



КГЭУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КГЭУ»)

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
для проведения текущего контроля
успеваемости и промежуточной аттестации
студентов по итогам освоения дисциплины

Математические основы искусственного интеллекта

Направление подготовки 09.04.01 — Информатика и вычислительная техника

Направленность образовательной программы

Направленность(и) (профиль(и)) Инженерия искусственного интеллекта

Квалификация магистр

Форма обучения очная

Составлено автором:

№ п/п	Фамилия Имя Отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Солодушкин Святослав Игоревич	Кандидат физико-математических наук, доцент	Доцент	Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, ИЕНиМ, УрФУ

Оценочные материалы оформлены в соответствии с ПОЛОЖЕНИЕМ О ПОРЯДКЕ РАЗРАБОТКИ И УТВЕРЖДЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ – ПРОГРАММ БАКАЛАВРИАТА, ПРОГРАММ СПЕЦИАЛИТЕТА И ПРОГРАММ МАГИСТРАТУРЫ В КГЭУ

Оценочные материалы по дисциплине «Мат. основы искусственного интеллекта» - комплект контрольно-измерительных материалов, предназначенных для оценивания результатов обучения на соответствие индикаторам достижения компетенции(й):

ОПК-1 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте;

ОПК-2 Способен разрабатывать оригинальные алгоритмы и программные средства, в том числе с использованием современных интеллектуальных технологий, для решения профессиональных задач

Оценивание результатов обучения по дисциплине осуществляется в рамках текущего контроля успеваемости, проводимого по балльно-рейтинговой системе (БРС), и промежуточной аттестации.

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценивание процесса обучения по дисциплине. При текущем контроле успеваемости используются следующие оценочные средства: устный опрос, тест, контрольная работа, экзамен.

Промежуточная аттестация имеет целью определить уровень достижения запланированных результатов обучения по дисциплине за 1,2 семестры. Форма промежуточной аттестации экзамен.

Оценочные материалы включают задания для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся, разработанные в соответствии с рабочей программой дисциплины.

1.Технологическая карта

Семестр 1

Номер раздела/ темы дис- циплины	Вид СРС	Наимено- вание оценочного средства	Код индикатора достижени я компетенц ий	Уровень освоения дисциплины, баллы			
				неудов-но	удов-но	хорошо	отлично
				не зачтено	зачтено		
			низкий	ниже среднего	средний	высокий	
Текущий контроль успеваемости							
1	Изучение литературы по теме «Норма оператора. Ортогональные системы. Метод наименьших квадратов. Спектр оператора. Сингулярное разложение». Решение домашних заданий, подготовка к тестированию и контрольной работе	УО, Т, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 7	7 - 9	9 - 11	11 - 12

2	Изучение материала по теме «Билинейные и квадратичные формы. Приведение к каноническому виду», решение задач, подготовка к тестированию, к контрольной работе	УО, Т, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 7	7 - 8	8 - 9	9 - 10
3	Изучение литературы и решение задач по темам «Законы распределения случайных величин, встречающиеся в методах машинного обучения», подготовка к контрольной работе	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 7	7 - 9	9 - 11	11 - 12
4	Изучение материала по темам «Нормальное распределение. Совместное нормальное распределение», выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной работе	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 6	6 - 7	7 - 9	9 - 10
5	Изучение материала по теме «Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Проверка статистических гипотез. Метод максимального правдоподобия», выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной работе	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 8	8 - 10	10 - 14	14 - 16
Всего баллов				0-34	35-43	43-54	54-60
Промежуточная аттестация							

7	Подготовка к экзамену	Задания к экзамену	ОПК-1, ОПК-2	менее 20	20 - 26	27 - 30	31 - 40
Итого баллов				0 - 54	55-69	70-84	85-100

Семестр 2

Текущий контроль успеваемости							
8	Изучение материала по теме «Частные производные. Вычисление частных производных ФНП. Нахождение экстремумов, условных экстремумов. Применение метода наименьших квадратов к построению приближенной функции, изучение метода градиентного спуска в задачах оптимизации», выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной работе	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 8	8 - 8	8 - 10	10 - 12
9	Изучение материала по теме «Свертка функций. Преобразование Фурье. Обратное преобразование», выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной работе	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 2	2 - 3	3 - 3	3 - 4
10	Выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной по теме «Линейный классификатор. Методы построения решающих функций»	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 3	3 - 4	4 - 6	6 - 6

11	Выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной работе по теме «Линейная регрессия. Одномерная и многомерная линейная модель. Методы регуляризации»	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 2	2 - 3	3 - 4	4 - 4
12	Выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной по теме «Наивный байесовский классификатор. Линейный дискриминант Фишера. Метод k средних»	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 8	8 - 9	9 - 10	10 - 12
13	Изучение материала, решение задач по теме «Нейронные сети. Обучение однослойного и многослойного перцептрона. Метод обратного распространения ошибки»	УО	ОПК-1, ОПК-2	менее 3	3 - 4	4 - 6	6 - 6
14	Изучение материала, выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной работе по теме «Метрические методы классификации»	УО, КР	ОПК-1, ОПК-2	менее 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8
15	Изучение материала, выполнение домашнего задания, подготовка к контрольной работе по теме «Ядерные функции. Ядерные методы. Метод опорных векторов»	УО	ОПК-1, ОПК-2	менее 2	2 - 3	3 - 4	4 - 4

16	Изучение материала по теме «Методы кластеризации. Алгоритм средних, алгоритм» <i>k</i> <i>EM</i> –	УО	ОПК-1, ОПК-2	менее 2	2 - 3	3 - 4	4 - 4
Всего баллов				0-34	35-43	43-54	54-60
Промежуточная аттестация							
18	Подготовка к экзамену	Задания к экзамену	ОПК-1, ОПК-2	менее 20	20 - 26	27 - 30	31 - 40
Итого баллов				0 - 54	55-69	70-84	85-100

2. Перечень оценочных средств

Краткая характеристика оценочных средств, используемых при текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающегося по дисциплине:

Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Оценочные материалы
Устный опрос (УО)	Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Перечень вопросов
Тест (Т)	Представляет собой систему стандартизированных заданий, чаще всего с выбором одного или нескольких вариантов ответов, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Комплект тестовых заданий
Контрольная работа (КР)	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач. Тематика контрольных работ устанавливается в связи с необходимостью закрепления полученных теоретических знаний на лекционных занятиях, а также применения умений и навыков, полученных на практическом занятии, умений обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.	Комплект контрольных заданий по вариантам
Экзамен (Экз)	Экзамен является итоговой формой оценки знаний студентов, приобретённых в течение семестра обучения по дисциплине.	Перечень теоретических вопросов, комплект практических заданий

3. Оценочные материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

Текущий контроль самостоятельной работы студентов со стороны преподавателя осуществляется на практических занятиях с помощью тестирования и проверки домашних заданий.

Баллы, полученные в процессе текущего контроля, в оценки не переводятся, а суммируются нарастающим итогом.

Для оценки достижения базового уровня используется тестирование. Тесты представляют собой задания, которые выполняются на практических занятиях в течение 20-30 минут в конце учебной темы.

Решение задач позволяет оценить освоена ли дисциплина на базовом, продвинутом и высоком уровне.

Наименование оценочного средства	Устный опрос
----------------------------------	--------------

Представление и содержание оценочных материалов

Устный опрос – это средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

Тема 1. Алгебра матриц и линейные пространства.

1. Дайте определение обратной матрицы?
2. В чем суть метода Жордана-Гаусса?
3. Дайте определение следа матрицы?
4. Как найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора? Что такое спектр оператора?
5. Как привести матрицу линейного оператора к диагональному виду? Всегда ли это можно сделать?
6. Дайте определение евклидова пространства?
7. Каким свойством обладает ортогональная система векторов?
8. Как задается псевдодобратная матрица?
9. Дайте определение линейного подпространства. Как найти его размерность?
10. Дайте определение сингулярного разложения матрицы.

Тема 2. Билинейные формы. Матричное дифференцирование.

1. Дайте определение билинейной формы. Свойства билинейной формы.
2. Дайте определение квадратичной формы.
3. Как записать квадратичную форму в матричном виде?
4. Как составить матрицу квадратичной формы?
5. Какими свойствами она обладает?
6. В чем заключается закон инерции?
7. Какими методами можно привести квадратичную форму к каноническому виду?
8. Дайте определение знакоположительной и знакоотрицательной квадратичных форм.
9. Сформулируйте критерий Сильвестра.
10. Оператор дифференцирования. Как он применяется?

Тема 3. Случайные величины.

1. Дайте определение дискретной и непрерывной случайных величин.
2. Как составить закон распределения дискретной случайной величины?
3. Как можно задать распределение непрерывной случайной величины?
4. Плотность распределения, ее свойства.
5. Дайте определение условной вероятности. Запишите формулу Байеса.
6. Перечислите основные числовые характеристики случайных величин. Какими свойствами они обладают?
7. Совместное распределение. Ковариационная матрица много мерного распределения.
8. Приведите геометрическую интерпретацию значения функции совместного распределения для двух случайных величин в некоторой точке.
9. Как задается ковариация?
10. Перечислите и опишите основные законы распределения, применяемые в методах машинного обучения.

Тема 4. Нормальное распределение. Многомерное нормальное распределение.

1. Дайте определение нормального распределения.
2. Какой смысл имеют параметры нормального распределения?
3. Как найти значения функции распределения в точке?
4. Как выглядит график плотности нормального распределения?

5. Запишите функцию плотности совместного нормального распределения.

Тема 5. Статистический анализ. Метод максимального правдоподобия.

1. Дайте определение оценки параметра распределения.
2. В каких случаях удобнее использовать выборочное среднее, а в каких медиану?
3. Чем отличается точечная оценка от интервальной?
4. Перечислите несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.
5. Дайте определение доверительного интервала.
6. Как задается уровень значимости? Что такое квантиль?
7. Что такое нулевая гипотеза?
8. Опишите ошибку первого рода и ошибку второго рода.
9. В чем суть метода максимума правдоподобия?
10. В чем суть метода моментов? Для чего применяются эти методы?

Тема 8. Функции нескольких переменных. Дифференцирование функций нескольких переменных.

1. Опишите правило нахождения частных производных функции нескольких переменных.
2. Как найти частные производные сложной функций?
3. Дайте определение градиента функции в точке. Каков его смысл?
4. Как найти производную функции в направлении некоторого вектора?
5. Как составить матрицу Якоби?
6. Сформулируйте достаточное условие локального экстремума функции.
7. Что такое условный экстремум?
8. Как составить функцию Лагранжа?
9. В чем суть метода градиентного спуска?
10. В чем суть метода наименьших квадратов?

Тема 9. Свертка функций.

1. Запишите формулу для вычисления свертки двух функций.
2. Каковы свойства свертки?
3. Сформулируйте «теорему о свертке».
4. Дайте определение ортогональной системы.
5. Как записывается ряд Фурье по ортогональной системе?
6. Что такое преобразование Фурье?
7. Что такое обратное преобразование Фурье?
8. Дайте определение автокорреляции.

Раздел 6. Математические методы распознавания и прогнозирования. Темы 10 – 16.

1. В каких случаях применяются методы распознавания, методы регрессионного анализа?
2. Что такое обобщающая способность?
3. Что такое скользящий контроль?
4. Что такое Байесовский классификатор?
5. Что такое решающая функция?
6. Опишите суть метода k ближайших соседей?
7. Что такое линейный дискриминант Фишера?
8. Как определяется отступ в метрических алгоритмах классификации?
9. Как определяется функция потерь в логистической регрессии?
10. Как устроена нейронная сеть? Опишите модель искусственного нейрона.
11. Что такое многослойный перцептрон?

	<p>12. Опишите основную идею метода обратного распространения ошибки.</p> <p>13. Почему любая булева функция представима в виде нейронной сети?</p> <p>14. Опишите основную идею метода опорных векторов.</p> <p>15. Каковы цели использования кластерного анализа?</p> <p>16. Опишите суть метода главных компонент.</p> <p>17. Дайте определение ядерной функции.</p> <p>18. Опишите суть метода k внутригрупповых средних.</p> <p>19. Что такое EM –алгоритм, какова его основная идея?</p> <p>20. Каковы основные отличия алгоритма k средних и EM –алгоритма?</p> <p>21. Опишите суть метода стохастического градиента.</p> <p>22. Что такое разделяющая поверхность?</p> <p>23. Каков вероятностный смысл регуляризации?</p> <p>24. Что такое сингулярное разложение? Как оно используется для решения задачи наименьших квадратов?</p> <p>25. Приведите пример метрического алгоритма классификации.</p>
<p>Критерии оценки и шкала оценивания в баллах</p>	<p>Максимальное количество баллов за устный опрос в течение семестра – 10 (1 семестр) и 20 (2 семестр).</p> <p><i>Высокий уровень:</i> обучающийся полно и аргументированно отвечает по содержанию задания; обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, самостоятельно решить предложенные задания, требующие дополнительного анализа и поиска нужных свойств и правил; излагает материал последовательно и правильно. – 85%-100% от максимального балла;</p> <p><i>Средний уровень:</i> обучающийся дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для Высокого уровня, но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет – 61%-84% от максимального балла;</p> <p><i>Ниже среднего:</i> обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но: излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил, излагает материал непоследовательно и допускает ошибки – 30%-60% от максимального балла.</p> <p><i>Низкий уровень:</i> обучающийся обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл; отмечаются такие недостатки в подготовке обучающегося, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом – 0%-29% от максимального балла.</p>
<p>Наименование оценочного средства</p>	<p>Тест</p>
<p>Представление и содержание оценочных материалов</p>	<p>Тест представляет собой систему стандартизированных заданий, чаще всего с выбором одного или нескольких вариантов ответов, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.</p> <p>Раздел 1. Темы «Алгебра матриц. Линейные операторы» и «Билинейные формы. Матричное дифференцирование».</p> <p>1. В линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов степени не выше 2 над полем действительных чисел \mathbb{R} задан базис $e = (x^2; x; 1)$. Каковы координаты p_1, p_2, p_3 вектора $p(x)$ в этом базисе, если $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$ Ответ: $p_1 =$, $p_2 =$, $p_3 =$.</p> <p>2. Для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ выберите операторы, которые являются линейными.</p> <p>Выберите один или несколько вариантов ответов:</p> <p>$A(x) = (5x_3 + 4x_1; x_3; x_1 + 6)$;</p> <p>$A(x) = (x_1^2; x_2; x_3^4)$;</p>

$$A(x) = (x_1 - x_3; x_2 + 5x_3; x_1 + 4x_2);$$

$$A(x) = (3x_2 + x_1; 0; x_1 + 4x_3);$$

3. Запишите матрицу линейного оператора A , если

$$A(x) = (x_2 - x_3; x_1 + x_2; 5x_3 - x_2).$$

Ответ: $A = (\quad)$.

4. Запишите матрицу перехода S от базиса $e = (e_1; e_2; e_3)$ к новому базису

$e^* = (e_1^*; e_2^*; e_3^*)$, если

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + 2e_2 - e_3, \\ e_2^* = 3e_1 + 4e_2, \\ e_3^* = e_1 - 3e_3. \end{cases}$$

Ответ: $S = (\quad)$.

5. В базисе $e = (e_1; e_2; e_3)$ линейный оператор задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите образ вектора $x = 4e_1 + e_2 - e_3$ при отображении A .

Ответ: $A(x) =$

6. Найдите собственные числа линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 10 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В ответе запишите собственные числа в порядке возрастания:

$$\lambda_1 = \quad , \lambda_2 = \quad , \lambda_3 = \quad .$$

7. Найдите значение параметра p , при котором векторы a_1, a_2, a_3, a_4 являются линейно зависимыми, если

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 17 \\ p \end{pmatrix}.$$

Ответ: $p =$

8. Запишите матрицу квадратичной формы $f = x_1^2 - 2x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Выберите один ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \\ -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите ранг $r(f)$ квадратичной формы

$$f = 6x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Ответ: $r(f) =$

10. Установите правильную последовательность действий при нахождении собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.

Шаги: Варианты действий:

Шаг 1 Составим характеристическое уравнение

Шаг 2 Найдем обратную матрицу

Шаг 3 Найдем действительные корни характеристического уравнения

Шаг 4 Составим матрицу линейного оператора

Для каждого собственного значения найдем ФСР однородной системы уравнений

Критерии оценки и шкала оценивания в баллах	Максимальная оценка за тест – 10 баллов. <i>Высокий уровень:</i> 9 – 10 баллов; <i>Средний уровень:</i> 7 до 9 баллов (меньше 9) <i>Ниже среднего:</i> 4 – 7 баллов (меньше 7) <i>Низкий уровень:</i> до 4-х баллов.
Наименование оценочного средства	Контрольная работа
Представление и содержание оценочных материалов	<p>Контрольная работа – это средство проверки умений применять полученные знания для решения задач.</p> <p>Тематика контрольных работ устанавливается в связи с необходимостью закрепления полученных теоретических знаний на лекционных занятиях, а также применения умений и навыков, полученных на практическом занятии, умений обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач.</p> <p>Контрольная работа по Темам 1 и 2. «Алгебра матриц. Линейные операторы», «Билинейные формы. Матричное дифференцирование».</p> <p>Вариант 1.</p> <p>Дана матрица линейного оператора в базисе (e_1, e_2, e_3): $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>Найти</p> <ol style="list-style-type: none"> образ вектора $x = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ при отображении A. собственные числа и собственные векторы этого оператора. координаты вектора $x = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ в базисе (e'_1, e'_2, e'_3), если $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ e'_2 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e'_3 = e_1 + e_2 + 2e_3; \end{cases}$ Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность, привести к каноническому виду: $x_1^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ Привести к диагональному виду матрицу квадратичной формы. Найти ортонормированный базис по заданной линейно независимой системе векторов в пространстве \mathbb{R}^4: $a_1 = (1; 1; 0; 0), a_2 = (1; 0; 1; 0), a_3 = (1; 0; 0; 1), a_4 = (4; 1; 1; 1)$. <p>Вариант 2.</p> <p>Дана матрица линейного оператора в базисе (e_1, e_2, e_3): $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.</p> <p>Найти</p> <ol style="list-style-type: none"> образ вектора $x = -e_1 + 2e_2 - e_3$ при отображении A; собственные числа и собственные векторы этого оператора; координаты вектора $x = -e_1 + 2e_2 - e_3$ в базисе (e'_1, e'_2, e'_3), если $\begin{cases} e'_1 = e_1 - 4e_3, \\ e'_2 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e'_3 = 2e_1 + 2e_2 + 5e_3; \end{cases}$

4. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность, привести к каноническому виду:

$$2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$
5. Привести к диагональному виду матрицу квадратичной формы.
6. Найти ортонормированный базис по заданной линейно независимой системе векторов в пространстве \mathbb{R}^4 : $a_1 = (1; 2; 0; 0)$, $a_2 = (1; 0; 1; 0)$, $a_3 = (3; 1; 0; 1)$, $a_4 = (1; 1; 3; 1)$.

Контрольная работа по темам 3, 4, 5 «Случайные величины», «Нормальное распределение. Многомерное нормальное распределение», «Статистический анализ. Метод максимального правдоподобия»:

Задача 1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей. Требуется: а) найти плотность распределения вероятностей; б) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) построить график плотности распределения вероятностей.

Задача 2. По данным выборки составить дискретное статистическое распределение. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности, построить статистическую функцию распределения.

Задача 3. По данным выборки составить статистическое распределение. Построить гистограмму частот, график накопленных частот. Вычислить несмещенные точечные оценки параметров генеральной совокупности.

Задача 4. Найти указанные доверительные интервалы.

Задача 5. По данной выборке случайной величины X построить доверительный интервал для математического ожидания (доверительную вероятность положить равной 0,95).

Вариант 1.

$$1. F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

2. 4; 4; 3; 5; 5; 4; 3; 4; 3; 5; 3; 4; 4; 5; 6; 3; 5; 5; 3; 4.

3. 12; 14; 8; 3; 9; 6,5; 7; 7; 6; 6; 13,6; 4,8; 12,7; 6,2; 9,3; 6,1; 2,9; 3,7; 5; 4
 8,4; 5,9; 10,4; 3,8; 2; 5,4; 7,6; 3,9; 6; 11,4; 3; 6; 3; 3; 4,9; 10,1; 9,5; 7,1; 4,1
 8,8; 6,2; 9,6; 10,1; 10,8; 5,9; 13,6; 12,9; 12,4; 8,3

4. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 121$ найдено "исправленное" среднее квадратическое отклонение $S = 2.5$, выборочное среднее равно 12. Найдите доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a , с надежностью 0.9.

5. 1,4; 0,6; 3,6; 3,6; 3,4; 3,7; 3,7; 3,6; 5,8; 0,6; 8,3; 0,6; 5,6; 3,8; 3,4
 2,0; 3,3; 3,6; 0,6; 7,0; 1,2; 0,7; 2,1; 3,0; 7,5; 1,2; 5,1; 5,7; 4,5; 3,0.

Вариант 2.

$$1. F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

2. 12; 13; 10; 11; 12; 9; 11; 13; 14; 15; 15; 12; 12; 10; 11; 9; 8; 7; 7; 7.

3. 1; 5; 5; 14; 12,3; 9,1; 10; 4,7; 5,1; 5,3; 4,9; 3,8; 10,7; 11,3; 11; 5,8; 4,5; 2,6;
 7,4; 5,8
 3,1; 4,5; 7,7; 8,3; 8; 9,2; 4; 9,4; 6,7; 6; 8; 8,4; 3,7; 2,9; 4,1; 7,3; 5; 8,2; 9; 10

11; 13,5; 12,9; 12,5; 11,6; 11,4; 10,1; 12,8; 5,1; 9.

4. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 64$ найдено "исправленное" среднее квадратическое отклонение $S = 1.9$. Найдите доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a , с надежностью 0.95, если $\bar{x} = 5$.
5. 1,6; 1,5; 2,4; 2,6; 4,9; 3,2; 1,0; 0,1; 0,0; 2,8; 0,3; 2,2; 0,8; 3,2; 8,0; 0,7; 4,1; 0,2; 0,3; 0,7; 3,3; 3,4; 4,6; 0,6; 0,5; 4,2; 3,7; 0,1; 0,4; 1,2

Контрольная работа по темам 8 «Функции нескольких переменных. Дифференцирование функций нескольких переменных» и 9 «Свертка функций».

Задачи 1. Найдите частные производные второго порядка функции;

Задача 2. Найдите экстремум функции;

Задача 3. Найдите производную функции $u = u(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора \vec{a} , градиент функции в точке M_0 .

Задача 4. Вычислите свертку функций.

Вариант 1.

1. $z = x^2 \cos y + y^2 \cos x - 2xy - 3$;
2. $z = -x^2 y + xy^2 + 4xy$;
3. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M_0(3; -4; 5)$.
4. $f(t) = 1$, $\varphi(t) = \sin 6t$.

Вариант 2.

1. $z = \ln(x^2 y + 3xy^2)$;
2. $z = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x - 6y - 25$;
3. $u = 5^{xy-z} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-z}{y}}$; $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$; $M_0(1; 1; 0)$;
4. $f(t) = 1$, $\varphi(t) = \sin 4t$.

Контрольная работа по разделу 7. «Математические методы распознавания и прогнозирования».

Вариант 1.

1. Рассматривается задача классификации объектов на два класса по одному признаку. Предполагается, что значение признака x для объектов из двух классов распределено по нормальному закону с математическими ожиданиями 1, 12 и дисперсиями 2, 4. Требуется найти области значений признака x , соответствующие отнесению объектов в каждый из двух классов байесовским классификатором, если априорные вероятности классов равны, соответственно, 0.4 и 0.6.
2. Имеется задача распознавания с 3-мя классами и 2-мя признаками. Предполагается, что с использованием линейного классификатора для каждого класса найдены линейные разделяющие функции:
 $f_1(x_1, x_2) = 4 + 2x_1 - x_2$, $f_2(x_1, x_2) = -2 + x_1 - 3x_2$, $f_3(x_1, x_2) = 1 + x_1 - 2x_2$.
Требуется изобразить на двумерной диаграмме области, соответствующие отнесению к классам 1, 2 и 3.
3. Предполагается, что линейный дискриминант Фишера используется для распознавания объектов из двух классов по паре признаков x_1 и x_2 .

Требуется вычислить вектор, задающий направление перпендикуляра к прямой, разделяющей объекты двух классов, для выборки:

Класс 1		Класс 2	
x_1	x_2	x_1	x_2
1,3	1,2	-0,7	3,5
3	2	0,7	3,6
1,5	2	-0,9	4,3
1	1	-1,3	2,6

4. Банком тестируется метод идентификации недобросовестных заёмщиков. Известно, что средний доход от одного добросовестного заёмщика составляет 10000 единиц, средняя величина потерь от одного недобросовестного заёмщика — 30000 единиц. Известно, что доля недобросовестных заёмщиков 10%. Известно несколько точек графика ROC-кривой для некоторого распознающего оператора. Требуется установить на основании всей этой информации целесообразность использования банком технологии распознавания, оценить максимальный дополнительный доход на одного заёмщика.

Чувствительность	Ложная тревога
0,56	0,05
0,7	0,09
0,8	0,11
0,91	0,19
0,93	0,3

5. Задана таблица совместных значений прогнозируемой переменной Y и объясняющей переменной X . Требуется вычислить ковариацию между Y и X , коэффициент корреляции между Y и X , коэффициенты одномерной линейной регрессии.

Y 17; 23.6; 28.3; 37.5; 38.6

X 3; 5; 7.4; 10.2; 11.3

Вариант 2.

- Имеется задача распознавания с 4-мя классами и одним признаком. Предполагается, что с использованием линейного классификатора для каждого класса найдены следующие линейные разделяющие функции: $f_1(x) = 4.8 - 2.3x$, $f_3(x) = 4.5 - 2.3x$, $f_2(x) = -4.6 - 2.6x$, $f_4(x) = 4.2 - 0.4x$. Требуется изобразить на графике области, соответствующие отнесению к каждому из четырех классов.
- Предполагается, что линейный дискриминант Фишера используется для распознавания объектов из двух классов по паре признаков x_1 и x_2 . Требуется вычислить вектор, задающий направление перпендикуляра к прямой, разделяющей объекты двух классов:

Класс 1		Класс 2	
x_1	x_2	x_1	x_2
2,3	1,8	-0,9	-3,6
3	1,9	-0,1	-3,8
3,2	2,1	0,1	2,8
3,1	0,6		

3. При проведении выборов на ряде избирательных участков производится фальсификация результатов голосования. Посылка

наблюдателя на такой участок предотвращает фальсификации. Пусть известно несколько точек ROC-кривой для метода идентификации «грязных» участков. Требуется определить оптимальную стратегию распределения наблюдателей по участкам и максимальный выигрыш относительно стратегии равномерного распределения по участкам, если всего участков 1000, наблюдателей — 200 и доля «грязных» участков — 30%. При этом под оптимальностью понимается максимизация количества честных участков.

Чувствительность	Ложная тревога
0,86	0,11
0,9	0,31
0,2	0,32

4. Задана таблица совместных значений прогнозируемой переменной Y и объясняющей переменной X. Требуется вычислить ковариацию между Y и X, коэффициент корреляции между Y и X, коэффициенты одномерной линейной регрессии.
- | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|
| Y | 5.9 | 4.0 | 2.4 | 1.7 |
| X | 8.3 | 7.6 | 3.0 | 2.3 |
5. Заданы таблицы значений бинарных признаков для классов K1 и K2. Требуется найти все тупиковые тесты минимальной длины, а также указать для каждого класса по одному представительному набору, который не совпадает по признакам с тупиковым тестом. Класс 1 Класс 2
- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X1 | X2 | X3 | X4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | X1 | X2 | X3 | X4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Критерии оценки и шкала оценивания в баллах

Контрольные работы, в зависимости от сложности и количества задач, оцениваются в 20 баллов.

Высокий уровень:

обучающийся демонстрирует свободное применение знаний на практике; не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала и решении задач; материал оформлен аккуратно – 85%-100% от максимального балла за КР;

Средний уровень:

обучающийся демонстрирует умение применять полученные знания на практике; в решении задач не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя; материал оформлен недостаточно аккуратно – 61%-84% от максимального балла за КР;

Ниже среднего:

обучающийся демонстрирует освоение основного материала, но испытывает затруднения при решении задач и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя; материал оформлен не аккуратно – 30%-60% от максимального балла за КР;

Низкий уровень:

обучающийся имеет отдельные представления об изучаемом материале, но все, же большая часть не усвоена; материал оформлен не в соответствии с требованиями – 0%-29% от максимального балла за КР.

4. Оценочные материалы промежуточной аттестации

Наименование оценочного средства	Экзамен
Представление и содержание оценочных	Теоретические вопросы к экзамену <u>Базовые вопросы</u>

материалов

1. Дайте определение линейного пространства. Линейная независимость. Базис, размерность.
2. Дайте определение метрического пространства. Примеры метрик.
3. Дайте определение квадратичной формы. Как составить матрицу квадратичной формы?
4. Дайте определение сингулярного разложения матрицы.
5. Условная вероятность. Формула Байеса.
6. Дискретная и непрерывная случайная величина.
7. Способы задания распределения ДСВ и НСВ. Функция распределения и функция плотности.
8. Перечислите основные распределения дискретных случайных величин. Их числовые характеристики.
9. Перечислите основные распределения непрерывных случайных величин. Их числовые характеристики.
10. Нормальное распределение. Его параметры.
11. Запишите формулы для одномерного/многомерного нормального распределения.
12. Метод максимального правдоподобия. Привести пример применения метода.
13. Метод наименьших квадратов.
14. Дать определение математического ожидания, ковариации, дисперсии, коэффициента корреляций.
15. Что такое ковариационная матрица для многомерных случайных величин?
16. Генеральная совокупность. Точечные оценки параметров распределения.
17. Интервальные оценки параметров распределения.
18. Правило вычисления частных производных функции нескольких переменных. Производная по направлению, градиент функции.
19. Что такое метод k-ближайших соседей?
20. Основная идея метода опорных векторов.
21. Что такое метод главных компонент?

Вопросы повышенной сложности

1. Сходимость по вероятности. Центральная предельная теорема.
2. Формулировка статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Статистический критерий, наблюдаемое значение критерия. Уровень значимости. Критические области. Мощность критерия. Теорема Неймана-Пирсона.
3. Анализ статистических связей. Корреляционный анализ. Парный, множественный коэффициент корреляции. Ложная корреляция, частный коэффициент корреляции.
4. Регрессионные модели. Отбор признаков, доверительные интервалы для параметров. Выбор наилучшей модели с использованием информационных критериев.
5. Использование метода наименьших квадратов для оценки коэффициентов. Связь МНК с методом максимального правдоподобия. Оценка параметров одномерной регрессии.
6. Поиск коэффициентов многомерной регрессии с помощью МНК. Формула для регрессионных коэффициентов. Явление мультиколлинеарности.
7. Модель искусственного нейрона. Перцептрон Розенблатта и метод его обучения, условие сходимости.
8. Многослойный перцептрон и его структура. Аппроксимирующая способность многослойных перцептронов. Метод обратного распространения ошибки.
9. Построение линейных решающих функций. Условие разделимости классов. Обобщенные решающие функции.

10. Задачи понижения размерности. Метод главных компонент. Линейный дискриминант Фишера.
11. Метод опорных векторов. Опорные вектора и их роль в формировании распознающего алгоритма.
12. Обобщение метода опорных векторов, позволяющее строить нелинейные разделяющие поверхности.
13. Методы кластеризации. Цели кластерного анализа. Критерии качества кластеризации. Метод k-внутригрупповых средних. Теорема о сходимости алгоритма.
14. Наивный байесовский классификатор. Обобщенный байесовский классификатор. Критерий Неймана-Пирсона.

Примерные задачи к экзамену

Базовые задачи

Задание 1. Исследовать функцию на экстремум $z = -x^2y + xy^2 + 4xy$;

Задание 2. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность, привести к каноническому виду методом ортогональных преобразований:

$$x_1^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3;$$

Рассматривается задача классификации объектов на два класса по одному признаку. Предполагается, что значение признака x для объектов из классов K_1, K_2 распределено по закону Рэлея:

$$p(x|K_j) = \beta_j \cdot \exp\left(-\frac{\beta_j}{2}x^2\right), \quad x \geq 0, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\beta_1 = 7.3$, $\beta_2 = 1.3$. Требуется найти области значений признака x , соответствующие отнесению объектов в каждый из двух классов байесовским классификатором, если априорные вероятности классов равны, соответственно, 0.3 и 0.7.

Задачи повышенной сложности

Задание 1. Вывести формулу регуляризованного решения задачи многомерной линейной регрессии через сингулярное разложение.

Задание 2. Вывести градиентный метод обучения в логистической регрессии.

Задание 3. Вывести формулу наивного байесовского классификатора для случая бинарных признаков (доказать, что он линеен).

Критерии оценки и шкала оценивания в баллах

Экзамен является итоговой формой оценки знаний студентов, приобретённых в течение семестра обучения по дисциплине. Экзамен проводится в письменной форме. Студент выбирает билет, содержащий 1 вопрос из базовой части, 1 вопрос повышенной сложности и 2 практические задачи (базовой и повышенной сложности).

При выставлении баллов за ответы на задания в билете учитываются следующие критерии:

1. Правильность выполнения практических заданий.
2. Владение методами и технологиями, запланированными в рабочей программе дисциплины.
3. Владение специальными терминами и использование их при ответе.
4. Умение объяснять, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы.
5. Логичность и последовательность ответа.
6. Демонстрация способности участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем.

Максимальный балл за ответ на теоретический вопрос базового уровня – 5 баллов, вопрос повышенной сложности – 10 баллов.

Решение практической задачи базового уровня является обязательным элементом успешной сдачи экзамена и оценивается максимально на 10 баллов; решение

практической задачи повышенной сложности оценивается на 15 баллов. В случае неполных ответов по билету или спорной оценки задаются дополнительные вопросы из общего списка (вне зависимости от уровня освоения) по усмотрению преподавателя.

Высокий уровень:

от 36 до 40 баллов оценивается ответ, который показывает прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа.

Средний уровень:

от 25 до 35 баллов оценивается ответ, обнаруживающий прочные знания основных процессов изучаемой предметной области, отличается глубиной и полнотой раскрытия темы; владение терминологическим аппаратом; умение объяснять сущность, явлений, процессов, событий, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы, приводить примеры; свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается одна – две неточности в ответе.

Ниже среднего:

от 20 до 24 баллов оценивается ответ, свидетельствующий, в основном, о знании процессов изучаемой предметной области, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы; знанием основных вопросов теории; слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры; недостаточной логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа.

Низкий уровень:

до 19 баллов оценивается ответ, свидетельствующий, о незнании процессов изучаемой предметной области, незнанием основных вопросов теории; несформированными навыками анализа явлений, процессов, неумением давать аргументированные ответы.

Минимальное количество баллов за экзамен – 20

Максимальное количество баллов за экзамен – 40