ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 196, № 1
июль, 2018

 З. Х. Закирова[*]

О СТРУКТУРЕ ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЫ В ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проведено исследование n-мерных псевдоримановых пространств $V^n(g_{ij})$ с произвольной сигнатурой, которые допускают проективные движения, т. е. группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. В частности, найдена метрика псевдориманова пространства специального типа и установлены важные проективно-групповые свойства этого пространства.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, общая теория относительности, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9492

1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразование f псевдориманова многообразия M на себя называется *проективным преобразованием*, если оно переводит геодезические линии в геодезические линии.

Линия $x^i(t)$ называется *геодезической*, если ее вектор скорости $T^i = dx^i/dt$ остается параллельным самому себе при переносе вдоль кривой (см. книгу [1]): $\nabla_t T = 0$. Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,\frac{dx^k}{dt} = 0,$$

где Γ^i_{jk} – компоненты связности псевдориманова многообразия (M,g). Отметим, что здесь и далее по повторяющимся индексам идет суммирование.

Векторное поле X называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00291_а).

[*]Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия.
E-mail: zolya_zakirova@mail.ru

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [2]

$$\nabla_Y(L_X Z - \nabla_X Z) - (L_X - \nabla_X)\nabla_Y Z = R(X,Y)Z - \varphi(Y)Z - Y\varphi(Z) \tag{1}$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y, Z на M, где R – тензор кривизны.

Если M – псевдориманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇, то условие (1) эквивалентно уравнениям (см. работу [2])

$$L_X g = h, \tag{2}$$

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{3}$$

где $(Y,Z,W) \in T(M)$, $\varphi = \operatorname{div} X/(n+1)$. Уравнение (2) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, уравнение (3) называется *уравнением Эйзенхарта*.

В последние годы значительно возрос интерес к геометрическим свойствам многомерных пространств с нестандартными сигнатурами. В основном он связан с теорией струн, где временное(ые) направление(ия) в пространстве-времени связано(ы) с нестандартным знаком кинетического члена в действии лиувиллевского(их) поля(ей). Множество работ посвящено исследованию многомерных космологических моделей. Цель этих работ – установить, насколько далеко можно продвинуться в объяснении свойств четырехмерной Вселенной с помощью геометрических величин дополнительных измерений. Стоит отметить, что пространственно-временные симметрии порождают законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В частности, инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования приводят к фундаментальным полевым и механическим законам сохранения в форме квадратичных первых интегралов уравнений геодезических.

Впервые проблема определения двумерных римановых многообразий, которые допускают проективные движения или инфинитезимальные проективные преобразования, т. е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривались Ли и Кенигсом (см. книгу [3]). Другие важные результаты были получены Петровым в работе [4], где он классифицировал геодезически эквивалентные псевдоримановы пространства V^3. Для риманова многообразия с размерностью, большей двух, похожая проблема была решена Фубини в статье [5] и Солодовниковым в работе [6].

В работе [7] Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности не меньше трех, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры Ли. Автором настоящей статьи в кандидатской диссертации [8] были исследованы шестимерные псевдоримановы пространства с сигнатурой $[++----]$. Частично результаты были опубликованы в работах [9]–[13]. Данная проблема не решена для n-мерного псевдориманова пространства с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (3). Задача определения таких пространств зависит от типа h-пространств, т. е. от типа билинейной формы $L_X g$, которая определяется характеристикой Сегре λ-матрицы $h-\lambda g$ (см. статью [7]). Если характеристика тензора $L_X g$

есть $[abc\dots]$, то мы будем называть соответствующее пространство h-пространством типа $[abc\dots]$. Таким образом, псевдориманово пространство, для которого существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называется *h-пространством.*

Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры псевдориманова пространства. В частности, в случае лоренцевых многообразий возможны h-пространства типов $[11\dots1]$, $[21\dots1]$, $[31\dots1]$. Первый тип был исследован Фубини в работе [5] и Солодовниковым в статье [6], другие два были исследованы Аминовой в работе [7]. Целью настоящей работы является исследование n-мерного псевдориманова пространства $V^n(g_{ij})$ типа $[41\dots1]$.

Основной метод определения псевдоримановых многообразий, допускающих негомотетическую проективную группу G_r, был развит Аминовой (см. статью [7]). Используя в настоящей работе технику интегрирования в косонормальном (подвижном) репере, мы находим метрику рассматриваемого h-пространства.

Уравнение Эйзенхарта в косонормальном репере имеет вид [7]

$$X_r\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\bar{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \bar{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \bar{g}_{pr}X_q\varphi + \bar{g}_{qr}X_p\varphi, \qquad p,q,r = 1,\dots,n, \tag{4}$$

где

$$X_r\varphi \equiv \underset{r}{\xi}{}^i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}{}_{i,j}\underset{q}{\xi}{}^i\underset{r}{\xi}{}^j, \qquad a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij},$$

$\underset{i}{\xi}{}^j$ – компоненты косонормального репера, $\bar{g}_{pr} = e_p\delta^r_{\tilde{p}}$ и $\bar{a}_{pq}$ – канонические формы тензоров g_{pr}, a_{pq} соответственно, $\gamma^p_{lk} = e_p\gamma_{l\tilde{p}k}$ – компоненты связности в косонормальном репере X.

Коммутаторы векторных полей X_k и X_h определяются по формуле [7]

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^{n} e_l(\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk})X_{\tilde{l}}. \tag{5}$$

Отображение $\sim$, которое переводит одни индексы в другие, было введено в определении косонормального репера. Опуская громоздкое определение косонормального (подвижного) репера, достаточно привести несколько примеров, и читателям станет понятно действие отображения $\sim$. Например, для h-пространства типа $[221\dots1]$ $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$ и т.д.; для h-пространства типа $[321\dots1]$ $\tilde{1} = 3$, $\tilde{2} = 2$, $\tilde{3} = 1$, $\tilde{4} = 5$, $\tilde{5} = 4$, $\tilde{6} = 6$ и т.д. Для h-пространства типа $[41\dots1]$ $\tilde{1} = 4$, $\tilde{2} = 3$, $\tilde{3} = 2$, $\tilde{4} = 1$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$ и т.д.

Для n-мерного h-пространства типа $[41\dots1]$ канонические формы $\bar{g}_{pr}$ и $\bar{a}_{pq}$ имеют вид (см. работу [4])

$$\bar{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j = e(2\,dx^1\,dx^4 + 2\,dx^2\,dx^3) + \sum_{\sigma=5}^{n} e_\sigma\,dx^{\sigma^2},$$

$$\bar{a}_{ij}\,dx^i\,dx^j = e\lambda(2\,dx^1\,dx^4 + 2\,dx^2\,dx^3) + 2e\,dx^2\,dx^4 + e\,dx^{3^2} + \sum_{\sigma=5}^{n} e_\sigma\lambda_\sigma\,dx^{\sigma^2},$$

где $\sigma = 5, 6, \dots, n$, $e, e_\sigma = \pm1$, λ, λ_σ являются корнями характеристического уравнения $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$, причем $\lambda \neq \lambda_\sigma$, $\lambda_\sigma \neq \lambda_\tau$ при $\sigma \neq \tau$.

2. МЕТРИКА h-ПРОСТРАНСТВА ТИПА $[41\ldots 1]$

Подставляя канонические формы $\bar{g}_{pr}$ и $\bar{a}_{pq}$ в уравнение (4) и учитывая, что $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ (см. статью [7]), получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
X_r\lambda = 0 \quad (r \neq 4), \qquad X_r\lambda_\sigma = 0 \quad (r \neq \sigma), \qquad X_4(2\lambda - \phi) = X_\sigma(\lambda_\sigma - 2\phi) = 0,\\
\gamma_{314} = \frac{1}{2}eX_4\phi, \qquad \gamma_{413} = \gamma_{431} = \gamma_{422} = -eX_4\phi,\\
\gamma_{1\sigma4} = \gamma_{2\sigma3} = \gamma_{3\sigma2} = \gamma_{4\sigma1} = \frac{eX_\sigma\phi}{\lambda - \lambda_\sigma}, \qquad \gamma_{2\sigma4} = \gamma_{3\sigma3} = \gamma_{4\sigma2} = -\frac{eX_\sigma\phi}{(\lambda - \lambda_\sigma)^2},\\
\gamma_{3\sigma4} = \gamma_{4\sigma3} = \frac{eX_\sigma\phi}{(\lambda - \lambda_\sigma)^3}, \qquad \gamma_{4\sigma4} = -\frac{eX_\sigma\phi}{(\lambda - \lambda_\sigma)^4},\\
\gamma_{4\sigma\sigma} = \frac{e_\sigma X_4\phi}{\lambda - \lambda_\sigma}, \qquad \gamma_{\sigma\tau\sigma} = \frac{e_\sigma X_\tau\phi}{\lambda_\sigma - \lambda_\tau},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где $\sigma, \tau = 5, 6, \ldots, n$, $\sigma \neq \tau$, остальные инварианты γ_{pqr} равны нулю. Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$
X_q\theta = \underset{q}{\xi^i}\,\partial_i\theta = 0, \qquad q = 1, \ldots, m, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad m < n, \tag{7}
$$

где $\underset{q}{\xi^i}$ – компоненты косонормального репера, была вполне интегрируемой, т. е. чтобы она допускала $n - m$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы (см. работу [2])

$$
[X_q, X_r] = X_qX_r - X_rX_q = \sum_{p=1}^{n} e_p(\gamma_{pqr} - \gamma_{prq})X_{\tilde{p}} \tag{8}
$$

линейно выражались через операторы X_q.

Используя формулы (6) и (8), выпишем коммутаторы операторов X_i, $i = 1, \ldots, n$, в рассматриваемом h-пространстве:

$$
\begin{gathered}
(X_1, X_2) = 0, \quad (X_1, X_3) = 0, \quad (X_2, X_3) = 0, \quad (X_1, X_4) = e(\gamma_{314} - \gamma_{341})X_2,\\
(X_2, X_4) = -e\gamma_{242}X_3, \qquad (X_3, X_4) = e(\gamma_{134} - \gamma_{143})X_4,\\
(X_1, X_\sigma) = -e\gamma_{4\sigma1}X_1, \qquad (X_2, X_\sigma) = -e\gamma_{4\sigma2}X_1 - e\gamma_{3\sigma2}X_2,\\
(X_3, X_\sigma) = -e\gamma_{4\sigma3}X_1 - e\gamma_{3\sigma3}X_2 - e\gamma_{2\sigma3}X_3,\\
X_4, X_\sigma) = -e\gamma_{4\sigma4}X_1 - e\gamma_{3\sigma4}X_2 - e\gamma_{2\sigma4}X_3 - e\gamma_{1\sigma4}X_4 + e_\sigma\gamma_{\sigma4\sigma}X_\sigma,\\
(X_\sigma, X_\tau) = -e_\sigma\gamma_{\sigma\tau\sigma}X_\sigma + e_\tau\gamma_{\tau\sigma\tau}X_\tau.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Далее, составляя вполне интегрируемые системы (7) из (9), мы определяем допускаемые этими системами независимые решения, которые обозначим через θ^i. После чего с помощью преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$ мы можем обратить в нуль некоторые компоненты $\underset{q}{\xi^i}$ введенного выше косонормального репера. В частности, вполне интегрируемыми системами являются системы $X_p\theta = 0$ $(p \neq 4)$, $X_q\theta^\sigma = 0$ $(q \neq \sigma)$, $X_1\theta = X_\sigma\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_\sigma\theta = 0$ и $X_\sigma\theta = 0$. Легко заметить, что первая система имеет решение θ^4, вторая система – решение θ^σ, третья система – решения θ^2, θ^3, θ^4, четвертая – θ^3, θ^4, пятая – θ^1, θ^2, θ^3 и θ^4.

После преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$ в новой системе координат, опуская штрихи, находим

$$\underset{1}{\xi}^i = P(x)\delta^i_1, \qquad \underset{\sigma}{\xi}^i = Q_\sigma(x)\delta^i_\sigma, \qquad \underset{2}{\xi}^3 = \underset{2}{\xi}^4 = \underset{3}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^\sigma = \underset{3}{\xi}^\sigma = \underset{4}{\xi}^\sigma. \tag{10}$$

С помощью полученных равенств можно легко проинтегрировать уравнения (6), не содержащие γ_{pqr}, и найти функцию φ. Она имеет вид

$$2\varphi = \sum_{i=1}^{n} f_i + c, \qquad \lambda_i = f_i, \tag{11}$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4(x^4)$, $f_\sigma(x^\sigma)$ – произвольные функции указанных переменных, $c = \mathrm{const}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\partial/\partial x^i$ в правых и левых частях равенств (9), с помощью формул (6), (10) и (11) получаем довольно громоздкую систему дифференциальных уравнений в частных производных на компоненты $\underset{q}{\xi}^i$ косонормального репера. Интегрируя эту систему уравнений с удачно подобранными преобразованиями координат (подобные выкладки можно найти в статье [11]), а затем применяя формулы (см. работу [7])

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{n} e_h \underset{h}{\xi}^i \underset{\tilde h}{\xi}^j, \qquad \underset{h}{\xi}_i = g_{ij} \underset{h}{\xi}^j, \qquad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^{n} e_h e_l \bar a_{hl} \underset{\tilde h}{\xi}_i \underset{\tilde l}{\xi}_j,$$

мы в конечном итоге находим компоненты тензоров g_{ij} и a_{ij}.

Запишем итоговый результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если симметрический тензор h_{ij} типа $[41\ldots1]$ и скаляр φ удовлетворяют в $V^n(g_{ij})$ уравнениям* (3), *то существует голономная система координат, в которой φ, g_{ij} и h_{ij} определяются формулами*

$$\begin{aligned}
g_{ij}\,dx^i\,dx^j = {}& e\Pi_\sigma(f_\sigma - \epsilon x^4)\Big(6A\,dx^1\,dx^4 + 2\,dx^2\,dx^3 + \\
&+ 2(2\epsilon x^2 - 3A\Sigma)\,dx^2\,dx^4 - \Sigma\,(dx^3)^2 + 2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2\Sigma)\,dx^3\,dx^4 + \\
&+ 4\Big((\epsilon x^2)^2\Sigma + \epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{3}{2}\epsilon x^1 A\Sigma\Big)\,(dx^4)^2\Big) + \\
&+ 3A\,dx^3\,dx^4 + 12\epsilon x^2 A\,(dx^4)^2 + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma)\,(dx^\sigma)^2, \\
a_{ij}\,dx^i\,dx^j = {}& \epsilon x^4 g_{i_1 j_1}\,dx^{i_1}\,dx^{j_1} + 2g_{14}\,dx^2\,dx^4 + 2g_{24}\,dx^3\,dx^4 + \\
&+ g_{23}\,(dx^3)^2 + 3g_{23}\Big(2\epsilon x^1 A - 4\epsilon x^2 A\Sigma + \frac{4}{3}(\epsilon x^2)^2\Big)\,(dx^4)^2 + \\
&+ 9A^2\,(dx^4)^2 + \sum_\sigma f_\sigma g_{\sigma\sigma}\,(dx^\sigma)^2, \\
&h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \qquad 2\varphi = 4\epsilon x^4 + \sum_\sigma f_\sigma + c, \\
&A = \epsilon x^3 + \theta(x^4), \qquad \Sigma = \sum_\sigma (f_\sigma - \epsilon x^4)^{-1},
\end{aligned} \tag{12}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sigma = 5, 6, \ldots, n$, $i_1, j_1 = 1, \ldots, 4$, $e, e_\sigma = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \epsilon x^4$, f_σ *– функция переменной* x^σ, f_4, f_σ *– не равные тождественно друг другу функции,* ϵ *равно нулю или единице,* θ *– функция переменной* x^4, *отличная от нуля при* $\epsilon = 0$, Π_σ *означает произведение по* σ, Π'_i *означает произведение для всех* $i = 1, \ldots, n$, *кроме* $i = \sigma$.

В данной теореме сформулированы необходимые условия. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что справедливо и обратное утверждение, поэтому найденные условия являются достаточными. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы псевдориманово пространство* $V^n(g_{ij})$ *было* h*-пространством типа* $[41\ldots1]$, *необходимо и достаточно, чтобы в некоторой голономной системе координат его метрика определялась формулой* (12).

Напомним, что проективное движение ξ является проективным движением типа χ, если производная Ли $L_\xi g_{ij}$ метрического тензора g_{ij} принадлежит к типу χ (см. статью [7]). В нашем случае $\chi = [41\ldots1]$. Движение ξ есть проективное движение в $V^n(g_{ij})$ тогда и только тогда, когда выполняются обобщенные уравнения Киллинга $L_\xi g_{ij} = h_{ij}$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы бесконечно малое преобразование* $x^{i'} \to x^i + \xi^i\,\delta t$ *было проективным движением типа* $[41\ldots1]$ *в* n*-мерном псевдоримановом пространстве* $V^n(g_{ij})$, *необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат*

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \qquad L_\xi g_{ij} = h_{ij},$$

где соответствующие пары g_{ij} *и* h_{ij}, *а также отвечающая им определяющая функция* φ *определены в теореме* 1.

3. УСЛОВИЯ ПОСТОЯНСТВА КРИВИЗНЫ h-ПРОСТРАНСТВА ТИПА $[41\ldots1]$

Для дальнейшего исследования нам понадобятся необходимые и достаточные условия постоянства кривизны рассматриваемого h-пространства.

Как известно, это условие выражается равенством

$$R^i_{jkl} = K(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}), \qquad K = \text{const}. \tag{13}$$

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны заданного h-пространства имеют вид $R^i_{\nu i\mu}$, $i \neq \mu$, $R^{a_1}_{\nu b_1\mu}$, $b_1 \neq \mu$, $a_1 < b_1$. Здесь $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_1, b_1 = 1, \ldots, 4$, ν, μ являются индексами ненулевых компонент метрики $g_{\nu\mu}$ (12).

Из формулы (13) в частности получаем, что

$$R^1_{114} = R^\sigma_{1\sigma4}, \qquad R^1_{214} = R^\sigma_{2\sigma4}, \qquad R^1_{224} = 0. \tag{14}$$

Для h-пространства типа $[41\ldots1]$

$$R^1_{114} = \rho g_{14}, \qquad R^1_{214} = \rho g_{24}, \qquad R^\sigma_{1\sigma4} = \rho_\sigma g_{14}, \qquad R^\sigma_{2\sigma4} = \rho_\sigma g_{24},$$
$$R^1_{224} = \gamma_1 g_{24} + \gamma_2 g_{14} + \frac{2\epsilon}{3A^2}\left(\theta'(x^4) - \frac{4}{3}\epsilon^2 x^2\right),$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma-\epsilon x^4)^3 g_{\sigma\sigma}}, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma-\epsilon x^4)^4 g_{\sigma\sigma}},$$

$$\rho = -\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma-\epsilon x^4)^2 g_{\sigma\sigma}},$$

$$\rho_\sigma = -\frac{1}{4}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma-\epsilon x^4) g_{\sigma\sigma}}\left(\frac{2f''_\sigma}{(f'_\sigma)^2} - \frac{1}{f_\sigma-\epsilon x^4} + \sum_{i,i\neq\sigma}(f_i-f_\sigma)^{-1}\right) - \\ -\frac{1}{4}\sum_{\gamma,\gamma\neq\sigma}\frac{(f'_\gamma)^2}{(f_\gamma-\epsilon x^4)(f_\gamma-f_\sigma)g_{\gamma\gamma}},$$

а индексы $\sigma, \gamma = 5, 6, \ldots, n$.

Следовательно, из первых двух равенств (14) находим, что

$$\rho - \rho_\sigma = 0, \qquad \gamma_1 g_{14} + \frac{2\epsilon^2}{3A} = 0.$$

Дифференцируя последнее соотношение по x^3, получаем равенство $\epsilon = 0$, откуда $\gamma_1 = 0$. Тогда из последнего равенства (14) следует, что $\gamma_2 = 0$.

Покажем, что необходимые условия постоянства кривизны h-пространства типа $[41\ldots1]$

$$\rho - \rho_\sigma = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \tag{15}$$

являются достаточными. Имеем

$$\partial_1\rho = \partial_2\rho = \partial_3\rho = 0,$$

$$\partial_4\rho = 6\epsilon\gamma_1, \qquad \partial_\sigma\rho = -f'_\sigma\frac{\rho-\rho_\sigma}{f_\sigma-\epsilon x^4}.$$

Отсюда в силу условия (15) получаем, что $\rho = \rho_\sigma = \mathrm{const}$. Нетрудно убедиться, что при выполнении последнего равенства и условий $\epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ тензор кривизны рассматриваемого пространства удовлетворяет соотношениям (13) с $K = \rho = \mathrm{const}$.

Сформулируем результат, полученный в настоящем разделе, в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Для того чтобы h-пространство $V^n(g_{ij})$ типа $[41\ldots1]$ имело постоянную кривизну, необходимо и достаточно выполнение условий* (15).

4. ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПРОЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В h-ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА $[41\ldots1]$

Здесь доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Всякая определяющая функция проективного движения в h-пространстве непостоянной кривизны типа $[41\ldots1]$ есть $\phi = a_1\varphi$, где $a_1 = \mathrm{const}$, φ – функция, определенная в теореме* 1.

Доказательство. Пусть векторное поле ξ^i задает проективное движение с определяющей функцией ϕ в рассматриваемом h-пространстве $V^n(g_{ij})$. Тогда для тензора $b_{ij} = \underset{\xi}{L} g_{ij}$ выполняются уравнения Эйзенхарта

$$b_{ij,k} = 2g_{ij}\phi_{,k} + g_{ik}\phi_{,j} + g_{jk}\phi_{,i}. \tag{16}$$

Условия их интегрируемости имеют вид

$$b_{mi}R^m_{jkl} + b_{mj}R^m_{ikl} = g_{ik}\phi_{,jl} + g_{jk}\phi_{,il} - g_{li}\phi_{,jk} - g_{lj}\phi_{,ik}. \tag{17}$$

Покажем, что для любого проективного движения в рассматриваемом h-пространстве выполняются условия

$$b_{\alpha\beta} = 0, \qquad \phi_{,\alpha\beta} = 0, \tag{18}$$

где α, β являются индексами нулевых компонент $g_{\alpha\beta}$ соответствующего метрического тензора.

При $(ijkl) = (1213), (1313), (1\sigma 1\sigma), (3312), (1314)$ получаем равенства

$$b_{11}R^1_{213} = -g_{23}\phi_{,11}, \qquad b_{11}R^1_{313} = -g_{33}\phi_{,11}, \tag{19}$$

$$b_{11}R^1_{\sigma 1\sigma} = -g_{\sigma\sigma}\phi_{,11}, \tag{20}$$

$$b_{13}R^1_{312} = -g_{23}\phi_{,13}, \qquad b_{11}R^1_{314} + b_{13}R^1_{114} = -g_{14}\phi_{,13} - g_{34}\phi_{,11}. \tag{21}$$

Так как

$$R^1_{213} = R^1_{312} = g_{23}\rho, \qquad R^1_{114} = g_{14}\rho,$$
$$R^1_{313} = g_{33}\rho + \gamma_1 g_{23} + \frac{2\epsilon^2}{9A^2}, \qquad R^1_{\sigma 1\sigma} = g_{\sigma\sigma}\rho_\sigma,$$
$$R^1_{314} = g_{34}\rho + \gamma_1 g_{24} + \gamma_2 g_{14} + \frac{2\epsilon}{3A^2}\left(\theta' - \frac{4\epsilon^2 x^2}{3}\right),$$

то из уравнений (19) и (20) вытекает, что

$$b_{11}(\rho - \rho_\sigma) = b_{11}\left(\rho - \rho_\sigma + \gamma_1\frac{g_{23}}{g_{33}} + \frac{2\epsilon^2}{9A^2 g_{33}}\right) = 0.$$

Из уравнений (20) и (21) следует, что

$$b_{11}\left(\rho - \rho_\sigma + \gamma_1\frac{g_{24}}{g_{34}} + \gamma_2\frac{g_{14}}{g_{34}} + \frac{2\epsilon}{3A^2 g_{34}}\left(\theta' - \frac{4\epsilon^2 x^2}{3}\right)\right) = 0.$$

Предположим, что $b_{11} \neq 0$. Тогда из последних соотношений легко получить равенства $\rho - \rho_\sigma = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, которые согласно теореме 4 являются необходимыми и достаточными условиями постоянства кривизны, т. е. рассматриваемое пространство имеет постоянную кривизну, что противоречит доказываемой теореме. Таким образом, $b_{11} = 0$ и, следовательно, $\phi_{,11} = 0$. Подобным образом доказываются остальные соотношения (18).

С помощью доказанных соотношений (18) из уравнений (16), полагая поочередно $(ijk) = (1\tau\tau), (2\tau\tau), (3\tau\tau)$, $\tau = 5, 6, \ldots, n$, получаем соотношения

$$\phi_{,1} = \phi_{,2} = \phi_{,3} = 0,$$

$$\phi_{,\sigma} = f'_\sigma P_{\sigma\tau}, \qquad \phi_{,\tau} = f'_\tau P_{\sigma\tau}, \qquad P_{\sigma\tau} \equiv \frac{1}{2}\frac{b_{\tau\tau}g^{-1}_{\tau\tau} - b_{\sigma\sigma}g^{-1}_{\sigma\sigma}}{f_\tau - f_\sigma}, \qquad \sigma \neq \tau.$$

Из последних равенств следует равенство $\partial_{\sigma\tau}\phi = 0$, $\sigma, \tau = 5, 6, \ldots, n$, $\sigma \neq \tau$. Используя полученные результаты, из уравнений (16) при $(ijk) = (1\tau 4), (4\tau\tau), (\tau\tau\tau)$ находим

$$\phi_{,\tau} = \frac{1}{2}\frac{f'_\tau}{f_\tau - \epsilon x^4}\left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}}\right), \qquad \phi_{,4} = 2\frac{\epsilon}{f_\tau - \epsilon x^4}\left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}}\right),$$
$$\frac{\partial_\tau b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} = -f'_\tau \sum_{i,j\neq\tau}(f_i - f_\tau)^{-1}\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} + 4\phi_{,\tau}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

откуда несложно вывести уравнения

$$f'_\tau\,\partial_\tau\phi_{,\tau} = f''_\tau\phi_{,\tau}, \qquad 4\epsilon\phi_{,\tau} = f'_\tau\phi_{,4}.$$

Из условия $\phi_{,4\tau} = 0$ и соотношения $4\epsilon\phi_{,\tau} = f'_\tau\phi_{,4}$ следует равенство $\partial_{4\tau}\phi = 0$. Если не все $f'_\tau = 0$, то из полученных формул вытекает нужный результат

$$\phi = \frac{1}{2}a_1\sum_{i=1}^{n} f_i = a_1\varphi,$$

где φ определяется формулой (11). В противном случае, когда все $f'_\tau = 0$, имеем

$$\begin{gathered}\phi_{,\tau} = \phi_{,14} = \phi_{,23} = \phi_{,24} = \phi_{,\tau\tau} = 0, \qquad \phi_{,34} = -\frac{2\epsilon^2}{3A(f_\tau - \epsilon x^4)}\left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}}\right),\\ \phi_{,44} = \partial_{44}\phi - \frac{2\epsilon(3\theta' - 2\epsilon^2x^2)}{3A(f_\tau - \epsilon x^4)}\left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}}\right),\end{gathered} \tag{22}$$

где $\epsilon = 1$, так как при $\epsilon = f'_\tau = 0$ пространство имеет нулевую кривизну.

Из уравнений (17) при $(ijkl) = (4413), (4\tau 4\tau)$ получаем два равенства

$$b_{14}R^1_{413} + b_{24}R^2_{413} = g_{14}\phi_{,34},$$
$$b_{14}R^1_{\tau 4\tau} + b_{24}R^2_{\tau 4\tau} + b_{\tau\tau}R^\tau_{44\tau} = -g_{\tau\tau}\phi_{,44}.$$

Выражая b_{24} из первого равенства и подставляя результат во второе равенство, с учетом формулы (22) получаем равенство $\partial_{44}\phi = 0$, откуда и следует нужный результат. Итак, теорема доказана.

5. О КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННОМ СИММЕТРИЧЕСКОМ ТЕНЗОРЕ В h-ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА $[41\ldots1]$

Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Любой ковариантно постоянный симметрический тензор b_{ij} в h-пространстве непостоянной кривизны типа $[41\ldots1]$ пропорционален фундаментальному тензору*:

$$b_{ij} = a_2 g_{ij}, \qquad a_2 = \mathrm{const}. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть b_{ij} удовлетворяет в $V^n(g_{ij})$ уравнениям

$$b_{ij,k} = 0, \tag{24}$$

которые получаются из уравнений (16) при $\phi = \text{const}$. Следовательно, условия интегрируемости уравнений (24) определяются равенствами (17) при $\phi = \text{const}$. Тогда из условий (18) получаем равенство $b_{\alpha\beta} = 0$. Напомним, что индексы α, β соответствуют индексам нулевых компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ рассматриваемого h-пространства. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $b_{ij} = a_2 g_{ij}$, где a_2 – некоторый коэффициент пропорциональности, постоянство которого следует из уравнений $b_{ij,k} = 0$ и параллельности метрического тензора [7].

Из уравнения (24) с $(ijk) = (\mu\tau\nu), (\sigma\tau\sigma)$, $\sigma, \tau = 5, 6, \ldots, n$, $\sigma \neq \tau$, получаем соотношения

$$f'_\tau \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}} \right) = 0,$$

где μ, ν являются индексами ненулевых компонент метрического тензора (12). Если не все $f'_\tau = 0$, то выполняется равенство

$$\frac{b_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}} = \frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}},$$

которое вместе с условием $b_{\alpha\beta} = 0$ дает нужный результат (23).

В случае $f'_\tau = 0$ последнее равенство следует из уравнений (24) с $(ijk) = (\tau 4 \tau)$ и из (17) с $(ijkl) = (3324), (4413), (2343), (4432), (4442)$:

$$\epsilon \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}} \right) = 0,$$

$$b_{23} R^2_{324} - b_{33} R^3_{342} = 0, \qquad b_{14} R^1_{413} - b_{24} R^2_{431} = 0,$$

$$b_{23} R^3_{343} + b_{24} R^4_{343} + b_{23} R^2_{243} = 0, \qquad b_{14} R^1_{432} + b_{34} R^3_{432} = 0,$$

$$b_{14} R^1_{442} + b_{24} R^2_{442} + b_{34} R^3_{442} + b_{44} R^4_{442} = 0,$$

где $\epsilon = 1$ в силу непостоянства кривизны пространства, а компоненты тензора кривизны имеют вид

$$R^2_{431} = R^3_{342} = R^3_{432} = 3A R^4_{343} = \frac{R^2_{342}}{\Sigma} = \frac{R^2_{243}}{\Sigma} = \frac{2\epsilon^2}{3A},$$

$$R^3_{343} = -\frac{4\epsilon^3 x^2}{9A^2}, \qquad R^2_{424} = 3A R^1_{423} = \frac{2\epsilon^2}{3A}(2\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2 \Sigma + 3A\Sigma_1),$$

$$R^1_{442} = -\frac{2\epsilon\theta' g_{34}}{3A^2 g_{23}} + \frac{4\epsilon}{3A}\left(\epsilon^2 x^2 \Sigma_1 + \epsilon^2 x^2 \Sigma^2 + \frac{2\epsilon}{3A}\epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{4\epsilon}{3A}(\epsilon x^2)^2 \Sigma + \frac{3A\epsilon\Sigma}{g_{23}} \right),$$

$$\Sigma_1 = \sum_\sigma (f_\sigma - \epsilon x^4)^{-4}.$$

Таким образом, теорема доказана.

6. ПРОЕКТИВНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА h-ПРОСТРАНСТВА $V^N(g_{ij})$ ТИПА $[41\ldots1]$

Нетрудно заметить, что прямым следствием теоремы, доказанной в предыдущем разделе, является следующая теорема.

Теорема 7. *Аффинная группа в h-пространстве $V^n(g_{ij})$ типа $[41\dots1]$ непостоянной кривизны состоит из гомотетий.*

Общее решение уравнений Эйзенхарта в рассматриваемом h-пространстве непостоянной кривизны имеет вид $a_1 h_{ij} + a_2 g_{ij}$, где a_1, a_2 – произвольные постоянные,

$$h_{ij} = a_{ij} + \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) g_{ij},$$

тензоры a_{ij}, g_{ij} определены в теореме 1. Это следует из теорем, доказанных в предыдущих разделах, линейности уравнения Эйзенхарта (3) и того факта, что любые два решения $\overset{1}{h}_{ij}$ и $\overset{2}{h}_{ij}$ этого уравнения с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b_{ij} [7].

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 8. *Все проективные движения в h-пространстве $V^n(g_{ij})$ типа $[41\dots1]$ непостоянной кривизны получаются интегрированием уравнений*

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = a_1 a_{ij} + \left(a_1 \sum_{k=1}^{n} f_k + a_2\right) g_{ij},$$

где тензоры a_{ij} и g_{ij} определены в теореме 1, a_1, a_2 – постоянные.

Из этой теоремы вытекает важная групповая характеристика данного h-пространства.

Теорема 9. *Если h-пространство $V^n(g_{ij})$ типа $[41\dots1]$ допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$.*

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы псевдоримановы пространства с произвольной сигнатурой, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования. В частности, найдена метрика h-пространства типа $[41\dots1]$, а затем установлены важные проективно-групповые свойства этого h-пространства. Важно отметить, что полученные проективно-групповые свойства для h-пространства типа $[41\dots1]$ справедливы и для пространств лоренцевой сигнатуры, а именно h-пространств типов $[11\dots1]$, $[21\dots1]$, $[31\dots1]$ (см. статью [7]), а также для шестимерных h-пространств типов [2211], [321], [33], [411], [51] (см. работу [8]). Таким образом, можно с уверенностью предположить, что данные проективно-групповые свойства имеют место для всех n-мерных h-пространств типов $[a_1 a_2 \dots a_m]$ произвольной сигнатуры. Здесь числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ могут принимать любое из значений $1, 2, \dots,$ причем $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Следует заметить, что остается открытой проблема восстановления векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование. Решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения Киллинга.

Список литературы

[1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, УРСС, М., 1998.

[2] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.

[3] G. Konigs, "Appl. II": G. Darboux, *Leçons sur la théorie généralle des surfaces. IV*, Gauthier-Villars, Paris, 1896, 368–404.

[4] А. З. Петров, "О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики", *Уч. зап. Казан. ун-та*, **109**:3 (1949), 7–36.

[5] G. Fubini, "Sui gruppi transformazioni geodetiche", *Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat.*, **53** (1903), 261–313.

[6] А. С. Солодовников, "Проективные преобразования римановых пространств", *УМН*, **11**:4(70) (1956), 45–116.

[7] А. В. Аминова, "Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий", *УМН*, **50**:1(301) (1995), 69–142.

[8] З. Х. Закирова, *Проективно-групповые свойства* 6*-мерных теорий типа Калуцы–Клейна*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, КГУ, Казань, 2001.

[9] З. Х. Закирова, "Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [51]", Межвуз. темат. сб. науч. тр., Труды геометрического семинара, **23**, Изд-во Казан. матем. общ-ва, Казань, 1997, 57–64.

[10] З. Х. Закирова, "Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [411]", *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 9, 78–79.

[11] З. Х. Закирова, "Жесткие шестимерные h-пространства постоянной кривизны", *ТМФ*, **158**:3 (2009), 347–354.

[12] З. Х. Закирова, "Метрики 6-мерных h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]", *Краткие сообщения по физике ФИАН*, **38**:9 (2011), 270–274.

[13] З. Х. Закирова, "О некоторых специальных решениях уравнения Эйзенхарта", *Уфимский матем. журн.*, **5**:3 (2013), 41–53.

Поступила в редакцию 17.10.2017