (т.е. если $ker\,\alpha = 0$). Другими словами, если каждый отличный от единицы элемент группы действует на множестве X нетождественным образом, то действие эффективно. Действие называется *свободным*, если $\forall g, h \in G$, $g \neq h$, и $\forall\ x \in X$ выполняется $gx \neq hx$. Другими словами, если каждый отличный от единицы элемент группы действует на X без неподвижных точек, то такое действие называется свободным. Действие называется *транзитивным*, если $\forall\ x_1, x_2 \in X$ существует такой элемент $g \in G$, что $gx_1 = x_2$. Это означает, что любую точку $x \in X$ можно перевести в другую точку каким-нибудь преобразованием из группы G. При этом все элементы множества X будут эквивалентными, т.е. существует всего лишь одна орбита.

Некоторые элементы группы G, действуя на множестве X, могут оставлять какие-то элементы $x \in X$ на месте. В связи с этим вводится понятие стабилизатора группы G. *Стабилизатором* элемента $x \in X$ в группе G назовем подмножество группы G, состоящее из элементов g, оставляющих x неподвижным. Стабилизатор элемента x является подгруппой в G и обозначается $St(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$. Стабилизатор часто называют также и стационарной подгруппой.

Возьмем в качестве множества X саму группу G, т.е. $X = G$. Тогда можно задать действие группы G на себе сопряжениями: определим для любого $g \in G$ автоморфизм I_g по правилу: $I_g(h) = ghg^{-1}$. Автоморфизм I_g называется *внутренним*. Множество всех внутренних автоморфизмов группы G обозначается $Inn(G)$.

5. Представления C^*-алгебр

Определение 5.1. *Представлением C^*-алгебры $\mathscr{U}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ называется C^*-гомоморфизм π алгебры $\mathscr{U}$ в алгебру $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.*

Представление π называется *неприводимым*, если всякое замкнутое подпространство в $\mathscr{H}$, инвариантное относительно всех операторов $\pi(A)$ $(A \in \mathscr{U})$, либо есть 0, либо все $\mathscr{H}$.

Вектор $\Phi \in \mathscr{H}$ называется *циклическим* для представления π, если все векторы вида $\pi(A)\Phi$ (где $A \in \mathscr{U}$ образуют тотальное множество в $\mathscr{H}$. (Представление с циклическим вектором называется циклическим.)

Под *эквивалентностью* двух представлений π_1 и π_2 C^*-алгебры $\mathscr{U}$ в $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ подразумевают унитарную эквивалентность. Это означает, что существует изоморфизм $V : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ гильбертовых пространств со свойством

$$\pi_2(A) = V\pi_1(A)V^{-1} \text{ для всех } A \in \mathscr{U}.$$

В приложениях также приходится иметь дело с представлениями инволютивных алгебр, не являющимися C^*-алгебрами, причем в качестве операторов представления π допускаются также и неограниченные операторы в гильбертовом пространстве. При этом требуется, что все операторы $\pi(A)$ были определены вместе со своими сопряженными на некоторой плотной в $\mathscr{H}$ области D, которая инвариантна относительно операторов $\pi(A)$. Тогда на области D выполняются требования, налагаемые на такие представления:

$$\pi(\lambda A + \mu B) = \lambda\pi(A) + \mu\pi(B),\ \pi(A^*) = \pi(A)^*,$$

$$\pi(AB) = \pi(A)\pi(B).$$

Если Φ — вектор в пространстве $\mathscr{H}$, на котором задано представление π $*$-алгебры $\mathscr{U}$, то он порождает положительный функционал

$$F_\Phi =< \Phi, \pi(A)\Phi >$$

на $\mathscr{U}$. Такой функционал называется векторным функционалом, ассоциированным с представлением π и соответствующим вектору Φ.

Пусть $\mathscr{H}_1$ — замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства $\mathscr{H}$, на котором задано представление π C^*-алгебры $\mathscr{U}$. Такое подпространство называется *инвариантным* для π, если $\pi(A)\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_1$ для всех $A \in \mathscr{U}$ (т. е. если $\pi(\mathscr{U})\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_1$). Очевидно, сужения $\pi_1(A)$ операторов $\pi(A)$ на подпространство $\mathscr{H}_1$ образуют представление π_1 C^*-алгебры $\mathscr{U}$; оно называется подпредставлением представления π. Ортогональное дополнение $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_1$ также инвариантно для π, так что в нем действует подпредставление π_2. В результате (при $0 \neq \mathscr{H}_1 \neq \mathscr{H}$) представление разлагается в прямую сумму своих подпредставлений:

$$\pi(A) = \pi_1(A) \oplus \pi_2(A).$$

Если задано (конечное или бесконечное) семейство гильбертовых пространств $\{\mathscr{H}_\nu\}_{\nu \in J}$ и соответствующее семейство представлений $\{\pi_\nu\}_{\nu \in J}$ C^*-алгебры $\mathscr{U}$, причем π_ν действует на $\mathscr{H}_\nu$, то на прямой сумме гильбертовых пространств $\mathscr{H} = \bigoplus_{\nu \in J} \mathscr{H}_\nu$ можно определить новое представление π C^*-алгебры $\mathscr{U}$ по формуле

$$(\pi(A)\Phi)_\nu = \pi_\nu(A)\Phi_\nu$$

для любого $\Phi = (\Phi_\nu) \in \mathscr{H}$. Это представление называется *прямой суммой семейства представлений* $\{\pi_\nu\}_{\nu \in J}$.

Представление π C^*-алгебры $\mathscr{U}$ называется *точным*, если из условий $\pi(A) = \pi(B)$ следует $A = B$ (или, эквивалентно, если нуль есть единственный элемент из $\mathscr{U}$, который переходит в нулевой оператор при отображении π). Очевидно, точность представления π означает, что отображение $A \to \pi(A)$ есть изоморфизм $\mathscr{U}$ на $\pi(\mathscr{U})$.

Важным результатом в теории C^*-алгебр является конструкция Гельфанда-Наймарка-Сигала (сокращенно конструкция ГНС), позволяющая определить всякий положительный функционал на C^*-алгебре как векторный функционал в подходящем представлении алгебры.

Теорема 5.1 (Конструкция ГНС). *Для данного положительного функционала F на C^*-алгебре $\mathscr{U}$ можно определить (циклическое) представле-*

ние π_F *алгебры* $\mathscr{U}$, *в гильбертовом пространстве с циклическим вектором* Φ_F *так, что*

$$F(A) =< \Phi_F, \pi_F(A)\Phi_F > \text{ при всех } A \in \mathscr{U}.$$

Представление π_F *определено этими условиями однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.*

Представление π_F в конструкции ГНС называется представлением, соответствующим положительному функционалу F. Между неприводимостью π_F и неразложимостью F имеется тесная связь, которую опишем с помощью следующих утверждений.

Лемма 5.1. *Пусть* F *и* F_1 *- два положительных функционала на* C^**-алгебре* $\mathscr{U}$, *причем* F_1 *подчинен* F *в том смысле, что существует число* $\lambda \geq 0$ *такое, что*

$$F_1(A) \leq \lambda F(A)$$

для всех положительных $A \in \mathscr{U}$. *Тогда в пространстве* $\mathscr{H}_F$ *представления* π_F *(соответствующего* F*) существует (единственный) положительный ограниченный оператор* T, *коммутирующий со всеми операторами* $\pi_F(A)$ *такой, что*

$$F_1(A) =< \Phi_F, T\pi_F(A)\Phi_F >, \; A \in \mathscr{U}.$$

Предложение 5.1. *Представление* π_F, *соответствующее положительному функционалу* F, *неприводимо в точности тогда, когда положительный функционал* F *неразложим.*

Теорема 5.2. *Произвольная («абстрактная»)* C^**-алгебра изоморфна некоторой «конкретной»* C^**-алгебре операторов в гильбертовом пространстве.*

Следствие 5.1. *Для всех элементов* $A \in \mathscr{U}$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\pi} \|\pi(A)\| = A,$$

где верхняя грань берется по всем неприводимым представлениям C^**-алгебры* $\mathscr{U}$.

Если задан автоморфизм γ C^*-алгебры $\mathscr{U}$, то положительный функционал F на $\mathscr{U}$ называют инвариантным относительно γ, если

$$F(\gamma(A)) = F(A) \text{ для всех } A \in \mathscr{U}.$$

Предложение 5.2. *Предположим, что F — положительный функционал на C^*-алгебре $\mathscr{U}$, инвариантный относительно автоморфизма γ, а также $\pi_F, \mathscr{H}_F, \Phi_F$ — соответствующие компоненты конструкции ГНС. Тогда существует унитарный оператор U_F в $\mathscr{H}_F$ такой, что*

$$\pi_F(\gamma(A)) = U_F \pi_F(A) U_F^{-1} \text{ при всех } A \in \mathscr{U}. \tag{5.1}$$

Более того, если потребовать, чтобы

$$U_F \Phi_F = \Phi_F, \tag{5.2}$$

то условия (5.1) и (5.2) определяют U_F однозначно.

6. Понятия алгебраической квантовой теории

6.1. Поля и наблюдаемые

Алгебраическая квантовая теория поля (АКТП) опирается на понятие локальной наблюдаемой. Традиционные курсы квантовой теории поля (КТП) при этом опираются наоборот, на квантованное поле. *Почему так?* Дело в том, что АКТП имеет своей целью описать свойства квантовых систем, которые вытекают из определенной системы аксиом, опираясь лишь на наблюдаемые величины. Поле само по себе является сингулярным объектом и в общем случае не может быть наблюдаемой величиной. А что наблюдается? Наблюдаются лишь их определенные комбинации. Но как их выделить из всей массы всевозможных полей? Можно, например, следовать такой идеологии.

Прибор регистрирует процессы за конечные промежутки времени и в конечных областях пространства — в ограниченной области пространства-времени. Следовательно, определение измерения в математической точке теряет смысл — все измеряемое нужно сгладить по конечной области. Поэтому вначале квантованное поле усредняют с помощью пробной функции, затем строят полиномиальную алгебру. Полиномиальная алгебра является алгеброй неограниченных операторов и поэтому вначале из них получают полевую алгебру ограниченных операторов (фон Неймана), затем выделяют наблюдаемые величины как калибровочно инвариантные элементы полевой алгебры.

Теперь о пробных функциях.

6.2. Пробные функции и их алгебра

Для любой основной функции $f \in D(M^4)$, supp $f \subset \mathcal{O}$ определим последовательность

$$\Upsilon^f = \{f^{(0)}, f^{(1)}(x_1), f^{(2)}(x_1, x_2), ..., f^{(n)}(x_1, ..., x_n), ...\},$$

где $f^{(0)} \in \mathbf{C}$, $f^{(1)}(x_1) \in D(M^4)$, $f^{(2)}(x_1, x_2) \in D(M^{4\otimes 2}), ...,$ $f^{(n)}(x_1, ..., x_n) \in D(M^{4\otimes n})$. Сопряженную последовательность можно определить как

$$(\Upsilon^f)^* = \{\bar{f}^{(0)}, \bar{f}^{(1)}(x_1), \bar{f}^{(2)}(x_1, x_2), ..., \bar{f}^{(n)}(x_1, ..., x_n), ...\}.$$

Они образуют градуированное множество основных функций:

$$\Upsilon = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Upsilon_n, \quad \Upsilon_0 = \mathbf{C}, \quad \Upsilon_n = D(M^{4\otimes n}).$$

Борхерс ввел в Υ следующее некоммутативное умножение:

$$\Upsilon^f \times \Upsilon^h = \{f_0 h_0, f_0 g_1(x_1) + f_1(x_1) h_0, ...$$

$$..., \sum_{m=0}^{n} f_m(x_1, ..., x_m) h_{n-m}(x_{m+1}, ..., x_n), ...\}.$$

Топология пространства $D(M^{4\otimes n})$ индуцирует в алгебре Υ топологию прямой суммы, которая превращает Υ в полное ядерное пространство и топологическую алгебру. Эта алгебра называется *алгеброй Борхерса.*

6.3. Полиномиальная алгебра

Для простоты рассмотрим скалярное поле. Пусть $\mathcal{D}$ - плотное линейное подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Тогда для любой гладкой функции $f \in D(M^4)$ с компактным носителем существует линейный оператор $\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x) d^4x$, отображающий $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$ так, что $\varphi(f)$ линейно зависит от f и $f \to (\Phi, \varphi(f)\Psi)$ непрерывно для любых $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}$. Это означает, что $f \to (\Phi, \varphi(f)\Psi)$ является *распределением* (операторнозначным). Здесь $f(x)dx$ можно интерпретировать как вероятностную меру.

Совокупности определенных на $\mathcal{D}$ комбинаций вида

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(f^{(1)}, \varphi(f^{(2)}), ..., \varphi(f^{(k)})) \equiv$$

$$\equiv \int A(x) f(x) d^4x +$$

$$+ \int\int A(x_1) A(x_2) f^{(2)}(x_1, x_2) d^4x_1 d^4x_2 + ...$$

$$+ \int ... \int A(x_1) ... A(x_n) f^{(n)}(x_1, ..., x_n) d^4x_1 ... d^4x_n$$

порождают полиномиальную алгебру $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O} \subset M^4$). Их можно наделять структурой сети.

6.4. Полевая алгебра

Как было сказано, полевая алгебра $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ – это алгебра неограниченных операторов, с которыми неудобно работать. Встает вопрос: как получить из $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ алгебру ограниченных операторов? Существует множество способов и один из них заключается в взятии слабого коммутанта. Тогда получим

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}) := \mathcal{P}(\mathcal{O})^{w'},$$

где $\mathcal{O} \to \mathcal{F}(\mathcal{O})$ и набор $\{\mathcal{F}(\mathcal{O})\}_{O \subset M^4}$ образует сеть C^*-алгебр ограниченных операторов фон Неймана. При этом сеть $\{\mathcal{F}(\mathcal{O})\}_{O \subset M^4}$ удовлетворяет свойству изотонности, т.е. $\mathcal{F}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$, если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.

Итак, заменили один тип математических объектов (неограниченных операторнозначных распределений) другим типом математических объектов – алгебрами фон Неймана. Эти алгебры хорошо изучены и имеют тесную связь с гильбертовыми пространствами.

6.5. Алгебра наблюдаемых

Согласно идеологии АКТП, необходимо характеризовать теорию исходя из наблюдаемых величин. Следовательно, теория будет характеризоваться более узким соответствием: $\mathcal{O} \to \mathcal{U}(\mathcal{O})$ вместо $\mathcal{O} \to \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Сеть $\{\mathcal{U}(\mathcal{O})\}_{O \subset M^4}$ называется *сетью C^*-алгебр локальных наблюдаемых.* Для выделения сети локальных наблюдаемых из сети полевой алгебры, вводят компактную группу G, называемую группой калибровочных преобразований, которая действует как автоморфизмы $\mathcal{F}$, оставляя $\mathcal{U}$ поточечно фиксированной:

$$\mathcal{U}(\mathcal{O}) := \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}) : g(F) = F, g \in G\}.$$

При этом алгебра $\mathcal{U} \equiv \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \in M^4} \mathcal{U}(\mathcal{O})}$ называется алгеброй *квазилокальных наблюдаемых* и она представляет собой индуктивный предел алгебры локальных наблюдаемых. Здесь верхняя черта означает замыкание в топологии нормы.

Наблюдаемые, локализованные в пространственно-подобных областях, должны коммутировать, поскольку для таких областей измерение в одной из них не должно влиять на измерение другой (скорость любого взаимодействия не превышает скорости света). Это так называемый принцип локальности, в математической форме его можно выразить в виде

$$A_1 A_2 = A_2 A_1, \quad A_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_1), \quad A_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_2), \quad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2',$$

где $\mathcal{O}'$ означает причинное дополнение.

Заметим, что для полей принцип локальности в общем не распространяется: поля не обязаны коммутировать на пространственно-подобных расстояниях. Поля удовлетворяют специальному варианту принципа локальности - коммутационным соотношениям Бозе-Эйнштейна или Ферми-Дирака. Формально это выглядит следующим образом. Как было сказано, существуют локальные автоморфизмы сети полевых алгебр $\alpha_k \mathcal{F}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Определим $F_\pm =: \frac{1}{2}(F \pm \alpha_k(F))$, где F_+ и F_- - соответственно Бозе и Ферми части $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ и $\alpha_k(F_\pm) = \pm F_\pm$. Тогда если $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_1)$ и $F' \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$ с $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2'$, то имеем

$$F_+ F_+' = F_+' F_+; \quad F_- F_+' = F_+' F_-; \quad F_- F_-' = -F_-' F_-.$$

6.6. Аддитивность

Пусть $\Re$ - сеть над множеством $\mathcal{S}$ открытых подмножеств топологического пространства и которая является направленной по включению

$$\Re(\mathcal{O}_1) \subset \Re(\mathcal{O}_2); \quad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2.$$

Сеть $\Re$ называется аддитивной, если $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ можно покрыть подмножествами $\mathcal{O}_i \in \mathcal{S}$, и $\Re(\mathcal{O})$ порождается посредством $\Re(\mathcal{O}_i)$. Аддитивную сеть определяют следующим образом:

$$\Re(\mathcal{O}) = \bigvee_i \Re(\mathcal{O}_i), \quad \mathcal{O} = \bigcup_i \mathcal{O}_i.$$

Пусть $\mathcal{F}$ - аддитивная сеть полевой алгебры, на которой действует компактная группа G.

Вопрос: является ли

$$\mathcal{U}(\mathcal{O}) := \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}) : g(F) = F, g \in G\}$$

аддитивной? Забегая несколько вперед, отметим, что эта сеть будет аддитивной, если компактная группа G будет иметь полный гильбертов спектр. Для представления более точного ответа введем соответствующие определения, лемму и теорему без доказательств.

Определение 6.1. *Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ в C^*-алгебре $\mathcal{A}$ с единицей есть замкнутое по норме линейное подпространство и $\Psi^*\Psi \in \boldsymbol{C}I$ $\forall\Psi \in \mathcal{H}$. Тогда оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением $\Psi^*\Psi = (\Psi, \Psi')I$.*

Если $\mathcal{H}$ конечномерное и ψ_i, $i = 1, 2, ..., d$ - ортонормированный базис в этом гильбертовом пространстве, то $\sigma_{\mathcal{H}}(A) = \sum_i \psi_i A \psi_i^*$ не зависит от выбора базиса и определяет эндоморфизм $\mathcal{A}$. При этом $\sigma_{\mathcal{H}}(I)$ называется носителем $\mathcal{H}$. Любое ограниченное линейное отображение $\mathcal{H}$ в $\mathcal{A}$ представляется левым умножением и при этом существует единственный $X \in \mathcal{A}$ с $X = X\sigma_{\mathcal{H}}(I)$.

В алгебре фон Неймана $\mathcal{H}$ может быть бесконечномерным.

Определение 6.2. *Группа автоморфизмов G для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ с единицей имеет полный гильбертов спектр, если каждый класс эквивалентности непрерывных неприводимых представлений реализуется на G-инвариантном гильбертовом пространстве в $\mathcal{A}$.*

Лемма 6.1. *Пусть G - компактная группа автоморфизмов, действующих непрерывно на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ с единицей, или же на σ-непрерывной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда G имеет полный гильбертов спектр конечных сумм $\sum_k A_k\psi_k$, и A_k - элементы поточечно фиксированной алгебры, ψ_k - элементы конечномерного гильбертова пространства образуют $*$-алгебру, плотную в $\mathcal{A}$ или σ-плотную в $\mathcal{M}$.*

Теорема 6.1. *Пусть $\mathcal{F}$ - аддитивная сеть над ограниченными, открытыми множествами и G - компактная группа сети автоморфизмов. Положим, что G имеет полный гильбертов спектр как группа автоморфизмов $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ для каждого ограниченного и открытого множества $\mathcal{O}$. Тогда сеть $\mathcal{U}$, определяемая как*

$$\mathcal{U}(\mathcal{O}) := \{A \in \mathcal{F}(\mathcal{O}) : g(A) = A, g \in G\}$$

имеет свойство аддитивности

$$\mathcal{U}(\mathcal{O}) := \bigvee_i \mathcal{U}(\mathcal{O}_i),$$

где $\mathcal{O}_i$ - связные компоненты $\mathcal{O}$.

Для несвязных множеств $\mathcal{O}$ эта теорема неверна.

6.7. Вложения алгебр фон Неймана

Определение 6.3. *Вложение алгебр фон Неймана $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$ имеет* свойство S, *если для центральных проекций $E \in \mathcal{L}$ и $F \in \mathcal{N}$ выражение $EF = 0$ влечет $E = 0$ или $F = 0$.*

Вложение имеет *свойство B*, если любая ненулевая проекция в $\mathcal{L}$ эквивалентна I в $\mathcal{N}$.

Вложение называется *расщепляемым*, если оно является фактором алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ промежуточного типа $\mathcal{I}$, т.е. если $\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

Свойство B играет важную роль в АКТП. По-другому оно означает следующее: если $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ - двойные конусы и $\mathcal{O}_2$ включает замыкание $\mathcal{O}_1$, то самосопряженная проекция E, локализованная в $\mathcal{O}_1$, имеет вид $E = WW^*$, где $W^*W = I$ и W локализована в $\mathcal{O}_2$.

6.8. Сплетающие операторы

Для заданных двух представлений π и π' оператор $T \in (\pi, \pi')$ сплетает указанные представления (сопряженный оператор при этом определяется как $T^* \in (\pi', \pi)$). Тогда T – ограниченный линейный оператор из $\mathcal{H}_\pi$ в $\mathcal{H}_{\pi'}$, т.е.

$$T\pi(A) = \pi'(A)T, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Если $T' \in (\pi', \pi'')$, то $T' \circ T \in (\pi, \pi'')$.

Представления в совокупности со сплетающими операторами (морфизмы) образуют C^*-категорию. C^*-норма сплетающего оператора определяется как операторная норма. С помощью свойств этих морфизмов можно классифицировать объекты (их унитарную эквивалентность, полную приводимость и пр.)

Наряду с представлениями можно рассматривать также и унитальные эндоморфизмы ρ C^*-алгебры $\mathcal{A}$ и сплетающие операторы таких эндоморфизмов. Таким путем получим уже другую C^*-категорию – категорию $End\mathcal{A}$. Множество (ρ, ρ') сплетающих операторов R определяется как

$$(\rho, \rho') = \{R \in \mathcal{A} : R\rho(A) = \rho'(A)R, \ A \in \mathcal{A}\}.$$

При этом множество (ρ, ρ') образует комплексное линейное банахово пространство. Если $R \in (\rho, \rho')$, то $R^* \in (\rho', \rho)$. Также если $R' \in (\rho', \rho'')$, то $R' \circ R \in (\rho, \rho'')$.

Поскольку $End\mathcal{A}$ является моноидальной категорией, то наряду с композицией эндоморфизмов здесь определено также и произведение сплетающих операторов (см. §7).

6.9. Представления DHR (Doplicher, Haag, Roberts)

C^*-алгебра $\mathcal{A}$ имеет слишком много представлений и большинство этих представлений с физической точки зрения излишне. ***Критерий отбора*** - условие, согласно которому отбираются лишь те представления, которые представляют физический интерес. Поэтому критерий отбора можно сформулировать следующим образом.

Критерий отбора DHR: Пусть, $(\mathcal{H}_0, \pi_0)$ - ГНС-представления, индуцированные вакуумным состоянием ω_0 алгебры $\mathcal{A}$. Представление $(\mathcal{H}, \pi)$ алгебры $\mathcal{A}$ является DHR-представлением, если:

1) $\forall$ двойного конуса $\mathcal{O}$ представления $\pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$ и $\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$ унитарно эквивалентны (т.е. $\pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \simeq \pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$);

2) представление $(\mathcal{H}, \pi)$ имеет конечную статистику - обладает конечномерным представлением группы перестановок.

Множество всех представлений C^*-алгебры $\mathcal{A}$ формирует объекты категории - категории представлений $Rep(\mathcal{A})$. Морфизмами этой категории являются сплетающие операторы представлений. В свою очередь, DHR представления алгебры $\mathcal{A}$ образуют подкатегорию $DHR(\mathcal{A})$ категории $\mathcal{A}$ и эта подкатегория допускает тензорное произведение. Такие категории называются тензорными категориями. DHR-представления являются частным случаем (т.е. они локализованы и транспортабельны) эндоморфизмов $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, так что $(\mathcal{H}, \pi)$ унитарно эквивалентны к $(\mathcal{H}_0, \pi_0 \circ \rho)$, где $(\mathcal{H}_0, \pi_0)$ представляет собой вакуумное представление.

Секторы могут быть индексированы аддитивными квантовыми числами. В неабелевом случае сектора имеют структуру категории $Rep(G)$ представлений калибровочной группы G, поэтому $Rep(G)$ и $DHR(\mathcal{A})$ $-$ эквивалентные категории.

6.10. Связь с калибровочными группами

АКТП обладает внутренней симметрией, заданной компактной калибровочной группой G. Тогда в $\mathcal{H}$ действует унитарное представление $U(G)$ этой группы и эрмитов оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, представляющий наблюдаемую, остается инвариантным относительно совокупности таких калибровочных преобразований.

Теорема 6.2 (Доплихер, Робертс). *Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра наблюдаемых и ω_0 является вакуумным состоянием на $\mathcal{A}$. Тогда существуют единственные (с точностью до унитарной эквивалентности) полевая алгебра $\mathcal{F}$ и калибровочная группа G такие, что $\mathcal{A}$ представляет G-инвариантную подалгебру алгебры $\mathcal{F}$.*

Полевая алгебра действует в $\mathcal{H}$ неприводимым образом, но подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ наблюдаемых оставляет нетривиальные подпространства $\mathcal{H}_i$ инвариантными, т.е. $\mathcal{A}$ действует в $\mathcal{H}$ приводимо. Поэтому $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму суперотборных секторов

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2 \bigoplus ...,$$

где каждый сектор $\mathcal{H}_i$ представляет инвариантное подпространство относительно представления алгебры и группы G, т.е. остается инвариантным (глобально) по отношению действий $\mathcal{A}$ и G. Это означает, что $\forall\ A \in \mathcal{A}$ и $\psi \in \mathcal{H}_i$, $A\psi \in \mathcal{H}_i$. Аналогично для $\forall g \in G$. Отсюда следует, что для любого $\mathcal{H}_i$ сужение алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}_i$ является представлением. Другими словами, $\pi_i(A) = AP_i$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Здесь P_i —– ортогональный проектор в $\mathcal{H}_i$, поэтому каждое из представлений $(\mathcal{H}_i, \pi_i)$ является DHR-представлением алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$. Более того, сужение действия калибровочной группы G в $\mathcal{H}_i$ является унитарным представлением калибровочной группы, поэтому такое представление эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений группы G. Таким образом, *в каждом секторе $\mathcal{H}_i$ одновременно действуют DHR-представления алгебры $\mathcal{A}$ и представления компактной группы G. Следовательно, имеет место взаимно-однозначное соответствие между категориями $DHR(\mathcal{A})$ и $Rep(G)$ - функтор между этими категориями и собственные значения (заряды) суперотборного оператора (калибровочного преобразования) нумеруют сектора.*

Если калибровочная группа абелева, то ее секторы имеют структуру группы и для любых двух секторов (зарядовых квантовых чисел) X

и Y произведение определяется как $X, Y \to X \bigotimes Y$. В $DHR(A)$ вакуумное представление задается как тождественный объект категории, т.е. $\pi_0 = \mathbf{1}$. Если определить мономорфизм (в категориях, подобных $DHR(A)$) из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, то $\mathcal{B}$ совпадает либо $\mathcal{A}$, либо представляет прямую сумму $\mathcal{A}$ с некоторыми другими объектами, поэтому $\mathcal{A}$ является подпредставлением $\mathcal{B}$. Полагая $\mathcal{B} = X \bigotimes \overline{X}$ и $\mathcal{A} = \mathbf{1}$, соотношение для операции сопряжения можно представить как $X \bigotimes \overline{X} = \mathbf{1} \bigoplus$ *все остальные представления).* Это обеспечивает мономорфизм от $\mathbf{1}$ к $X \bigotimes \overline{X}$. Поскольку сопряжение должно обладать симметрией, то же самое должно быть потребовано для $\overline{X} \bigotimes X$.

7. Краткие сведения о C^*-категориях

Пусть $\mathcal{C}$ - категория. Обозначим ее объекты через $z, z_1, z_2, ...$, а множество морфизмов между z, z_1 обозначим через (z, z_1). Композицию морфизмов обозначим как "$\cdot$" и тождественный морфизм для (z, z) как 1_z. Морфизм $t \in (z_1, z_2)$ является изоморфизмом, если существует $s \in (z_2, z_1)$ такой, что

$$s \cdot t = 1_{z_1}, \quad t \cdot s = 1_{z_2}.$$

Изоморфность z_1 и z_2 обозначим как $z_1 \sim z_2$.

7.1. Функторы и естественные преобразования

Рассмотрим две категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. Ковариантный функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ называется:

верным, если $s, t \in (z_1, z_2)$ с $t \neq s$ влечет $F(s) \neq F(t)$;

полным, если $F(z, z_1) = (F(z), F(z_1))$;

плотным, если для любого $z_2 \in \mathcal{C}_2$ существует $z_1 \in \mathcal{C}_1$ такой, что $F(z_1) \sim z_2$;

инволютивным, если $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$ и $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$ для $\mathcal{C}_1$,

где $\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$ – тождественный функтор для $\mathcal{C}_1$.

Естественное преобразование $u : F \to G$ между парами функторов $F, G : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ есть отображение, ставящее в соответствие морфизм $u(z)$ из $\mathcal{C}_2$ некоторому объекту z из $\mathcal{C}_1$, такое, что

$$\begin{array}{lll} (i) & u(z) \in (F(z), G(z)) & z \in \mathcal{C}_1 \\ (ii) & F(f) \cdot u(z) = u(z_1) \cdot G(f) & f \in (z, z_1). \end{array}$$

u представляет естественный *изоморфизм*, если только $u(z)$ есть изоморфизм для любого $z \in \mathcal{C}_1$. В этом случае говорят, что F и G *изоморфны* и пишут, $F \sim G$.

Изоморфизм категорий представляет собой функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, для которого существует другой функтор $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ такой, что

$$G \circ F = 1_{\mathcal{C}_1}, \quad F \circ G = 1_{\mathcal{C}_2} \ .$$

Если

$$G \circ F \sim 1_{\mathcal{C}_1}, \quad F \circ G \sim 1_{\mathcal{C}_2} \ ,$$

то говорят, что F – *эквивалентность*. Если F – изоморфизм (эквивалентность), то $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ изоморфны (эквивалентны). Другими словами, F является эквивалентностью, если и только если он полный, верный и плотный.

7.2. C^*–категории

Категория $\mathcal{C}$ называется C^*-категорией, если множество морфизмов (z, z_1) между двумя объектами z, z_1 образует комплексное банахово пространство и композиция между морфизмами есть билинейное отображение $t, s \to t \cdot s$ с $||t \cdot s|| \leq ||t|| \cdot ||s||$; в этой категории действует контравариантный функтор $*$, действующий на объектах тождественно, поэтому норма морфизма удовлетворяет C*-свойству: $||r^* \cdot r|| = ||r||^2$ для любого $r \in (z, z_1)$. Если $\mathcal{C}$ is a C^*-категория, то множество (z, z) является C^*-алгеброй для каждого z.

Положим, что $\mathcal{C}$ есть C^*-категория. Морфизм $v \in (z, z_1)$ называется изометрией, если $v^* \cdot v = 1_z$; унитарным, если он является изометрией и удовлетворяет соотношению $v \cdot v^* = 1_{z_1}$. Свойство унитарности определяет отношения эквивалентности во множестве объектов категории. Обозначим через $[z]$ унитарно эквивалентные классы объекта z. Объект z называется неприводимым, если $(z, z) = \mathbb{C} \cdot 1_z$. $\mathcal{C}$ называется замкнутой относительно подобъектов, если для каждого ортопроектора $e \in (z, z)$, $e \neq 0$ существует изометрия $v \in (z_1, z)$ такая, что $v \cdot v^* = e$. $\mathcal{C}$ называется замкнутой относительно прямых сумм, если для заданных z_i $i = 1, 2$ существует объект z и две изометрии $w_i \in (z_i, z)$ такие, что $w_1 \cdot w_1^* + w_2 \cdot w_2^* \; = \; 1_z$.

7.3. Симметрические тензорные C^*-категории

Тензорная C^*-категория $\mathcal{C}$ - C*-категория, снабженная тензорным произведением $\otimes$. Это означает, что каждой паре объектов z, z_1 соответствует объект $z \otimes z_1$, и $\mathcal{C}$ имеет тождественный объект (единицу)ι такой, что $z \otimes \iota = z = \iota \otimes z$. При этом для двух морфизмов $t \in (z, z_1)$ и $s \in (z_2, z_3)$ существует морфизм $t \otimes s \in (z \otimes z_2, z_1 \otimes z_3)$. Отображение $t, s \to t \otimes s$ является ассоциативным, билинейным, а также удовлетворяет условиям

$$1_\iota \otimes t = t = t \otimes 1_\iota, \qquad (t \otimes s)^* = t^* \otimes s^*,$$

а правило

$$(t \otimes s) \cdot (t_1 \otimes s_1) = t \cdot t_1 \otimes s \cdot s_1,$$

имеет место, если только определена правая часть.

Такие категории часто называют строго (strict) моноидальными, которые вкратце можно определить как тройку $(\mathcal{C}, \otimes, \iota)$, где $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ есть ассоциативный билинейный функтор (тензорное произведение), коммутирующий с операцией сопряжения $_*$. $\mathcal{C}$ называется *симметрическим*, если имеет место перестановочная симметрия. Это означает, что определено отображение $\varepsilon : \mathcal{C} \ni z_1, z_2 \longrightarrow \varepsilon(z_1, z_2) \in (z_1 \otimes z_2, z_2 \otimes z_1)$, удовлетворяющее условиям:

(a) $\varepsilon(z_3, z_4) \cdot t \otimes s \; = \; s \otimes t \cdot \varepsilon(z_1, z_2)$,

(b) $\varepsilon(z_1, z_2)^* \; = \; \varepsilon(z_2, z_1)$,

(c) $\varepsilon(z_1, z_2 \otimes z) \; = \; 1_{z_2} \otimes \varepsilon(z_1, z) \cdot \varepsilon(z_1, z_2) \otimes 1_z$,

(d) $\varepsilon(z_1, z_2) \cdot \varepsilon(z_2, z_1) \; = \; 1_{z_2 \otimes z_1}$, где $t \in (z_2, z_4), s \in (z_1, z_3)$.

Левое обратное отображение объекта z есть множество ненулевых линейных отображений $\phi^z = \{\phi^z_{z_1,z_2} : (z \otimes z_1, z \otimes z_2) \longrightarrow (z_1, z_2)\}$, удовлетворяющих

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \phi^z_{z_3,z_4}(1_z \otimes t \cdot r \cdot 1_z \otimes s^*) = t \cdot \phi^z_{z_1,z_2}(r) \cdot s^*,\\
&(b) \quad \phi^z_{z_1 \otimes z_3, z_2 \otimes z_3}(r \otimes 1_{z_3}) = \phi^z_{z_1,z_2}(r) \otimes 1_{z_3},\\
&(c) \quad \phi^z_{z_1,z_1}(s_1^* \cdot s_1) \geq 0,\\
&(d) \quad \phi^z_{\iota,\iota}(1_z) = 1,
\end{aligned}$$

где $s \in (z_1, z_3)$, $t \in (z_2, z_4)$, $r \in (z \otimes z_1, z \otimes z_2)$ и $s_1 \in (z \otimes z_1, z \otimes z_1)$.

Говорят, что $\mathcal{C}$ имеет *левое обратное*, если любой объект этой категории имеет левое обратное отображение.

Рассмотрим две симметрические тензорные C^*-категории $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. Пусть $(\otimes_1, \varepsilon_1)$ и $(\otimes_2, \varepsilon_2)$ – соответствующие тензорные произведения и перестановочные симметрии в этих категоряих. $^*-$функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ называется *симметрическим тензорным $^*-$функтором*, если для любых пар объектов z_1, z_2 и любых пар морфизмов категории $\mathcal{C}_1$ справедливо:

$$\begin{aligned}
F(z \otimes_1 z_1) &= F(z) \otimes_2 F(z_1)\ ,\\
F(t \otimes_1 s) &= F(t) \otimes_2 (F(s)\ ,\\
F(\varepsilon_1(z, z_1)) &= \varepsilon_2(F(z), F(z_1))\ .
\end{aligned}$$

Две симметрические тензорные C^*-категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ называются эквивалентными (изоморфными), если существует симметрический тензорный $^*-$функтор $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, являющийся эквивалентностью (изоморфизмом).

Тензорное естественное преобразование $u : F \to G$ между двумя симметрическими тензорными $^*-$функторами $G, F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ есть такое естественное преобразование, что $u(z \otimes_1 z_1) = u(z) \otimes_2 u(z_1)$. Говорят, что имеет место *тензорный естественный изоморфизм* (*тензорная естественная унитарность*), если это естественный изоморфизм (естественная унитарность).

7.4. Статистика и сопряжение

Пусть $\mathcal{C}$ - симметрическая тензорная C^*-категория с левым обратным отображением. Говорят, что объект z имеет *конечную* статистику, если он допускает *стандартное левое обратное* такое, что левое обратное ϕ^z удовлетворяет соотношению

$$\phi^z_{z,z}(\varepsilon(z,z)) \cdot \phi^z_{z,z}(\varepsilon(z,z)) = c \cdot 1_z \text{ with } c > 0.$$

Полная подкатегория $\mathcal{C}_f$ категории $\mathcal{C}$, объекты которой имеют *конечную статистику*, замкнута относительно прямой суммы, подобъектов, тензороного произведения и эквивалентности. Любой объект из $\mathcal{C}_f$ представляет собой прямую сумму неприводимых объектов. Если задан неприводимый объект z из $\mathcal{C}_f$ и левое обратное ϕ^z для z, то

$$\phi^z_{z,z}(\varepsilon(z,z)) = \lambda(z) \cdot 1_z \ .$$

Число $\lambda(z)$ представляет инвариант класса эквивалентности объекта z и называется *статистическим параметром.* Этот инвариант представляет собой произведение двух инвариантов:

$$\lambda(z) = \chi(z) \cdot d(z)^{-1} \ \text{ где } \ \chi(z) \in \{1, -1\}, \quad d(z) \in \mathbb{N}$$

Возможная статистика объекта z классифицируется с помощью *статистической фазы* $\chi(z)$, которая разделяет пара-бозе (1) и пара-ферми (-1) статистики, и т.н. *статистической размерностью* $d(z)$, которая определяет порядок парастатистики. Обычным Бозе и Ферми статистикам соответствует $d(z) = 1$.

Объект z имеет *сопряжение*, если существует объект $\bar{z}$ и пара морфизмов $r \in (\iota, \bar{z} \otimes z)$, $\bar{r} \in (\iota, z \otimes \bar{z})$, которые удовлетворяют *уравнениям сопряжения*

$$\bar{r}^* \otimes 1_z \cdot 1_z \otimes r = 1_z, \quad r^* \otimes 1_{\bar{z}} \cdot 1_{\bar{z}} \otimes \bar{r} = 1_{\bar{z}}.$$

Свойство сопряжения устойчиво относительно подобъектов, прямых сумм, тензорного произведения и эквивалентности. Отсюда следует, что «*если z имеет сопряжение, то z имеет конечную статистику*». Рассмотрим две симметрические тензорные C^*-категории $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ и пусть $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ – полный и верный симметрический тензорный *-функтор. Пусть $r \in (\iota, \bar{z} \otimes_1 z)$ и $\bar{r} \in (\iota, z \otimes_1 \bar{z})$ – решения уравнений сопряжения для z и $\bar{z}$. Тогда пара $F(r) \in (\iota, F(\bar{z}) \otimes_2 F(z))$ и $F(\bar{r}) \in (\iota, F(z) \otimes_2 F(\bar{z}))$ представляет решения уравнений сопряжения в $\mathcal{C}_2$ в соответствии с $F(z)$ и $F(\bar{z})$. В частности, z является неприводимым если и только если $F(z)$ является неприводимым и имеет ту же статистику, что и z.

Симметрическая тензорная C^*-категория имеет *сопряжение*, если *любой* объект категории имеет сопряжение.

7.5. Дуальность Допличера-Робертса

Обозначим через $\overline{Sym}$ полную подкатегорию категории Sym, объектами которой являются симметрические тензорные C^*-категории с сопряжением. Главным техническим результатом теоремы Допличера-Робертса является теорема вложения: любой объект $\mathcal{C} \in \overline{Sym}$ можно вложить в категорию конечномерных гильбертовых пространств. Такое вложение есть пара (H, Hil), где $Hil \in \overline{Sym}$ категория конечномерных гильбертовых пространств и $H : \mathcal{C} \to Hil$ есть симметрический тензорный $^*-$функтор, являющийся полным и верным. Если (H, Hil) – вложение, множество

$$\mathrm{End}_{\otimes}(H) \equiv \{ \quad u : H \to H\},$$

удовлетворяющее правилу композиции $(u_1 \circ u)(z) \equiv u_1(z) \cdot u(z)$, есть компактная группа. Отсюда следует, что $\mathcal{C}$ является абстрактным дуальным объектом к $\mathrm{End}_{\otimes}(H)$. Эта группа ассоцируется с категорией $\mathcal{C}$ с точностью до изоморфизма. Это связано с тем, что вложение категории $\mathcal{C}$ определено не единственным образом и компактная группа, ассоциируемая с $\mathcal{C}$, зависит от выбора вложения. Однако для любого другого вложения (H', Hil') существует тензорная естественная унитарная эквивалентность

$$w : H \to H',$$

сопоставляющая любому объекту $z \in \mathcal{C}$ унитарный оператор $w(z)$, действующий из гильбертова пространства $H(z)$ в гильбертово пространство

$H'(z)$. w сохраняет тензорные произведения

$$w(z \otimes z_1) = w(z) \otimes' w(z_1)\ , \qquad z, z_1 \in \mathcal{C},$$

где $\otimes'$ есть тензорное произведение в категории Hil', и $w(z_1) \cdot H(t) = H'(t) \cdot w(z)$ для любых $z, z_1 \in \mathcal{C}$ и $t \in (z, z_1)$. Отсюда следует, что отображение

$$\mathrm{End}_{\otimes}(H) \ni u \to w \circ u \circ w^* \in \mathrm{End}_{\otimes}(H')$$

представляет изоморфизм групп, где

$$(w \circ u \circ w^*)(z) \equiv w(z) \cdot u(z) \cdot w^*(z), \qquad z \in \mathcal{C}.$$

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}$ – категории и (H, Hil), (H_1, Hil) – выбранные вложения. Рассмотрим полный и верный симметрический тензорный *-функтор $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$. Тогда пара $(H \circ F_1, Hil)$ обеспечивает другое вложение для $\mathcal{C}_1$. Обозначим через w_{F_1} тензорную естественную унитарную эквивалентность $w_{F_1} : H_1 \to H \circ F_1$ ассоциируемую с вложениями (H_1, Hil) и $(H \circ F_1, Hil)$. Для $u \in \mathrm{End}_{\otimes}(H)$ определим

$$\alpha_{F_1}(u)(z_1) \equiv w^*_{F_1}(z_1) \circ u(F(z_1)) \circ w_{F_1}(z_1), \qquad z_1 \in \mathcal{C}_1.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{F_1} : \mathrm{End}_{\otimes}(H) \to \mathrm{End}_{\otimes}(H_1)$$

есть морфизм групп. Рассмотрим теперь следующую категорию $\mathcal{C}_2$ и пусть (H_2, Hil_2) – вложение этой категории. Если $F_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ есть функтор, то существует тензорная естественная унитарная эквивалентность $w_{F_1} : H_2 \to H_1 \circ F_2$ и морфизм групп

$$\alpha_{F_2} : \mathrm{End}_{\otimes}(H_1) \to \mathrm{End}_{\otimes}(H_2)$$

определенный для любого $u_1 \in \mathrm{End}_{\otimes}(H_1)$ как

$$\alpha_{F_2}(u_1)(z_2) = w^*_{F_2}(z_2) \cdot u_1(F_2(z_2)) \cdot w_{F_2}(z_2)\ , \qquad z_2 \in \mathcal{C}_2.$$

Заметим, что $\alpha_{F_2} \circ \alpha_{F_1} : \mathrm{End}_{\otimes}(H) \to \mathrm{End}_{\otimes}(H_2)$. В частности, для $u \in \mathrm{End}_{\otimes}(H)$ и $z_2 \in \mathcal{C}_2$ имеем, что

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{F_2} \circ \alpha_{F_1})(u)(z_2) = \\
&\qquad = w^*_{F_2}(z_2) \cdot \alpha_{F_1}(u)(F_2(z_2)) \cdot w_{F_2}(z_2) \\
&\qquad = w^*_{F_2}(z_2) \cdot w^*_{F_1}(F_2(z_2)) \cdot u(F_1F_2(z_2)) \cdot w_{F_1}(F_2(z_2)) \cdot w_{F_2}(z_2).
\end{aligned}$$

Рассмотрим тензорную естественную унитарную эквивалентность $w_{F_1F_2} : H_2 \to H \circ F_1 \circ F_2$ и соответствующий морфизм групп $\alpha_{F_1F_2} : \mathrm{End}_\otimes(H) \to \mathrm{End}_\otimes(H_2)$, определенный для любого $u \in \mathrm{End}_\otimes(H)$ как

$$\alpha_{F_1F_2}(u)(z_2) = w^*_{F_1F_2}(z_2) \cdot u(F_1F_2(z_2)) \cdot w_{F_1F_2}(z_2)\ , \qquad z_2 \in \mathcal{C}_2\ .$$

Теперь определим

$$w_{F_1,F_2;F_1F_2}(z_2) \equiv w^*_{F_2}(z_2) \cdot w^*_{F_1}(F_2(z_2)) \cdot w_{F_1F_2}(z_2)\ , \qquad z_2 \in \mathcal{C}_2\ .$$

Отсюда следует, что $w_{F_1,F_2;F_1F_2}$ представляет элемент группы $\mathrm{End}_\otimes(H_2)$ и

$$(\alpha_{F_2} \circ \alpha_{F_1})(u)(z_2) = \mathrm{ad}_{w_{F_1,F_2;F_1F_2}(z_2)}(\alpha_{F_1F_2}(u)(z_2)).$$

8. Упражнения

1) Докажите, что следующие алгебры являются C^*-алгебрами:

   а) поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ с нормой $\|z\| = |z|$;

   б) пространство $C(X)$ непрерывных комплекснозначных функций на компактном топологическом пространстве X с нормой

   $$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

2) Докажите, что инволюция * в C^*-алгебре $\mathscr{U}$ изометрична: $\|A^*\| = \|A\|$ для любого элемента $A \in \mathscr{U}$.

3) Докажите, что в коммутативной C^*-алгебре $\mathscr{U}$ справедливо равенство: $\|A^2\| = \|A\|^2$ для любого $A \in \mathscr{U}$.

4) Докажите, что в унитальной C^*-алгебре $\|\mathbf{1}\| = 1$.

   Указание: покажите, что $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$.

5) Докажите, что если A – эрмитов элемент в унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$, то элемент $U = e^{iA}$ является унитарным и $\|U\| = 1$.

6) Докажите, что любой элемент A в унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$ можно представить в виде $A = X + iY$, где X и Y два эрмитовых элемента в $\mathscr{U}$.

7) Докажите, что любой элемент A в унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$ можно представить в виде линейной комбинации четырех унитарных элементов.

   Указание: покажите, что любой эрмитовый элемент X с нормой $\|X\| \leq 1$ можно представить в виде $X = \frac{1}{2}(U + U^*)$, где $U = X + i(1 - X^2)^{1/2}$ – унитарен. Затем воспользуйтесь утверждением упражнения 6.

8) Докажите, что для любого элемента A в унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$ его спектр $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$.

   Указание: покажите, что если $\|A\| < 1$, то элемент $\mathbf{1} + A$ обратим и обратный элемент задается сходящимся рядом:

$$(\mathbf{1} + A)^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A^n; \tag{8.1}$$

   выведите из этого, что если $|\lambda| > \|A\|$, то элемент $\lambda - A$ обратим.

9) Докажите, что если элементы A и B в унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$ коммутируют, то $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.

10) Докажите, что спектр любого элемента замкнут и ограничен, а значит компактен.

    Указание: используя формулу (8.1), покажите, что элемент, близкий к обратимому, обратим.

11) Докажите, что число $-i$ не может содержаться в спектре эрмитова элемента A в унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$.

    Указание: предположив противное, покажите, что тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ число $t + 1$ будет содержаться в спектре элемента $t \cdot \mathbf{1} + iA$, и выведите отсюда, что $(t + 1)^2 \leq t^2 + \|A^2\|$.

12) Докажите, что спектр эрмитова элемента C^*-алгебры состоит из вещественных чисел.

    Указание: воспользуйтесь утверждением упражнения 11.

13) Докажите, что если A – эрмитов элемент унитальной C^*-алгебры $\mathscr{U}$, то $\rho(A) = \|A\|$.

Указание: воспользуйтесь формулой для спектрального радиуса (2.1), выбрав $n = 2^k$.

14) Докажите, что если A – нормальный элемент унитальной C^*-алгебры $\mathscr{U}$, то $\rho(A) = \|A\|$.

    Указание: воспользуйтесь указанием к упражнению 13.

15) Докажите, что в коммутативной C^*-алгебре $\mathscr{U}$ справедливо: $\rho(A) = \|A\|$ для любого $A \in \mathscr{U}$.

    Указание: воспользуйтесь указанием к упражнению 13.

16) Докажите, что если $\mathscr{U}$ – унитальная C^*-алгебра, то для любого ненулевого мультипликативного функционала F на $\mathscr{U}$ верно равенство: $F(\mathbf{1}) = 1$.

17) Докажите, что если F – мультипликативный функционал на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$, то F ограничен и $\|F\| = 1$.

    Указание: покажите, что $F(A) \subset \sigma(A)$ для любого $A \in \mathscr{U}$.

18) Докажите, что если F – мультипликативный функционал на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$, то для любого эрмитова элемента $A \in \mathscr{U}$ справедливо $F(A) \in \mathbb{R}$.

    Указание: воспользуйтесь утверждением упражнения 12 и указанием к упражнению 17.

19) Докажите, что если F – мультипликативный функционал на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$, то для любого элемента $A \in \mathscr{U}$ справедливо $F(A^*) = \overline{F(A)}$.

    Указание: воспользуйтесь утверждениями упражнений 6 и 20.

20) Докажите, что если F – положительный линейный функционал на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$, то для любого эрмитова элемента $A \in \mathscr{U}$ справедливо $F(A) \in \mathbb{R}$.

21) Докажите, что если F – положительный линейный функционал на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$, то для любого элемента $A \in \mathscr{U}$ справедливо $F(A^*) = \overline{F(A)}$.

22) Докажите, что положительный элемент A унитальной C^*-алгебры $\mathscr{U}$ обладает корнем, т.е. существует положительный элемент $B \in \mathscr{U}$, такой, что $B^2 = A$.

Указание: покажите, что если Ω – локально компактное хаусдорфово пространство, то элемент $f \in C_0(\Omega)$ положительный тогда и только тогда, когда $f(\omega) \geq 0$ для любого $\omega \in \Omega$. Затем используйте представление Гельфанда.

23) Докажите, что элемент A унитальной C^*-алгебры $\mathscr{U}$ положителен тогда и только тогда, когда существует $B \in \mathscr{U}$ такой, что $A = B^*B$.

Указание: решение смотри в [3].

24) Докажите, что равенство $\langle X, Y \rangle = F(Y^*X)$, где X и Y – элементы унитальной C^*-алгебры $\mathscr{U}$ и F – положительный линейный функционал на $\mathscr{U}$, определяет на $\mathscr{U}$ положительную билинейную форму.

25) Докажите справедливость неравенства Коши – Буняковского – Шварца (3.1).

Указание: воспользуйтесь утверждением упражнения 24.

26) Докажите, что если $\mathscr{U}$ – унитальная C^*-алгебра, то для любого эрмитова элемента $A \in \mathscr{U}$ справедливо неравенство:

$$-\|A\| \cdot \mathbf{1} \leq A \leq \|A\| \cdot \mathbf{1}.$$

Указание: покажите, что если элемент $\|A\| \cdot \mathbf{1} - A$ не является положительным, то спектр элемента A будет содержать числа, большие $\|A\|$, что противоречит утверждению упражнения 13.

27) Докажите, что если $\mathscr{U}$ – унитальная C^*-алгебра и F – положительный линейный функционал на $\mathscr{U}$, то $\|F\| = F(\mathbf{1})$.

Указание: примените неравенство Коши – Буняковского – Шварца (3.1) к $F(X) = F(\mathbf{1} \cdot X) = F(\mathbf{1}^* \cdot X)$. Затем воспользуйтесь утверждением упражнения 26 для доказательства неравенства:

$$F(X^*X) \leq \|X^*X\| \cdot F(\mathbf{1}).$$

И наконец получите неравенство

$$\frac{|F(X)|}{\|X\|} \leq F(\mathbf{1}),$$

из которого следует утверждение упражнения.

28) Докажите, что если $\mathscr{U}$ – унитальная C^*-алгебра и F – положительный линейный функционал на $\mathscr{U}$, то для любых $A, B \in \mathscr{U}$ справедливо неравенство:

$$F(B^* A^* AB) \leq \|A^* A\| \cdot F(B^* B).$$

Указание: рассмотрите отображение $\varphi : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\varphi(X) = \frac{F(B^* X B)}{F(B^* B)},$$

покажите, что φ – это положительный линейный функционал. Используя утверждение упражнения 27 покажите, что $\|\varphi\| = 1$. Затем воспользуйтесь неравенством:

$$|\varphi(A^* A)| \leq \|\varphi\| \cdot \|A^* A\|.$$

29) Докажите, что множество

$$J = \{X \in \mathscr{U} \mid F(X^* X) = 0\},$$

где F – положительный линейный функционал на $\mathscr{U}$, является левым идеалом в унитальной C^*-алгебре $\mathscr{U}$.

Указание: воспользуйтесь утверждением упражнения 28.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брателли, У., Робинсон, Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика : *c*- и *w*-алгебры. Группы симметрий. Разложение состояний / У. Браттели, Д. Робинсон; пер. с англ. А. В. Булинского. – Москва : Мир, 1982. – 511 с.

2. Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1976. – 543 с.

3. Мерфи, Джерард Дж. C^*-алгебры и теория операторов / Дж. Мерфи ; пер. с англ. ; под ред. А. Я. Хелемского. – Москва : Факториал, 1997. – 336 с.

4. Хелемский, А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии / А. Я. Хелемский. – Москва : Наука, 1989. – 463 с.

Учебное издание

Ситдиков Айрат Салимович
Липачева Екатерина Владимировна

C^*-АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебно-методическое пособие

Кафедра высшей математики КГЭУ

Подписано в печать 11.12.2020.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 1,7. Заказ № 293/эл.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ
420066, г. Казань, ул. Красносельская, 51