Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады студентов по теоретической механике

Казань, КГЭУ, 20-24 ноября 2017 г.

Задачи теоретического конкурса

Задача С1 (*6 баллов*). Однородный стержень AB массы m располагается под заданным углом α ($0 < \alpha < \pi/2$) к вертикали AC (рис. 1). Весом стержня BC и ползуна C пренебрегаем. Коэффициент трения между ползуном C и его направляющими равен f. Под каким углом γ ($\gamma = \angle BCA$) надо расположить BC, чтобы при равновесии AB величина силы реакции стержня BC была минимальной? (Длина BC может варьироваться в зависимости от γ.) Чему равна эта минимальная сила реакции?

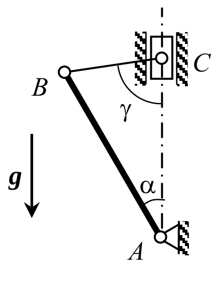

Рис. 1

Задача С2 (*9 баллов*). В конструкциях используются пластины, форма которых образована вырезанием сектора круга радиуса *R* из квадрата с длиной стороны *R* (рис. 2).

1). Весом пластины *ACD* и шарнирного стержня *DL* пренебрегаем (рис. 2а). К шарниру *D* приложена вертикальная сила, равная по величине *P*. Определите модуль полной реакции шарнира *A*. (*3 балла*)

2). Однородные пластины *ACD* и *BCE* шарнирно соединены в точке *C* (рис. 2б). Их плотность равна ρ (кг/м^2). Система располагается в вертикальной плоскости. Весами шарнирных стержней *DK*, *KL, KM, EM* пренебрегаем. Определите усилие в стержне *KL*. (*6 баллов*)

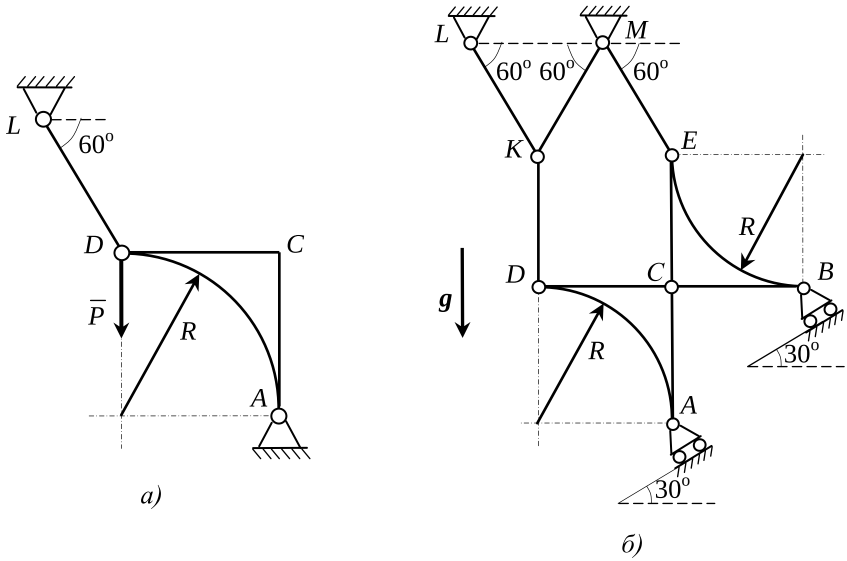

Рис. 2

Задача К1 (*5 баллов*). В трехзвенном шарнирном механизме $O_1A = O_2B = l$, $AB = 2l$ (рис. 3). В указанном на рисунке положении механизма угловое ускорение звена AB равно ε. При этом величины угловых ускорений звеньев O_1A и O_2B равны между собой. Определите величины скорости и ускорения точки C – середины звена AB.

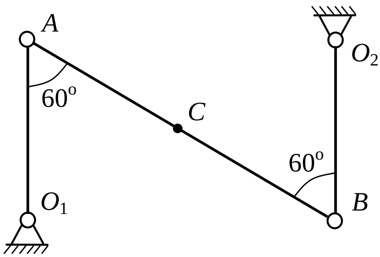

Рис. 3

Задача К2 (*8 баллов*). Пластина *1* вращается вокруг оси *z* по закону $\varphi_1 = \omega_1 t$ (угол φ_1 отсчитывается от оси *y*) (рис. 4). К стороне пластины *1*, лежащей на оси *z*, прикреплена с помощью цилиндрического шарнира *A* квадратная пластина *2* с длиной стороны *R*. Пластина *2* вращается в плоскости пластины *1* по закону $\varphi_2 = \omega_2 t$ относительно нее (угол φ_2 отсчитывается от отрицательного направления оси *z*). Здесь ω_1, ω_2 – константы.

1). В какой точке пластины *2* величина абсолютной скорости имеет максимальное значение в момент $t = 0$ и чему оно равно? (*2 балла*)

2). В пластине *2* имеется закругленный канал *BD* радиуса *R* с центром закругления в вершине *C*. По каналу *BD* движется точка *M* так, что величина угла *BCM* меняется по закону $\varphi_3 = \omega_3 t$, ω_3 – константа. Определите ускорение точки *M* в момент $t = 0$. (*6 баллов*)

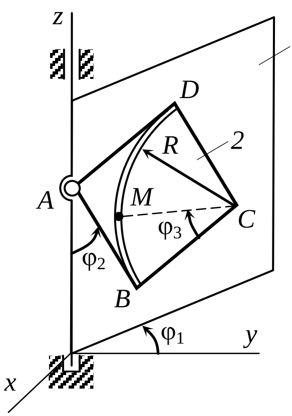

Рис. 4

Задача Д1 (*9 баллов*). Материальная точка M движется по гладкой криволинейной поверхности в вертикальной плоскости Axy лишь под действием своего веса (рис. 5). Форма этой поверхности такова, что описывающая её функция $y = y(x)$ монотонно убывает, а закон движения точки M вдоль траектории имеет вид: $s(t) = \cup AM = \dfrac{g}{k^2}(1-\cos kt)$, где k – константа ($k > 0$). Этот закон описывает движение точки M от момента $t = 0$ до момента, когда точка M окажется в положении B, где вектор её скорости будет горизонтально направлен.

1). Определите координату y точки M в момент $t = \dfrac{\pi}{6k}$. (*3 балла*)

2). Определите координату x_B. (*6 баллов*)

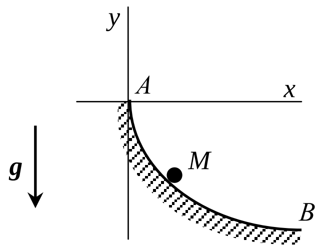

Рис. 5

Задача Д2 (*4 балла*). Ротор вращается вокруг неподвижной вертикальной оси O под действием момента сил сопротивления среды, величина которого пропорциональна квадрату угловой скорости ротора (рис. 6). В некоторый момент угловая скорость ротора была равна ω_0. По прошествии некоторого промежутка времени угловая скорость ротора уменьшилась в k раз по сравнению с ω_0. Определите угловую скорость ротора по прошествии второго точно такого же промежутка времени. Трением в подшипниках оси вращения пренебрегаем.

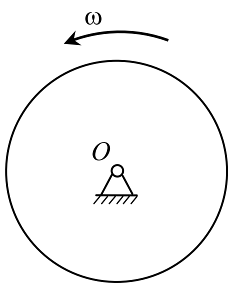

Рис. 6

Задача Д3 (*9 баллов*). Пластина, горизонтально расположенная в пространстве, прикреплена частью своей нижней поверхности к неподвижной опоре (рис. 7). В другой части пластины имеется маленькое отверстие O, в которое продета нить. К одному концу нити прикреплена материальная точка M_1 массы m_1, опирающаяся на верхнюю поверхность пластины. К другому концу нити под пластиной подвешена материальная точка M_2 массы m_2.

Пластина достаточно широка, чтобы во время движения точка M_1 не выходила за её пределы. Участок нити под пластиной достаточно длинный, чтобы точка M_2 не поднималась до уровня пластины. Трением, а также толщиной и весом нити пренебрегаем.

1). Точка M_1 получила начальную скорость $\overline{v}_0$, сонаправленную $\overline{OM_1}$ (рис. 7а). В какой момент времени скорость точки M_1 вновь окажется равной по величине v_0? (*3 балла*)

2). Точка M_1 получила начальную скорость $\overline{v}_0$ в плоскости пластины перпендикулярно участку нити OM_1 (рис. 7б). При этом $OM_1 = h_0$. При какой еще величине OM_1 во время дальнейшего движения вектор скорости точки M_1 будет вновь перпендикулярен участку нити OM_1? (*6 баллов*)

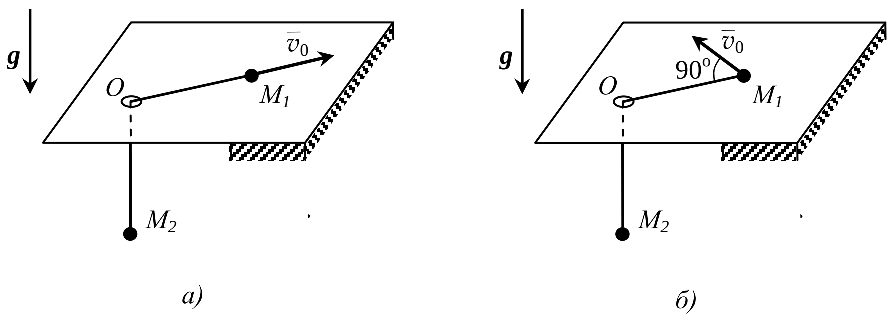

Рис. 7

Задача Д4 (*10 баллов*). На гладкую плоскость с углом наклона α положили платформу *1*, представляющую собой однородный прямоугольный брус массы m_1 с размерами, указанными на рисунке (рис. 8). На платформу установили однородный диск *2* массы m_2. К платформе приложили вверх вдоль наклонной плоскости постоянную силу, равную по величине Q, линия действия которой проходит через центр тяжести платформы. Коэффициент трения скольжения между диском и платформой равен *f*. Трением качения пренебрегаем.

Вначале диск располагался посредине на платформе, как указано на рисунке. При этом система находилась в покое. Определите время движения диска до края платформы, при котором центр диска переместится по прямолинейной траектории, пройдя расстояние относительно платформы, равное l. Сформулируйте и выведите условие, при котором такое перемещение будет возможно.

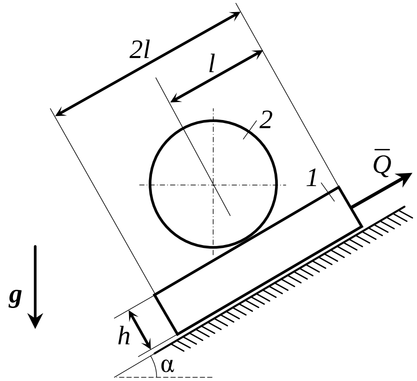

Рис. 8