ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 12, с. 1814–1820

УДК 512.72:514.84

ФАЗА БЕРРИ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СЕКТОРЫ

© 2021 г. А. С. Ситдиков[1, *], Н. В. Николаева[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Казанский государственный энергетический университет", Казань, Россия

*E-mail: airat_vm@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.07.2021 г.
После доработки 26.07.2021 г.
Принята к публикации 27.08.2021 г.

Дана формулировка новой схемы исследования топологической фазы Берри с помощью расслоений над частично упорядоченными множествами в терминах локальных наблюдаемых.

DOI: 10.31857/S0367676521120346

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что если квантовомеханическая система подвержена циклическому адиабатическому возмущению, то при прохождении замкнутой траектории такой системой в параметрическом пространстве, происходит изменение фазы волновой функции. При этом фаза функции состояния системы представляет собой сумму двух фаз, одна из которых появляется благодаря неодносвязности пространства параметров, т.е. благодаря наличию замкнутых контуров, не стягиваемых в точку. Такая фаза, имеющая топологическую или геометрическую природу, была рассмотрена в работе М. Берри [1] и поэтому часто связывается с его именем.

Впервые возникновение топологической фазы Берри в быстровращающихся атомных ядрах исследовалось в работе [2] (см. более подробно в [3]). При этом вращение было рассмотрено на основе энергетических поверхностей $\epsilon_n(\lambda, \omega)$ над двумерной параметрической плоскостью (λ, ω). Вопреки теореме Вигнера о непересечении одномерных энергетических уровней с одинаковой симметрией, собственные значения гамильтониана $H(\lambda, \omega)$ [4] могут соприкасаться в определенных точках, получивших название диаболических точек. При обходе диаболической точки волновая функция состояния приобретает дополнительную фазу, равную −1 в этом двумерном случае. Появление диаболических точек показывает топологическую природу спектра гамильтониана ХФБ во внутренней вращающейся системе, которая приводит к интересным явлениям и, в частности, к диаболической передаче пары, которая может послужить ядерным аналогом эффекта Джозефсона в металлических сверхпроводниках [5].

Топологические фазы удобно изучать с помощью линейных расслоений [6], где базой служит некоторое многообразие параметров, а стандартным слоем – комплексное одномерное векторное пространство. Сечения расслоения задают соответствующие векторы состояний, фиксируя их фазу, определяемую голономией линейного расслоения.

В данной работе мы в весьма схематической форме изучаем топологические сектора во вращающейся конечной квантовой ферми-системе. При этом топологические сектора порождаются алгеброй наблюдаемых дираковских полей $\psi(f)$, где дираковским спинорам f соответствуют сечения в расслоении. При этом алгебра наблюдаемых выделяется стандартным образом как калибровочно-инвариантная подалгебра алгебры, порожденной всеми $\psi(f)$. Показывается, что каждому топологическому сектору соответствует представление алгебры наблюдаемых в гильбертовых расслоениях и свой коцикл, обеспечивающий изоморфизм слоев. Это позволяет описывать топологические фазы с помощью наблюдаемых величин.

Работа построена следующим образом. Сначала мы приводим основные факты из теории расслоений, которые будут применяться при дальнейшем изложении. В следующей, основной части текста, мы строим расслоения над частично упорядоченными множествами и даем описание топологической фазы с помощью топологической компоненты отображения σ^z: $\pi_1(K) \to U(n)$. В заключении кратко просуммированы основные результаты.

РАССЛОЕНИЯ И ФАЗА БЕРРИ

Теория расслоений стала рабочим арсеналом не только математических физиков, занимающихся калибровочными теориями, но и стала применяться как наглядный математический аппарат в других разделах физики, в том числе и при рассмотрении широкого круга вопросов физики твердого тела [7]. Поскольку в ядерной физике эта теория еще не нашла столь широкого применения, то здесь мы предпошлем основному тексту изложение центральных моментов теории расслоений, отсылая читателя за более подробной информацией к монографиям [8, 9].

Расслоения

Расслоенное пространство состоит из:

1) базы M (некоторое многообразие, в частности пространство–время);

2) пространства расслоения E;

3) проекции π: $E \to M$, которая представляет сюръективное отображение;

4) стандартного, или, модельного слоя F, причем, $\pi^{-1}(x) = F_x$, $x \in M$;

5) структурной группы G.

Такую структуру, состоящую из перечисленных объектов 1–5, обозначим через (E, π, M, F, G). С математической точки зрения M, E, F представляют собой топологические пространства. Локально расслоенное пространство устроено очень просто, но глобально оно может иметь сложную структуру. Однако если расслоение имеет простую структуру и в глобальном смысле, то оно называется тривиальным и имеет вид $E = M \times F$. При этом $\pi(x, y) = x\ \forall x \in M$ и $\forall y \in E$. Например, если в качестве базы выбрать окружность, а в качестве стандартного слоя F – отрезок, то $M \times F$ представляет собой цилиндр. Множество $\pi^{-1}(x) \subset E$, которое является прообразом точки $x \in M$, называется слоем расслоения над точкой x. Слой расслоения изоморфен стандартному слою F. Кроме того, предполагается, что существует покрытие многообразия M (базы) открытыми множествами, т.е. существует семейство открытых множеств (карт) $\{U_i\}_{i\,\in\, I}$, где I – множество индексов. При этом для каждого U_i можно определить диффеоморфизм φ_i: $\pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$, удовлетворяющий условию $\pi\varphi_i^{-1}(x, f) = x$, где $x \in U_i, f \in F$. Поэтому имеется изоморфизм многообразий $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, где U – открытая окрестность произвольной точки. Данный диффеоморфизм отражает факт локальной тривиальности расслоения. Пара (U_i, φ_i) называется локальной тривиализацией расслоения в окрестности точки x ($x \in U_i$, $i \in I$). Далее для любых локальных тривиализаций (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) в окрестности точки x можно определить [8, 9] диффеоморфизмы

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}:\ (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F. \qquad (1)$$

Диффеоморфизмы (1) порождают отображения непустых пересечений $(U_i \cap U_j) \equiv U_{ij}$ в группу диффеоморфизмов стандартного слоя F, т.е. g_{ij}: $(U_i \cap U_j) \to diff(F)$. Семейство отображений $\{g_{ij}\}_{i,\,j\,\in\, I}$ называется функциями перехода расслоения $(E, \pi, M, F$, которые формируют структурную группу $G = \{g_{ij}\}$, действующую в F (группу автоморфизмов слоя).

Глобальное сечение расслоения E – это непрерывное отображение s: $M \to E$, удовлетворяющее $\forall x \in M$ условию $\pi(s(x)) = x$. Глобальное сечение не всегда можно определить, поэтому, как правило, определяют локальные сечения над открытыми подмножествами базы. Такие сечения при преобразовании локальных координат преобразовываются согласно правому действию функций перехода: $s_j(x) = s_i(x)g_{ij}(x)$, где $x \in U_i \cap U_j$.

Можно считать, что G действует на F точно и транзитивно (транзитивность означает, что имеется лишь одна орбита), поэтому все элементы слоя эквивалентны (тождественны). Однако в общем в различных точках базы эти множества тождественных элементов “ориентированы” по-разному. Физической причиной этого может быть, например, воздействие некоторого внешнего поля, которое не нарушает топологическую эквивалентность слоев в различных точках. Поэтому для их сравнения в ходе эволюции физической системы по некоторому пути в базе, необходимо ввести понятие связности. Отождествление слоев вдоль пути в расслоенном пространстве называется параллельным переносом (или, калибровочной связностью). Поэтому связность определяет изоморфизм между слоями данного расслоения над различными точками пути.

Фаза Берри

В контексте теории расслоений геометрические фазы возникают следующим образом. В качестве базы здесь служит пространство параметров, которое обозначим $\{X\}$. Над каждой точкой базы имеется собственное состояние зависящего от параметра гамильтониана, которое находится путем решения соответствующего нестационарного уравнения Шрёдингера. Собственное состояние при этом определено с точностью до комплексной фазы точкой единичной окружности $\exp(i\varphi(\vec{x}, t)) \equiv \exp(i\varphi)$ и, следовательно, собственное состояние полностью характеризуется с помощью пары $(X, \exp(i\varphi))$. Эти данные позволяют конструировать линейное расслоение, соответствующее главному расслоению со структурной группой $G = U(1)$ и стандартным слоем $F = U(1)$ (соответствующим множеству всевозможных фаз – точек окружности $\equiv \exp(i\varphi)$, соответствующей определенной точке базы). Поэтому сечение данного расслоения фиксирует определенную фазу собственного состояния. Изменению параметров в базе соответствует определенная кривая в базовом пространстве, которая порождает траекторию эволюции собственного состояния в расслоенном пространстве E. Эта траектория определяется с помощью связности расслоения. В данном случае связность имеет следующий смысл. В квантовой механике топологическая (или геометрическая) фаза, возникающая в результате адиабатического изменения параметров, может быть представлена в форме

$$\gamma_n = i\oint_C \langle n(\lambda)|\nabla_\lambda|n(\lambda)\rangle d\lambda = \oint_C A_n d\lambda,$$

где ∇_λ – оператор дифференцирования по многомерному вещественному параметру λ, $\lambda = \lambda(t)$, t – время, $A_n = A_n(\lambda) = i\langle n(\lambda)|\nabla_\lambda|n(\lambda)\rangle$ играет роль калибровочного потенциала, $|n(\lambda)\rangle$ – собственное состояние [10]. Поскольку группа Ли $U(1)$ является однопараметрической, а генератором $\mathbf{t}$ ее алгебры Ли является мнимая единица (т.е. $\mathbf{t} = i$), то для калибровочного потенциала A имеем $A = A_n(\lambda)d\lambda\mathbf{t}$. Для группы голономии $\exp\left(i\oint_C A\right)$ получаем фазу $\oint_C A = i\oint_C A_n(\lambda)\mathrm{d}\lambda = i\gamma$. Эта фаза и есть так называемая фаза Берри.

РАССЛОЕНИЯ НАД ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФАЗА

Для наших целей понятие расслоения более удобно переформулировать над частично упорядоченным множеством. Более подробное изложение этой теории можно найти в оригинальной работе [11], а здесь ограничимся краткими пояснениями. Под частично упорядоченным множеством мы будем понимать непустое множество K с бинарным отношением порядка $\leq$, которое удовлетворяет соотношениям рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. K назовем направленным вверх, если $\forall\, a, a' \in K\, \exists\, o \in K$ такое, что $a, a' \leq o$. K называется линейно связным, если для любых пар $a, a' \in K$ найдутся такие две конечные последовательности $a_1, ..., a_{n+1}$ и $o_1, ..., o_n$ элементов K с $a_1 = a$, $a_{n+1} = a'$, которые удовлетворяют соотношениям $a_i, a_{i+1} \leq o_i$, $i = 1, ..., n$. Заметим, что направленность вверх влечет линейную связность.

Над частично упорядоченным множеством K можно определить симплициальное множество $\Sigma_*(K)$ сингулярных симплексов $\Sigma_n(K)$ с любым n [17]. Множество всех $\Sigma_n(K)$ сингулярных n-мерных симплексов является образом отображения f: $\Delta_n \to K$, которое сохраняет порядок. Здесь Δ_n – стандартный n-симплекс, являющийся выпуклым замыканием $(n + 1)$ точек с координатами $(1, 0, ..., 0)$; $(0, 1, ..., 0)$; ... $(0, 0, ..., 1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Стандартный n-симплекс можно отождествить с частично упорядоченным множеством, если рассмотреть его как порядковое числительное вместе с непустыми подмножествами, упорядоченными по включению. Например, $\Delta_2 = \{0,1,2\}$, а его подмножествами являются элементы $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ (вершины), $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$ (ребра) и $\{0,1,2\}$ (“треугольник”). Тогда при конкретном отображении f стандартный 2-симплекс перейдет в сингулярный 2-симплекс следующим образом: стандартным 0-симплексам (точкам, или, вершинам) соответствуют сингулярные 0-симплексы – “утолщенные” точки, стандартные 1-симплексы (ребра, или, отрезки) перейдут в сингулярные 1-симплексы – “утолщенным” отрезкам и треугольник $\{0,1,2\}$ перейдет в “утолщенный треугольник”. При этом в случае сингулярных симплексов “утолщенность” означает, что имеется некоторая окрестность (множество носителей), что позволяет ввести топологию. Заметим, что $\Sigma_0(K)$ совпадает с самим множеством K. Элементы множества $\Sigma_1(K)$ будем обозначать через $b_1, b_2, ...$, а элементы множества $\Sigma_2(K)$ – через $c_1, c_2, ...$. Другие нам в дальнейшем не понадобятся. В $\Sigma_*(K)$ можно ввести отображения ∂_i: $\Sigma_n(K) \to \Sigma_{n-1}(K)$ (операция взятия границы), σ_i: $\Sigma_n(K) \to \Sigma_{n+1}(K)$ (вырождение), ψ_i: $\Sigma_n(K) \to \Sigma_n(K)$ (перестановочная симметрия), а также понятия пути, фундаментальной группы и пр. Все эти операции и понятия мы будем в дальнейшем вводить по мере необходимости с соответствующими комментариями.

Коцепи и когомологии

Как известно, 0- и 1-коцепями соответственно называются отображения v: $\Sigma_0(K) \to G$ и u: $\Sigma_1(K) \to G$, где G – некоторая группа; обозначим совокупности 0- и 1-коцепей соответственно, как $C^0(K, G)$ и $C^1(K, G)$. 1-коцепь называется 1-коциклом z, если выполнено так называемое тождество 1-коцикла

$$z(\partial_0 c)\, z(\partial_2 c) = z(\partial_1 c), \tag{2}$$

где $c \in \Sigma_2(K)$, а $\partial_i c \in \Sigma_1(K)$ – сингулярные 1-симплексы, являющиеся границами 2-симплекса c ("треугольник" в качестве своих границ имеет три "отрезка"). Здесь $z(\partial_0 c)\ z(\partial_2 c) \equiv z(p)$ где p – путь, составленный с помощью композиции $*$ из двух 1-симплексов $p = \partial_0 c * \partial_2 c$ (аналогично составляются и более "длинные" пути, состоящие из большего числа сингулярных 1-симплексов). Если $C^0(K, G) \ni \nu$ – 0-коцепь, то ее кограница d: $C^0(K, G) \to C^1(K, G)$ представляет собой 1-коцепь $u \in C^1(K, G)$: $d\nu(a) \equiv u(b) = \nu(\partial_0 b)\nu(\partial_1 b)^{-1}$, $a \in K$. Заметим, что функции перехода g_{ij} также удовлетворяют соотношению 1-коцикла: $g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$, $x \in U_{ijk}$. В дальнейшем при обсуждении топологических секторов нам понадобится понятие зависящих от пути 1-коциклов, связанных с нетривиальной топологией в базе расслоения. Описание этих коциклов требует рассмотрения неабелевых когомологий, которые в отличие от абелевых, еще не до конца изучены. Однако несколько первых (1-, 2-, 3-) неабелевых когомологий для частично упорядоченных множеств описаны в упомянутой работе [11], которые используют для этого формализм n-категорий, где учитываются также и морфизмы между морфизмами. Нам здесь с этой целью понадобится понятие 2-группы (которая обозначается как $2G$ и является частным случаем 2-категории). Опуская более точные определения, суть n-категории можно свести к следующему. Под категорией (см., например, [12]) мы понимаем совокупность объектов определенной природы (линейных пространств, алгебр, групп и пр.) и морфизмов (отображений) между ними, которые удовлетворяют определенным аксиомам. Отображения между разными категориями задаются так называемыми функторами, также удовлетворяющие некоторым аксиомам. Между функторами имеются отображения, которые называются естественными преобразованиями. Наиболее наглядным примером 2-категории может служить категория категорий, где объектами служат категории, морфизмами – функторы между этими категориями. Морфизмы между морфизмами (т.е. морфизмы между функторами) – это естественные преобразования. Поэтому 2-категория – это ничто иное, как совокупность объектов и совокупности двух видов морфизмов. Аналогично в 3-категории имеются совокупности объектов и совокупности уже трех видов морфизмов и т.д. Обычную группу также можно рассматривать как категорию, но всего лишь с одним объектом. В качестве объекта выступает сама группа G, а морфизмы – это элементы этой группы, задающие отображения $g\colon G \to G\ \forall g \in G$. В качестве 2-морфизмов тогда рассматриваются морфизмы (отображения) между элементами группы. Интуитивно это можно понять так: группа описывает симметрии системы, а морфизмы между морфизмами – симметрии между симметриями (внутренние автоморфизмы группы). 2-группу, состоящую из одного объекта G и двух видов морфизмов, обозначают как $2G$ (в более полном объеме структура 2-группы выяснится чуть ниже при обсуждении 2-коцепи).

Введем теперь понятие 2-коцепи [11] как пару отображений $w_i\colon \Sigma_i(K) \to (2G)_i$, $i = 1, 2$. Эти отображения действуют следующим образом: $w_1(b) = (e, \tau_b)$, $w_2(c) = (\nu(c), \tau_{\partial_1 c})$, $b \in \Sigma_1(K)$, $c \in \Sigma_2(K)$. Здесь ν: $\Sigma_2(K) \to G$, τ: $\Sigma_1(K) \to \mathbf{inn}(G)$, $\mathbf{inn}(G)$ – группа внутренних автоморфизмов группы G. Кограница d 1-коцепи u определяет 2-коцепь:

$$(du)_1(b) \equiv (e, ad(u(b))), \tag{3}$$

$$(du)_2(c) \equiv (w_u(c), ad(u(\partial_1 c))), \quad b \in \Sigma_1(K), \ c \in \Sigma_2(K), \tag{4}$$

где $w_u(c) \equiv u(\partial_0 c)\ u(\partial_2 c)\ u(\partial_1 c)^{-1}$, $ad(g)_h = ghg^{-1}$ присоединенное действие, g, $h \in G$. Отсюда ясно, 1-коцепь будет кограницей лишь в том случае, если будет удовлетворять тождеству 1-коцикла (2), поскольку при этом $w_u(c) = z(\partial_0 c)\ z(\partial_2 c)\ z(\partial_1 c)^{-1} = e$, e – единица в $G = 2G_1$ (т.е. начало и конец 2-коцепи отображаются в один и тот же элемент группы).

Среди 1-коцепей есть такие, которые удовлетворяют соотношениям

$$u(\bar{b}) = u(b)^{-1} \forall b \in \Sigma_1(K);$$
$$u(\partial_0 c)u(\partial_2 c) = u(\partial_1 c), \ c \in \Sigma_2^N(K),$$

где $\Sigma_2^N(K)$ – множество 2-симплексов, образующих нерв в $\Sigma_2(K)$, которые удовлетворяют соотношению $\partial_1 b < \partial_0 b$ и $|b| = \partial_0 b$ ($|b|$ – носитель 1-симплекса b). Такие 1-коцепи образуют связности в главном расслоении. Очевидно, что 1-коциклы удовлетворяют этому условию и являются связностями и к тому же они образуют плоские связности. Однако определение плоской связности требует определения кривизны связности. Кривизна W_u определяется как 2-кограница 1-коцепи u, т.е. $W_u \equiv du$. С помощью (3) и (4) тогда имеем:

$$(W_u)_1(b) = (e, ad(u(b))),$$
$$(W_u)_2(c) = (w_u(c), ad(u(\partial_1 c))),$$
$$b \in \Sigma_1(K), \ c \in \Sigma_2(K),$$

где $w_u(c) = (\partial_0 c)\ u(\partial_2 c)\ u(\partial_1 c)^{-1}$. Связность u называется плоской, если ее кривизна тривиальна, т.е. $W_u \in (2G)_1$. Очевидно, что 1-коциклы, удовлетворяющие этим требованиям, являются плоскими связностями. В дальнейшем мы сосредоточимся на плоских связностях.

Введем понятие группы голономии, поскольку фаза Берри порождается посредством параллельных переносов по петлям (замкнутым путям). Группа голономии является при этом подгруппой группы автоморфизмов слоя. Как уже было упомянуто при обсуждении равенства (2), путь p составляется с помощью композиции n экземпляров 1-симплексов b, т. е. $p = b_n * b_{n-1} * ... * b_1$, причем $\partial_0 b_{i-1} = \partial_1 b_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Началом и концом пути являются 0-симплексы $\partial_1 p = \partial_1 b_1 = a_0$ и $\partial_0 p = \partial_0 b_n = a_1$ соответственно. Путь из 0-симплекса a_0 в 0-симплекс a_1 принято обозначать как $p(a_0, a_1)$. Множество путей, начинающиеся в a_0 и заканчивающиеся в a_1 обозначим как $P(a_0, a_1)$. Следовательно, $p(a_0, a_1) \in P(a_0, a_1)$. Обратный путь определяется как $\overline{p} = b_1 * ... * b_n$, где обратный 1-симплекс $\overline{b}$ определяется как $\partial_0\overline{b} = \partial_1 b$, $\partial_1\overline{b} = \partial_0 b$, $|b| = |\overline{b}|$. Из сказанного следует, что композировать ("умножать") можно лишь такие пути, где конец пути совпадает с началом последующего пути. Поэтому с математической точки зрения пути образуют группоид [13].

Рассмотрим теперь замкнутый путь (петлю) $p(a, a)$ и ее частный случай – тривиальную петлю $p(a, a) \equiv \iota_a$. Тривиальную петлю ι_a можно определить как вырожденный 1-симплекс $\partial_0 b = a = \partial_1 b$, $a = |b|$ и интуитивно представить себе так: из точки a идем по определенному пути до некоторой промежуточной точки, а затем ровно по этому же пути возвращаемся назад. В итоге получается, что никакого "движения" не было, мы остались на месте; отсюда и название – вырожденная петля. Ясно, что если K односвязно (т.е. не имеет топологических дефектов), то "настоящая петля" $p(a, a)$ и тривиальная петля ι_a гомотопны между собой. Поэтому первую гомотопическую группу (фундаментальную группу) частично упорядоченного множества K можно определить, как фактор по отношению эквивалентности $\sim$: $\pi_1(K; a) = \{p: a \to a\}/\sim$ [13]. Тогда, согласно [11], назовем группой голономии $\mathbf{hol}_u(a)$ 1-коцепи над петлями, т. е.

$$\mathbf{hol}_u(a) = \{u(p) \in G |\, p : a \to a\}, \tag{5}$$

где u – 1-коцепь, являющаяся связностью. Аналогично определяется суженная группа голономии $\mathbf{hol}_u^0(a)$ над ι_a:

$$\mathbf{hol}_u^0(a) = \{u(p) \in G |\, p : a \to a; p \sim \iota_a\}. \tag{6}$$

Также заметим, что $\mathbf{hol}_u(a) = \{u(p) \in G | p: a \to a\}$ является подгруппой группы G, а $\mathbf{hol}_u^0(a) = \{u(p) \in G | p: a \to a\}$ – нормальная подгруппа группы $\mathbf{hol}_u(a) = \{u(p) \in G | p: a \to a\}$.

Зависящие от пути коциклы и топологические секторы

Рассмотрим свободное поле Дирака $\psi: S_c(DM) \to B(H)$, удовлетворяющее уравнению Дирака $\{iD - m\}\psi = 0$, где $S_c(DM)$ – пространство сечений (элементами которого являются спиноры f) с компактным носителем, DM – расслоение Дирака [14], $D : S_c(DM) \to S_c(DM)$ – оператор Дирака и $B(H)$ – алгебра операторов в гильбертовом пространстве[1]. Эти поля $\forall f, f' \in S_c(DM)$ удовлетворяют соотношениям антикоммутации:

$$\{\psi(f)^*,\ \psi(f')\} = \langle f, f'\rangle I,$$
$$\{\psi(f),\ \psi(f')\} = \{\psi(f)^*,\ \psi(f')^*\} = 0.$$

Определим локальную алгебру полей ψ стандартным образом как алгебру фон Неймана $F_o = \{\psi(f), \psi(f')|f, f' \in S_c(DM)\}''$, где двойной штрих означает взятие повторного коммутанта (дважды коммутант). Пусть $G = U(1)$ есть калибровочная группа. Действие этой группы с $\varsigma = \exp(i\chi) \in U(1)$ в алгебре F_o приводит к расщеплению на спектральные подпространства (которые являются зарядовыми суперотборными секторами [15], индексированными целыми числами $k \in Z$):

$$\alpha_\varsigma(F) = \varsigma^k F, \tag{7}$$

где $\alpha: \varsigma \to \alpha_\varsigma$ – автоморфизмы полевой алгебры.

В случае, когда база представляет собой частично упорядоченное направленное множество, алгебру локальных наблюдаемых $\mathfrak{R}_o$ ($o \in M^4$) можно определить, как калибровочно-инвариантную подалгебру локальной полевой алгебры, т.е. $\mathfrak{R}_o = \{F \in F_o \cap G'\} \subseteq B(H_0)$ (где H_0 – вакуумное гильбертово пространство). Алгебры $\mathfrak{R}_o$ порождают так называемую сеть алгебры локальных наблюдаемых $(\mathfrak{R}, \iota)_{M^4}$, $\mathfrak{R} : o \to \mathfrak{R}_o$ и $\iota_{o'o} : \mathfrak{R}_o \to \mathfrak{R}_{o'}$, $o \subseteq o'$[2]. В [16] показано, что неприводимые локализованные представления π^o определяют суперотборные сектора алгебры наблюдаемых. Более того, такие представления локально унитарно эквивалентны вакуумному представлению π_0 и суперотборные секторы могут быть проанализированы в гильбертовом пространстве вакуумного представления: таким представлениям соответствуют локализованные эндоморфизмы алгебры наблюдаемых. Далее, в [17] было показано, что

[1] В работах без использования теории расслоений, поле Дирака обычно определяют как спинорную операторнозначную обобщенную функцию $\psi(f) = \{\psi^\nu(f_\nu)\}_{\nu=1}^4$ над пространством быстроубывающих функций (Шварца).

[2] Мы аппроксимируем M^4 частично упорядоченным множеством K.

теория суперотборных секторов эквивалентным образом может быть описана посредством локализованных 1-коциклов: любой 1-коцикл с точностью до эквивалентности определяет локализованный эндоморфизм ρ_o-алгебры $\mathfrak{R}$. Преимущество этого подхода проявляется при рассмотрении многообразий с нетривиальной топологией: в многосвязных пространствах соответствие между локализованными представлениями алгебры и локализованными эндоморфизмами нарушается, тогда как соответствие между локализованными представлениями алгебры и коциклами сохраняется. Поэтому рассмотрим локальные секторы вида π^o: $\mathfrak{R}_o \to B(H_0)$ с тем требованием, чтобы они были унитарно эквивалентны посредством семейства 1-коциклов $\{z_{oo'} \in U(\mathfrak{R}_{o'})\}_{o \subseteq o'}$, представляющих собой группу унитарных операторов в $\mathfrak{R}_o$. Секторы можно определить тогда с помощью пар (z, π), где z удовлетворяют тождеству 1-коцикла (2). Любой 1-коцикл определяет семейство эквивалентных $*$-эндоморфизмов $\rho = \{\rho_o \in \mathbf{end}(\mathfrak{R})\}$ как $\rho_{o'} = ad\, z(p(o', o)) \circ \rho_o$, $o \subseteq o'$.

Если z представляют собой 1-кограницу, то такое представление называется топологически тривиальным. В случае односвязных K (т.е. в случаях с тривиальной топологией) представления оказываются тривиальными и при этом z не зависят от пути. В работе [16] показывается, что 1-коциклы определяют унитарные представления фундаментальной группы частично-упорядоченного множества. Если имеем представление $\varrho : \pi_1(K) \to U(1)$, то оказывается, что представление (z, π) в общем топологически нетривиальное, причем морфизм ϱ: $\pi_1(K) \to U(1)$ определяет 1-форму A из кокасательного расслоения, т.е. $\varrho(p(a, a)) = \exp(\oint_{p(a,a)} A) \in U(1)$, где $[p(a, a)] \in \pi_1(K)$. При этом A может быть истолкована как плоская связность (плоский калибровочный потенциал)[3]. Согласно теореме Стокса, условие $\oint_{p(a,a)} A \neq 0$ может указать на возникновение вихревых потоков благодаря вращению конечной квантовой ферми-системы. Неабелевы топологические представления возникают в случае представления группы $\pi_1(K)$ в группу $U(n)$, которое называется монодромией. При этом в ϱ^z: $\pi_1(K) \to U(n)$ инвариант n называется топологической размерностью (z, π), а z – топологической компонентой [16] и в данном контексте имеет смысл фазы Берри, приобретаемой функцией состояния нуклона. Поэтому топологическая компонента является голономией плоской связности z. Топологическая размерность является в общем новым инвариантом сектора и ограничена его статистической размерностью. Однако таких специфических вопросов мы здесь касаться не будем. Отсюда видно, что если ϱ^z: $\pi_1(K) \to U(n)$ является тривиальным, то получим обычные зарядовы сектора. Случай, когда z представляет собой 1-кограницу, приводит к такому тривиальному представлению, поскольку 0-коцепь ν здесь является 0-коциклом, удовлетворяющим условию $\nu(\partial_0 b) = \nu(\partial_1 b)$ и, следовательно, $d\nu(b) = \nu(\partial_0 b)\, \nu(\partial_1 b)^{-1} = e$, где e – тождественный элемент группы. В случае нетривиального представления $\pi_1(K)$ имеем топологические секторы, соответствующие представлениям $\mathfrak{R}$ в плоском гильбертовом расслоении со слоем H_0. В этом случае 1-коциклы оказываются зависящими от пути и приводят к топологическим секторам. Топологические заряды являются наблюдаемыми в том смысле, что они определены операторами $z(p)$, где p представляет собой путь или петлю. Они могут быть зарегистрированы как амплитуды перехода из одного состояния в другое благодаря взаимодействию квантового поля с плоским внешним калибровочным потенциалом A, что приводит к появлению фазового фактора $\exp\left(\oint_{p(a,a)} A\right)$.

[3] С физической точки зрения связности описывают взаимодействия между полями материи (фермионами), представляющих сечения; в этом смысле A представляет собой векторный потенциал.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обычные суперотборные сектора сети алгебры наблюдаемых над направленными частично упорядоченными множествами (например, множество двойных конусов в M^4), соответствуют зарядам абелевым (электрический, барионный и т.п.), или неабелевым (изотопический, цветовой). Эти сектора эквивалентны множеству неприводимых представлений калибровочной группы [15, 17]. Если же многообразие имеет нетривиальную фундаментальную группу (что имеет место в ненаправленных частично упорядоченных множествах), то имеем еще один класс секторов – топологические секторы. Такие секторы возникают благодаря взаимодействию свободного поля Дирака нуклонов с внешним потенциалом, где соответствующая топологическая компонента σ^z: $\pi_1(K) \to U(n)$ интерпретируется как топологическая фаза. Вследствие этого сеть алгебры наблюдаемых содержит информацию о взаимодействии с внешним потенциалом: сектор $(\sigma^z, \pi_1(K))$ соответствует взаимодействию нуклона с потенциалом A, определяемому с помощью σ.

За рамками данной работы осталось рассмотрение неабелевых фаз, также представляющих большой интерес. В этом случае гомоморфизм σ: $\pi_1(K) \to U(n)$ принимает свои значения в неабелевой группе $U(n)$ и алгебра F_o содержит d-мерные гильбертовы подпространства, образованные изометрическими операторами $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_d$. Наличие "классических" (нетопологических) неабелевых суперотборных секторов по изоспиновым квантовым числам, соответствующих представлениям неабелевой калибровочной группы (т.е. в смысле определения, данном в [15]), было рассмотрено нами в [18].

Отметим, что одной из первых работ, где исследовалось проявление топологического эффекта в квантовой механике благодаря нетривиальности топологии конфигурационного пространства, является работа [19]. В [20] было исследовано возникновение топологического эффекта, связанного с влиянием на заряженную частицу электромагнитного поля в областях, где напряженность электрического поля и индукция магнитного поля равны нулю, а векторный потенциал электромагнитного поля отличен от нуля. Этот эффект, получивший название эффекта Ааронова—Бома, по сути является обобщенной формой эффекта, предсказанного в [19] и иногда называется эффектом Эренберга—Сидая—Ааронова—Бома. Интерпретация этого эффекта была дана также в работе [21], а в наиболее полной форме он был изучен в [1].

Ситдиков А.С. выражает благодарность проф. Назмитдинову Р.Г. и проф. Бобошину И.Н. за стимулирующие обсуждения некоторых вопросов этой работы на LXIX международной конференции "Ядро-2019".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berry M.V.* // Proc. Royal. Soc. Lond. A. 1984. V. 392. P. 45.
2. *Nikam R.S., Ring P.* // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 980.
3. *Sun Y., Ring P., Nikam R.S.* // Z. Phys. A. 1991. V. 339. P. 51.
4. *Bengtsson R., Frauendorf S.* // Nucl. Phys. A. 1979. V. 327. P. 139.
5. *Satula W., Wyss R.A.* // Rep. Prog. Phys. 2005. V. 68. P. 174.
6. *Simon B.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2167.
7. *Рожков С.С.* // УФН. 1986. Т. 149. С. 259.
8. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986. 704 с.
9. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.
10. *Штокман Х.Ю.* Квантовый хаос. М.: Физматлит, 2004. 374 с.
11. *Roberts J.E., Ruzzi G.* // Theory Appl. Categories. 2006. V. 16. P. 855.
12. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М.: Физматлит, 2004. 351 с.
13. *Григорян С.А., Липачева Е.В., Ситдиков А.С.* // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 6. С. 1.
14. *Lawson H.B., Michelsohn M.L.* Spin geometry. Princeton Univ. Press, 1989.
15. *Doplicher S., Roberts J.E.* // Comm. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 51.
16. *Brunetti R., Ruzzi G.* // Comm. Math. Phys. 2009. V. 131. P. 523.
17. *Roberts J.E.* // In: Noncommutative geometry: lectures given at the C.I.M.E. Springer-Verlag, 2000. P. 263.
18. *Кириллов М.И., Никитин А.С., Ситдиков А.С.* // Изв. РАН. 2018. Т. 82. № 10. С. 1403; *Kirillov M.I., Nikitin A.S., Sitdikov A.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 10. P. 1274.
19. *Ehrenberg W., Siday R.E.* // Proc. Phys. Soc. (London). 1949. B. V. 62. P. 8.
20. *Aharonov Y., Bohm D.* // Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 485.
21. *Pancharatnam S.* // Proc. Indian Acad. Sci. 1956. V. 44. P. 247.

Berry phase and topological sectors

A. S. Sitdikov[a, *], N. V. Nikolaeva[a]

[a] *Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia*

**e-mail: airat_vm@rambler.ru*

A new scheme for studying the topological Berry phase with the help of bundles over partially ordered sets is formulated in terms of local observables.