УДК 514.764

МЕТРИКА 6-МЕРНОГО ПСЕВДОРИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

З.Х. Закирова

Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Россия
zakirova-kgeu@mail.ru

Резюме: *В работе ведется исследование 6-мерных псевдоримановых пространств, которые допускают проективные движения, то есть группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта. В работе найдена метрика 6-мерного пространства типа*.

Ключевые слова: *дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.*

Благодарности: *Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 16-01-00291 А.*

METRICA OF 6-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACE OF THE SPECIAL TYPE

Z.Kh. Zakirova

Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia
zakirova-kgeu@mail.ru

Abstract: *In this note, we study an 6-dimensional pseudo-Riemannian space, which admits projective motions, i. e. continuous transformation groups preserving geodesics. Remind that in order to find a pseudo-Riemannian space admitting a nonhomothetic infinitesimal projective transformation, one needs to integrate the Eisenhart equation. In note we find a metrics 6-dimensional spaces of the [(51)] type.*

Keywords: *differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, systems of partial differential equations.*

Acknowledgments: *The work is partially supported by the grant of the Russian Foundation for basic research № 16-01-00291 A.*

Введение

Линия $x^i(t)$ называется геодезической, если ее вектор скорости $T^i = dx^i / dt$ параллелен вдоль нее самой. Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

где Γ^i_{jk} – компоненты связности псевдориманова многообразия (M, g).

Преобразование f псевдориманова многообразия M на себя называется *проективным* преобразованием, если оно переводит геодезические линии в геодезические линии.

Векторное поле X называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки, состоит из локальных проективных преобразований.

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [1]

$$\nabla_Y(L_X Z - \nabla_X Z) - (L_X - \nabla_X)\nabla_Y Z = R(X,Y)Z - \varphi(Y)Z - Y\varphi(Z)$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y, Z на M, где R – тензор кривизны.

Если M – псевдориманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇, то последнее условие эквивалентно двум уравнениям [1]:

$$L_X g = h,$$

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi,$$

где $(Y,Z,W) \in T(M)$, $\varphi = \dfrac{1}{n+1}\operatorname{div}X$. Первое уравнение называется обобщенным уравнением Киллинга, второе уравнение называется уравнением Эйзенхарта.

Впервые проблема определения 2-мерных римановых многообразий, которые допускают проективные движения или инфинитезимальные проективные преобразования, рассматривались С. Ли и М. Кенигсом [2]. Для риманова многообразия с размерностью больше чем 2 похожая проблема была решена Г. Фубини в [3] и А.С. Солодовниковым в [4], в их трудах содержится классификация римановых пространств с размерностью больше 2 по локальным группам проективных преобразований более широким, чем группы гомотетий. В дальнейшем в работе [5] А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия с сигнатурой $[+---...-]$ размерности больше 3, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. В работах [6–8] автором были исследованы проективно-групповые свойства 6-мерных псевдоримановых пространств с сигнатурой $[++----]$. Данная проблема в общем случае для n-мерного псевдориманова пространства с произвольной сигнатурой не решена.

Для того, чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта [1]

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + 2g_{jk}\varphi_{,i}.$$

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнения Эйзенхарта, называются h-пространствами. Определение таких пространств зависит от типа h-пространства, т.е. от типа билинейной формы $L_X g_{ij}$, определенной характеристикой λ-матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$. Если характеристика тензора $L_X g_{ij}$ есть [abc...], то соответствующее пространство называется h-пространством типа [abc...]. Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры h-пространства. В работе найдена метрика 6-мерного h-пространства типа $[(51)]$ с сигнатурой $[++----]$.

Интегрирование уравнения Эйзенхарта будет проделано с помощью техники интегрирования в косонормальном репере [5]. В косонормальном репере уравнение Эйзенхарата имеет вид

$$X_r\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\bar{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \bar{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \bar{g}_{pr}X_q\varphi + \bar{g}_{qr}X_p\varphi, \qquad (1)$$

где

$$X_r\varphi \equiv \underset{r}{\xi}^i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}_{i,j} \underset{q}{\xi}^i \underset{r}{\xi}^j, \quad a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij},$$

$\underset{i}{\xi}^j$ – компоненты косонормального репера, $\bar{g}_{pr} = e_p \delta^r_{\tilde{p}}$ и $\bar{a}_{pq}$ – канонические формы тензоров g_{pr}, a_{pq}, соответственно, $\gamma^p_{lk} = e_p \gamma_{l\tilde{p}k}$ – компоненты связности в косонормальном репере, $p, q, r = 1, ..., n$.

Коммутаторы векторных полей X_q и X_r определяются по формуле [5]

$$[X_q, X_r] = \sum_{p=1}^{n} e_p(\gamma_{pqr} - \gamma_{prq}) X_{\tilde{p}}. \tag{2}$$

Отображение ~, которое переводит одни индексы в другие, было введено в определении косонормального репера. В нашем случае, для *h*-пространства типа [(51)]: $\tilde{1} = 5, \tilde{2} = 4, \tilde{3} = 3, \tilde{4} = 2, \tilde{5} = 1, \tilde{6} = 6$.

Нахождение метрики

В случае *h*-пространства типа [(51)] имеется один непростой элементарный делитель λ -матрицы, которому соответствует одно изотропное главное направление. Канонические значения имеют вид

$$\bar{g}_{ij} dx^i dx^j = e(2dx^1 dx^5 + 2dx^2 dx^4 + (dx^3)^2) + e_6 (dx^6)^2,$$

$$\bar{a}_{ij} dx^i dx^j = e\lambda(2dx^1 dx^5 + 2dx^2 dx^4 + (dx^3)^2) + 2edx^2 dx^5 + 2edx^3 dx^4 + e_6 \lambda (dx^6)^2,$$

где λ – корень уравнения $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0,\ e, e_6 = \pm 1.$

Подставив канонические значения в уравнение (1) с учетом $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e$, получим

$$X_r \lambda = 0, \ \gamma_{pqr} = 0 \quad (p \neq 5, q \neq 6), \tag{3}$$

γ_{56r} произвольные, $p, q, r = 1, ..., 6$. Отсюда следует, что $\varphi = \mathrm{const}.$

Для того, чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$X_q \theta = \underset{q}{\xi}^i \partial_i \theta = 0, \quad (q = 1, ..., m, i = 1, ..., n, m < n),$$

где $\underset{q}{\xi}^i$ – компоненты косонормального репера, была вполне интегрируемой, т.е. чтобы она допускала *n-m* независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов (2) системы линейно выражались через операторы X_q.

Используя формулы (2) и (3), составим коммутаторы операторов:

$$(X_\alpha, X_\beta) = 0, \quad (X_\alpha, X_5) = -e_6 \gamma_{65\alpha} X_6, \tag{4}$$

$$(X_\alpha, X_6) = -e\gamma_{56\alpha} X_1, \quad (X_5, X_6) = -e\gamma_{565} X_1 + e_6 \gamma_{656} X_6,$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$.

Вполне интегрируемыми системами из равенств (4) являются системы $X_i \theta = 0\ (i \neq 2),\ X_j \theta = 0\ (j \neq 3),\ X_k \theta = 0\ (k \neq 4),\ X_m \theta = 0\ (m \neq 5),$ которые имеют по одному решению $\theta^2, \theta^3, \theta^4$ и θ^5 соответственно. Системы $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_4\theta = 0$ и $X_2\theta = X_3\theta = X_4\theta = 0$ также вполне интегрируемые и имеют решения θ^5, θ^6 и $\theta^1, \theta^5, \theta^6$. За счет преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$ в новой системе, опустив штрихи, определим следующие компоненты косонормального репера:

$$\underset{\alpha}{\xi}^i = P_\alpha(x)\delta^i_\alpha, \quad \underset{5}{\xi}^\beta = \underset{6}{\xi}^\beta = \underset{6}{\xi}^5 = 0 \;\; (\beta \neq 1), \qquad (5)$$

где $P_\alpha(x)$ – произвольные функции.

Из соотношений (4) с учетом (3) и (5), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных на компоненты косонормального репера

$$1. \; \underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha \underset{\beta}{\xi}^\beta = \underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha \underset{5}{\xi}^5 = 0, \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$2. \; \underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha \underset{5}{\xi}^1 = -e_6 \gamma_{65\alpha} \underset{6}{\xi}^1,$$

$$3. \; \underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha \underset{5}{\xi}^6 = -e_6 \gamma_{65\alpha} \underset{6}{\xi}^6,$$

$$4. \; \underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha \underset{6}{\xi}^1 = -e \gamma_{56\alpha} \underset{1}{\xi}^1,$$

$$5. \; \underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha \underset{6}{\xi}^6 = 0,$$

$$6. \; \underset{5}{\xi}^q \partial_q \underset{6}{\xi}^1 - \underset{6}{\xi}^r \partial_r \underset{5}{\xi}^1 = -e \gamma_{565} \underset{1}{\xi}^1 + e_6 \gamma_{656} \underset{6}{\xi}^1,$$

$$7. \; \underset{5}{\xi}^q \partial_q \underset{6}{\xi}^6 - \underset{6}{\xi}^r \partial_r \underset{5}{\xi}^6 = e_6 \gamma_{656} \underset{6}{\xi}^6,$$

где $q = 1, 5, 6, r = 1, 6$.

Интегрируя уравнения 1 и 5, после подходящих преобразований координат получим

$$\underset{\alpha}{\xi}^\alpha = \underset{5}{\xi}^5 = 1, \quad \underset{6}{\xi}^6 = F(x^5, x^6),$$

следовательно, по формуле (см. [5]) $g^{ij} = \sum_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi}^i \underset{\tilde{h}}{\xi}^j$, найдем

$$g^{24} = g^{33} = g^{15} = 0, \quad g^{66} = \omega(x^5, x^6).$$

С помощью уравнений (2–4) можно показать, что $\underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha g^{11} = \underset{\alpha}{\xi}^\alpha \partial_\alpha g^{16} = 0$, отсюда, g^{11} и g^{16} зависят только от переменных x^5, x^6. За счет координатного преобразования можно сделать $g^{16'} = 0, g^{66'} = 1$.

Вычислив ковариантные компоненты метрического тензора рассматриваемого пространства, а затем по формулам (см. [5]) $\underset{h}{\xi}_i = g_{ij} \underset{h}{\xi}^j$ и $a_{ij} = \sum_{h,l=1}^{6} e_h e_l \bar{a}_{hl} \underset{\tilde{h}}{\xi}_i \underset{\tilde{l}}{\xi}_j$ компоненты векторов репера и компоненты тензоров a_{ij}, h_{ij}, получим следующую теорему.

Теорема

Если симметрический тензор h_{ij} типа [(51)] и скаляр φ удовлетворяют в V^6 с метрикой g_{ij} уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой g_{ij}, h_{ij} и φ определяются формулами

$$g_{ij}dx^i dx^j = e((dx^3)^2 + 2dx^2dx^4 + 2dx^1dx^5 + \omega(dx^5)^2) + e_6(dx^6)^2 ,$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \lambda g_{ij}dx^i dx^j + 2dx^3dx^4 + 2dx^2dx^5 , \quad h_{ij} = a_{ij} + cg_{ij} ,$$

где $\lambda, c - \mathrm{const}, \omega(x^5, x^6)$ – произвольная функция указанных переменных.

Заключение

В данной работе было найдено 6-мерное h-пространство типа [(51)], допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование. Следующая задача – это исследование проективно-групповых свойств рассматриваемого пространства. Остается открытой проблема о восстановлении векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование и проблема о структуре проективной алгебры Ли. Решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения Киллинга.

Литература

1. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М: ИЛ. 1948.

2. Konigs M.G. Lecons sur la theorie generalle des surfaces // Appl. II to G. Darboux. 1896.

3. Fubini G. Sui gruppi transformazioni geodetiche // Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. 1903. № 2. P. 261–313.

4. Солодовников А.С. Проективные преобразования римановых пространств // Успехи Математических Наук. 1956. № 11. С. 45–116.

5. Аминова А.В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий // Успехи Математических Наук. 1995. № 1. С. 69–142.

6. Закирова З.Х. Жесткие 6-мерные h-пространства постоянной кривизны // Теоретическая и математическая физика. 2009. № 11. С. 293–299.

7. Закирова З.Х. О некоторых специальных решениях уравнения Эйзенхарта // Уфимский математический журнал. 2013. № 3. С. 41–53.

8. Закирова З.Х. О проективном движении в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2015. №5. С. 12–20.

Автор публикации

Закирова Зольфира Хаписовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Казанского государственного энергетического университета.

References

1. Eyzenhart L.P. Riemannian geometry. M.:IL. 1948.

2. Konigs M.G. Lecons sur la theorie generalle des surfaces // Appl. II to G. Darboux. IV. 1896. P. 368.

3. Fubini G. Sui gruppi transformazioni geodetiche // Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. 1903. № 2. P. 261–313.

4. Solodovnikov A.S. Projective transformations of the Riemannian spaces // Russian Mathematical Surveys. 1956. №11. P. 45–116.

5. Aminova A.V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentz manifolds // Russian Mathematical Surveys. 1995. №1. P. 69–142.

6. Zakirova Z.Kh. Rigid 6-dimensional h-spaces of constant curvature // Theoretical and Mathematical Physics. 2009. №3. P. 293–299.

7. Zakirova Z.Kh. On one special solution of the Eisenhart equation // Ufa Mathematical Journal. 2013. №3. P. 41–53.

8. Zakirova Z.Kh. On projective motion in the 6-dimensional pseudo-riemannian space of the special type // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2015. №5. P. 12–20.

Author of the publication

Zolfira Kh. Zakirova – Cand. Sci. (phys.-math.), Associate Professor of the Department of Mathematics, Kazan State Power Engineering University.

Дата поступления 12.02.2018.