

**Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады
студентов по теоретической механике**

**Казань, Казанский государственный
энергетический университет
25-29 ноября 2019 г.**

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:

доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштары Айрат Ильдарович

Рецензент:

доцент кафедры АГД К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович

Согласовано:

председатель жюри олимпиады, профессор кафедры ТМ
НГАСУ (Сибстрин) Юдин Владимир Алексеевич

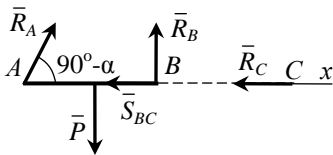


Рис. 1

Решение задачи С1.

1). Так как массой BC пренебрегаем, можно рассматривать шарнирный стержень BC как связь для твердого тела AB (рис. 1). При этом сила реакции связи $\vec{S}_{BC} = \vec{R}_C$ направлена вдоль BC . Уравнение равновесия AB для моментов:

$$\sum_k M_B(\vec{F}_k) = P \cdot \frac{AB}{2} - R_A \sin(90^\circ - \alpha) \cdot AB = 0.$$

$$R_A = \frac{P}{2 \cos \alpha}. \quad (1)$$

Далее, из уравнения для проекций с учетом (1):

$$\sum_k F_{kx} = R_A \sin \alpha - R_C = 0.$$

$$R_C = R_A \sin \alpha = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Замечание. Угол наклона плоскости для шарнирной опоры C на рисунке в условии задачи не имеет значения. Также не существенно, что AB и BC на этом рисунке выглядят одинаковыми по длине.

2). *Способ 1.* Обозначим $AB = l_1$, $BC = l_2$. Рассмотрим равновесие стержня AB (рис. 2). К стержню AB в точке B приложены силы реакции \bar{X}_B и $\bar{Y}_{B,1}$. Уравнения равновесия AB :

$$\sum_k F_{kx} = R_A \cos 45^\circ - X_B = 0. \quad (2)$$

$$\sum_k M_B(\bar{F}_k) = P_1 \cdot \frac{l_1}{2} - R_A \sin 45^\circ \cdot l_1 = 0. \quad (3)$$

Из (3):

$$R_A = \frac{P_1}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Учитывая (4) в (2), найдем:

$$X_B = \frac{P_1}{2}. \quad (5)$$

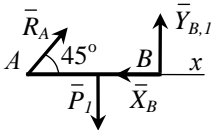


Рис. 2

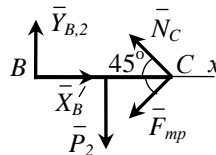


Рис. 3

Рассмотрим равновесие стержня BC (рис. 3). К стержню BC в точке B приложены силы реакции \bar{X}'_B и $\bar{Y}'_{B,2}$. Отметим, что $\bar{X}'_B = -\bar{X}_B$, $\bar{Y}'_{B,2} \neq -\bar{Y}_{B,1}$ (см. замечание 2). Уравнения равновесия BC :

$$\sum_k F_{kx} = X_B - N_C \cos 45^\circ - F_{mp} \sin 45^\circ = 0. \quad (6)$$

$$\sum_k M_B(\bar{F}_k) = -P_2 \cdot \frac{l_2}{2} + N_C \sin 45^\circ \cdot l_2 - F_{mp} \cos 45^\circ \cdot l_2 = 0. \quad (7)$$

Из (7):

$$-\frac{P_2}{2} + N_C \sin 45^\circ - F_{mp} \cos 45^\circ = 0. \quad (8)$$

Учитывая $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, удобно сложить, а также и вычесть одно из другого уравнения (6) и (8). При этом учтем также (5):

$$\frac{P_1}{2} - \frac{P_2}{2} - 2F_{mp} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$\frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2} - 2N_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Отсюда выражаем:

$$F_{mp} = \frac{P_1 - P_2}{2\sqrt{2}}. \quad (9)$$

$$N_C = \frac{P_1 + P_2}{2\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в закон Кулона $F_{mp} \leq fN_C$, получим:

$$f \geq \frac{F_{mp}}{N_C} = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}. \quad (11)$$

Замечание 1. В условии задачи длины AB и BC не заданы. (Кроме того, на рисунке BC выглядит чуть короче AB .) Поэтому в решении считаем, что, вообще говоря, $AB \neq BC$.

Замечание 2. На первый взгляд на стержень BC в точке B действуют силы, противоположные \bar{X}_B и $\bar{Y}_{B,1}$. На самом деле по 3-му закону Ньютона указанные силы действуют в точке B на систему, состоящую из BC и шарнира B , к которому приложена снизу со стороны опорной плоскости еще и вертикальная реакция \bar{R}_B . Если же рассмотреть отдельно стержень BC без шарнира B , то в точке B вдоль горизонтали действительно будет действовать сила, противоположная \bar{X}_B , а вдоль вертикали – сила $\bar{Y}_{B,2}$, такая, что $\bar{Y}_{B,1} + \bar{Y}_{B,2} = \bar{R}_B$. Это следует из условия равновесия шарнира B .

Выбор уравнений равновесия (2), (3), (6), (7) для решения задачи позволяет обойти усложнение, связанное с $\bar{Y}_{B,2} \neq -\bar{Y}_{B,1}$.

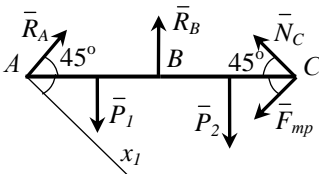


Рис. 4

Способ 2. Усложнение, изложенное в замечании 2, можно также обойти, если вместо равновесия AB рассмотреть равновесие всей конструкции (рис. 4). Для исключения реакции R_A из системы уравнений удобно спроецировать силы на наклонную ось x_1 :

$$\sum_k F_{kx_1} = (P_1 + P_2) \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ - N_C = 0. \quad (12)$$

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = -P_1 \cdot \frac{l_1}{2} - P_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + R_B l_1 + N_C \sin 45^\circ (l_1 + l_2) - F_{mp} \cos 45^\circ (l_1 + l_2) = 0. \quad (13)$$

Записываем для стержня AB одно уравнение равновесия (7). Из него выражаем:

$$N_C - F_{mp} = \frac{P_2}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

Учтем (14) в (13):

$$-P_1 \cdot \frac{l_1}{2} - P_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + R_B l_1 + \frac{P_2}{2} (l_1 + l_2) = 0.$$

$$R_B = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$
(15)

Подставим (15) в (12):

$$\frac{(P_1 + P_2)}{\sqrt{2}} - \frac{P_1 + P_2}{2\sqrt{2}} - N_C = 0,$$

откуда получаем (10).

Затем учитываем (10) в (14) и получаем (9). Далее как в способе 1 находим ответ (11).

Ответ. 1). $R_C = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{2}$. 2). $f \geq \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}$.

Решение задачи C2.

Покажем, что высоту конуса и радиус диска можно подобрать так, что величина R_B силы реакции подшипника B окажется равной нулю, тем самым принимая свое минимально возможное значение.

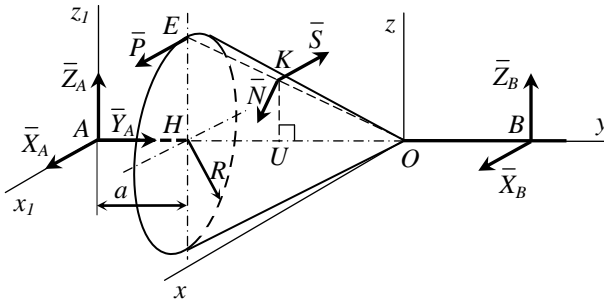


Рис. 5

Рассмотрим равновесие конуса вместе с его осью вращения (рис.5). В точке E на него действует сила натяжения нити \bar{P} ($\bar{P} \uparrow \uparrow x$), равная

по величине весу груза. В точке K со стороны диска действуют нормальная сила реакции \bar{N} ($\bar{N} \perp OE$, $\bar{N} \parallel Oyz$) и сила сцепления \bar{S} ($\bar{S} \uparrow \downarrow x$). Укажем также реакции подпятника \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A и реакции подшипника \bar{X}_B , \bar{Z}_B . Для $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 0$ должно быть $X_B = Z_B = 0$.

Введем оси координат x_1 и z_1 , проходящие через точку A . Запишем выборочно три уравнения равновесия.

$$\sum_k M_{y_1}(\bar{F}_k) = P \cdot EH - S \cdot KU = 0.$$

$$\frac{P}{S} = \frac{KU}{EH}.$$
 (1)

Так как $EH \geq KU$, то из (1):

$$P \leq S.$$
 (2)

$$\sum_k M_{z_1}(\bar{F}_k) = -P \cdot AH + S \cdot AU - X_B \cdot AB = 0.$$

Если здесь потребовать $X_B = 0$, то

$$\frac{P}{S} = \frac{AU}{AH}.$$
 (3)

Так как $AU \geq AH$, то из (3):

$$P \geq S.$$
 (4)

Из одновременного выполнения (2) и (4) следует:

$$P = S.$$
 (5)

Тогда из (3): $AU = AH$. Из этого следует, что точка K совпадает с точкой E (рис. 6).

Далее,

$$\sum_k M_{x_1}(\bar{F}_k) = M_{x_1}(\bar{N}) + Z_B \cdot AB = 0.$$

Если здесь потребовать $Z_B = 0$, то

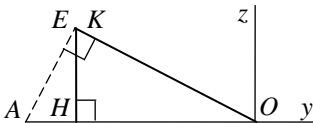


Рис. 6

$M_{x_1}(\bar{N}) = 0$, то есть линия действия силы \bar{N} проходит через точку A .

А так как $\bar{N} \perp OE$, то $\angle AEO = 90^\circ$.

Для прямоугольного треугольника AEO используем известное из геометрии свойство (следующее из подобия треугольников): $EH^2 = AH \cdot OH$. Отсюда находим высоту конуса:

$$OH = \frac{EH^2}{AH} = \frac{R^2}{a}. \quad (6)$$

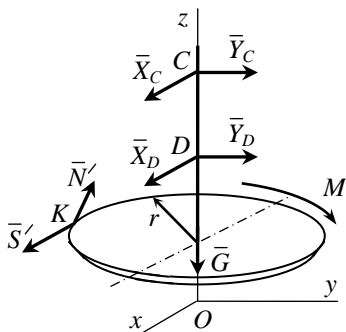


Рис. 7

Теперь рассмотрим равновесие диска вместе с его осью вращения (рис. 7). Помимо момента M на диск действуют со стороны конуса силы \bar{N}' , \bar{S}' ($\bar{N}' = -\bar{N}$, $\bar{S}' = -\bar{S}$), а также сила тяжести диска \bar{G} (заметим, что точка ее приложения может и не лежать на оси z , если диск неоднородный) и реакции подшипников \bar{X}_C , \bar{Y}_C , \bar{X}_D , \bar{Y}_D . Обозначим через r радиус диска. Достаточно записать одно уравнение равновесия:

$$\sum_k M_z(\bar{F}_k) = S r - M = 0. \quad (7)$$

Заметим (рис. 6), что расстояние от точки K до оси z равно OH . Поэтому, с учетом (6): $r = OH = R^2 / a$. Тогда из (7), с учетом (5):

$$M = S r = \frac{P R^2}{a}.$$

Замечание. Величины всех реакции связей определяются в зависимости от геометрических параметров задачи (в том числе расстояний OD и OC), что не повлияет на приведенное выше решение.

Ответ. $M = \frac{P R^2}{a}.$

Решение задачи К1.

Обозначим угол поворота OA через φ (рис.8). Тогда координаты точки B :

$$x = -R \sin \varphi, \quad y = -3R \cos \varphi. \quad (1)$$

Выражаем из (1):

$$\sin \varphi = -\frac{x}{R}, \quad \cos \varphi = -\frac{y}{3R}. \quad (2)$$

Возводя (2) в квадраты и складывая, получим уравнение траектории точки B :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{9R^2} = 1.$$

Рис. 8

Это эллипс с центром в точке O и полуосями R и $3R$.

Далее, дифференцируем (1):

$$v_x = -R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad v_y = 3R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}. \quad (3)$$

С учетом (3) скорость точки B :

$$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R |\dot{\varphi}| \sqrt{\cos^2 \varphi + 9 \sin^2 \varphi} = R \omega_1 \sqrt{1 + 8 \sin^2 \varphi}. \quad (4)$$

Так как $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$, то $0 \leq \sin^2 \varphi \leq 1$ и

$$1 \leq \sqrt{1 + 8 \sin^2 \varphi} \leq 3. \quad (5)$$

С учетом (5) и $v_B = v$ получим из (4):

$$\frac{v}{3R} \leq \omega_1 \leq \frac{v}{R}. \quad (6)$$

Замечание. При получении решения для второго вопроса задачи аналитический метод является оптимальным, позволяя дать строгое обоснование решения. Геометрический метод с использованием МЦС или теоремы о сложении скоростей при плоскопараллельном движе-

нии позволяет легко догадаться до крайних значений $\frac{v}{3R}$ и $\frac{v}{R}$ в неравенстве (6), но был бы для строгого обоснования оценки не очень удобен.

Ответ. $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{9R^2} = 1. \quad \frac{v}{3R} \leq \omega_1 \leq \frac{v}{R}.$

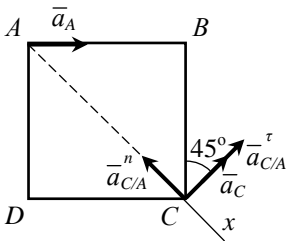


Рис. 9

Решение задачи K2.

1). Теорема о сложении ускорений при плоскопараллельном движении твердого тела (рис. 9):

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{C/A}^\tau + \bar{a}_{C/A}^n.$$

Чтобы обнулить проекции неизвестных ускорений \bar{a}_C и $\bar{a}_{C/A}^\tau$, спроецируем теорему на ось x вдоль AC и затем учтем

$$a_{C/A}^n = AC \cdot \omega^2 = \sqrt{2}l\omega^2:$$

$$0 = a_A \cos 45^\circ - a_{C/A}^n.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a - \sqrt{2}l\omega^2 = 0.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{2l}}.$$

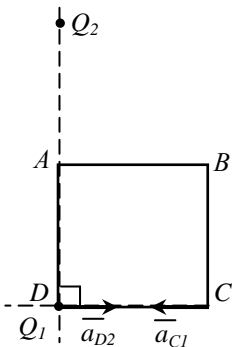


Рис. 10

2). *Способ 1.* Обозначая через Q мгновенный центр ускорений (МЦУ) пластины, можно записать для любой ее точки M :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{M/Q} = \bar{a}_{M/C} = \bar{a}_{M/Q}^\tau + \bar{a}_{M/Q}^n.$$

Для удобства будем именовать пластины $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ пластинами 1 и 2, а МЦУ для них обозначим через Q_1 и Q_2 , соответственно. Так как $\varepsilon_1 = 0$, то $\bar{a}_{C_1} = \bar{a}_{C_1/Q_1}^n$. Поэто-

му Q_1 лежит на луче, сонаправленном \bar{a}_{C_1} , т.е. на луче C_1D_1 . Так как $\omega_2 = 0$, то $\bar{a}_{D_2} = \bar{a}_{D_2/Q_2}^\tau$. Поэтому Q_2 лежит на перпендикуляре к \bar{a}_{D_2} , т.е. на прямой D_2A_2 .

На едином рисунке (рис. 10) под пластиной $ABCD$ будет иметься в виду пластина 1 или 2 при рассмотрении ускорений точек соответствующей пластины (на этом рисунке изображения пластин наложены друг на друга).

$$a_{A_1} = a_{A_1/Q_1}^n = A_1Q_1 \cdot \omega_1^2,$$

$$a_{A_2} = a_{A_2/Q_2}^\tau = A_2Q_2 \cdot \varepsilon_2.$$

Так как $a_{A_1} = a_{A_2}$, $\omega_1^2 = \varepsilon_2$, то $A_1Q_1 = A_2Q_2$. Поэтому на рис. 10 точки Q_1 и Q_2 должны лежать на одной окружности с центром A .

$$a_{B_1} = a_{B_1/Q_1}^n = B_1Q_1 \cdot \omega_1^2,$$

$$a_{B_2} = a_{B_2/Q_2}^\tau = B_2Q_2 \cdot \varepsilon_2.$$

Так как $a_{B_1} = a_{B_2}$, $\omega_1^2 = \varepsilon_2$, то $B_1Q_1 = B_2Q_2$. Значит, на рис. 10 точки Q_1 и Q_2 должны также лежать на другой окружности с центром B .

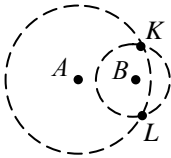


Рис. 11

Таким образом, точки Q_1 и Q_2 принадлежат одновременно обеим этим окружностям. Две произвольные окружности с разными центрами могут пересекаться в одной или двух точках. Вариант с пересечением в одной точке отбрасываем, так как иначе Q_1 лежал бы на прямой AB , т.е. не на луче CD . На рис. 11 проиллюстрирован общий случай пересечения окружностей в двух точках K и L .

Замечаем, что, во-первых, $KL \perp AB$, и во-вторых, расстояния от K и L до прямой AB одинаковы. Значит, Q_1 и Q_2 лежат на одной вертикальной (в рамках рисунка) прямой. В нашем случае Q_2 находится на вертикальной прямой DA , значит и Q_1 находится на прямой DA . В то же время Q_1 находится на луче CD . Поэтому в данный момент Q_1 совпадает с D , что аналогично положению L на рис. 11.

Соответственно, на рис. 10 точка Q_2 находится в положении, аналогичном положению K на рис. 11, т.е. выше точки A так, что $AQ_1 = AQ_2$.

Если обозначить длину стороны пластины через l , то

$$\frac{a_{C_1}}{a_{C_2}} = \frac{CQ_1 \cdot \omega_1^2}{CQ_2 \cdot \varepsilon_2} = \frac{CQ_1}{CQ_2} = \frac{CD}{\sqrt{CD^2 + (DQ_2)^2}} = \frac{l}{\sqrt{l + (2l)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{a_{D_1}}{a_{D_2}} = \frac{DQ_1 \cdot \omega_1^2}{DQ_2 \cdot \varepsilon_2} = \frac{0}{2l} = 0.$$

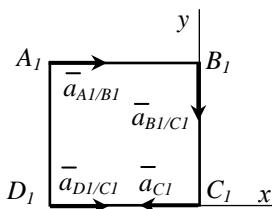


Рис. 12

Способ 2 (предложен Б.Р. Хакимовым). Используем теорему о сложении ускорений при плоскопараллельном движении твердого тела. Сначала выразим величины a_{A_1} , a_{A_2} , a_{B_1} , a_{B_2} через a_{C_1} , a_{D_2} и величину $a = l\omega_1^2 = l\varepsilon_2$.

Для пластины 1 (рис. 12):
 $\bar{a}_{B_1} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{B_1/C_1}$. Так как $\varepsilon_1 = 0$, то

$a_{B_1/C_1} = a_{B_1/C_1}^n = l\omega_1^2 = a$. Так как $\bar{a}_{C_1} \perp \bar{a}_{B_1/C_1}$, то

$$a_{B_1}^2 = a_{C_1}^2 + a_{B_1/C_1}^2 = a_{C_1}^2 + a^2. \quad (1)$$

Далее,

$$\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}_{A_1/B_1} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{B_1/C_1} + \bar{a}_{A_1/B_1},$$

$$a_{A_1/B_1} = a_{A_1/B_1}^n = l\omega_1^2 = a.$$

$$a_{A_1,x} = a_{C_1} - a_{A_1/B_1}, \quad a_{A_1,y} = -a_{B_1/C_1}.$$

$$a_{A_1}^2 = (a_{C_1} - a)^2 + a^2 = a_{C_1}^2 - 2a_{C_1}a + 2a^2. \quad (2)$$

Для пластины 2 необходимо рассмотреть два различных случая, в зависимости от направления ε_2 .

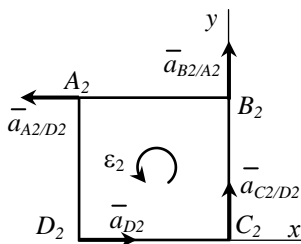


Рис. 13

1 случай. Допустим, угловое ускорение ε_2 направлено против часовой стрелки (рис. 13). $\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{D_2} + \bar{a}_{A_2/D_2}$. Так как $\omega_2 = 0$, то $a_{A_2/D_2} = a_{A_2/D_2}^\tau = l\varepsilon_2 = a$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{A_2,x} &= a_{D_2} - a_{A_2/D_2}, \quad a_{A_2,y} = 0. \\ a_{A_2}^2 &= (a_{D_2} - a)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, $\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}_{B_2/A_2} = \bar{a}_{D_2} + \bar{a}_{A_2/D_2} + \bar{a}_{B_2/A_2}$, где

$$\begin{aligned} a_{B_2/A_2} &= a_{B_2/A_2}^\tau = l\varepsilon_2 = a. \\ a_{B_2,x} &= a_{D_2} - a_{A_2/D_2}, \quad a_{B_2,y} = a_{B_2/A_2}. \\ a_{B_2}^2 &= (a_{D_2} - a)^2 + a^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из условий задачи $a_{A_1} = a_{A_2}$, $a_{B_1} = a_{B_2}$. Подставляя сюда (1) - (4), получаем:

$$a_{C_1}^2 - 2a_{C_1}a + 2a^2 = (a_{D_2} - a)^2, \quad (5)$$

$$a_{C_1}^2 + a^2 = (a_{D_2} - a)^2 + a^2. \quad (6)$$

Решаем эту систему относительно a_{C_1} , a_{D_2} . Вычитаем (6) из (5).

Отсюда получим:

$$a_{C_1} = a. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), найдем:

$$a_{D_2} = 2a. \quad (8)$$

Осталось выразить a_{C_2} , a_{D_2} . $\bar{a}_{D_1} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{D_1/C_1}$ (рис. 12), где $a_{D_1/C_1} = a_{D_1/C_1}^n = l\omega_1^2 = a$. С учетом (7): $a_{D_1,x} = a_{C_1} - a = 0$, $a_{D_1,y} = 0$. Отсюда

$$a_{D_1} = 0. \quad (9)$$

Далее, $\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{D_2} + \bar{a}_{C_2/D_2}$ (рис. 13), где $a_{C_2/D_2} = a_{C_2/D_2}^n = l\varepsilon_2 = a$. Так как $\bar{a}_{D_2} \perp \bar{a}_{C_2/D_2}$, то, с учетом (8):

$$a_{C_2} = \sqrt{a_{D_2}^2 + a_{C_2/D_2}^2} = \sqrt{5} a. \quad (10)$$

Из (7), (10), а также из (9), (8):

$$\frac{a_{C_1}}{a_{C_2}} = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (11)$$

$$\frac{a_{D_1}}{a_{D_2}} = \frac{0}{2a} = 0. \quad (12)$$

2 случай. Допустим, угловое ускорение ε_2 направлено по часовой стрелке (рис. 14). Тогда вместо (3) и (4) получим:

$$a_{A_2,x} = a_{D_2} + a_{A_2/D_2}, \quad a_{A_2,y} = 0. \\ a_{A_2}^2 = (a_{D_2} + a)^2. \quad (13)$$

$$a_{B_2,x} = a_{D_2} + a_{A_2D_2}, \quad a_{B_2,y} = -a_{B_2A_2}. \\ a_{B_2}^2 = (a_{D_2} + a)^2 + a^2. \quad (14)$$

Из условий $a_{A_1} = a_{A_2}$, $a_{B_1} = a_{B_2}$ и (1),

(2), (13), (14) получим:

$$a_{C_1}^2 - 2a_{C_1}a + 2a^2 = (a_{D_2} + a)^2. \quad (15)$$

$$a_{C_1}^2 + a^2 = (a_{D_2} + a)^2 + a^2. \quad (16)$$

Вычтем (16) из (15), получим (как и в 1-м случае):

$$a_{C_1} = a. \quad (17)$$

Однако, при подстановке (17) в (15) получаем, в отличие от 1-го случая: $a_{D_2} = 0$. Но это противоречит условию задачи $a_{D_2} \neq 0$. Значит, 2-й случай не реализуется.

Таким образом, реализоваться может лишь 1-й случай, и ответы определяются однозначно соотношениями (11), (12).

Замечание 1. Вместо $\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{B_1C_1} + \bar{a}_{A_1B_1}$ можно было разложить $\bar{a}_{A_1} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{A_1C_1}$ (тогда $a_{A_1C_1} = \sqrt{2}a$, и при проецировании учитывается угол 45°). Аналогично, $\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{D_2} + \bar{a}_{B_2D_2}$.

Замечание 2. Рассмотрение двух случаев с различными направлениями ε_2 во 2-м способе является необходимым для полноты решения.

Ответ. 1). $\omega = \sqrt{\frac{a}{2l}}$. 2). $\frac{a_{C_1}}{a_{C_2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. $\frac{a_{D_1}}{a_{D_2}} = 0$.

Решение задачи Д1.

1). Найдем коэффициент жесткости одной пружины (рис. 15). В положении равновесия A :

$$\sum_k F_{kz} = 2F_{\text{упр}} \cos 30^\circ - G = 0. \quad (1)$$

Деформации пружин при этом равны $\lambda = 2R - R = R$. С учетом $F_{\text{упр}} = cR$ получим из (1):

$$c = \frac{mg}{\sqrt{3}R}. \quad (2)$$

По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mv_O^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_G + A_{\text{упр}}. \quad (3)$$

$$A_G = -mgh = -mg \cdot OA = -mg\sqrt{(2R)^2 - R^2} = -\sqrt{3}mgR. \quad (4)$$

$$A_{\text{упр}} = 2 \cdot \frac{c\lambda^2}{2} = cR^2 = \frac{mgR}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

С учетом (4), (5) и $v_O = 0$ получим из (3):

$$-\frac{mv_A^2}{2} = -\sqrt{3}mgR + \frac{mgR}{\sqrt{3}}.$$

$$v_A = 2\sqrt{\frac{gR}{\sqrt{3}}}.$$

2). Так как расстояния между концами соседних нитей пренебрежимо малы, то число нитей можно считать стремящимся к бесконечности. При этом коэффициент упругости каждой нити является малой

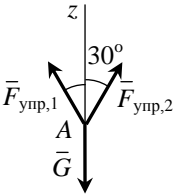


Рис. 15

величиной, которую можно обозначить через dc . Деформация каждой нити в положении A равна

$$\lambda_0 = 2R - R = R. \quad (6)$$

При этом малая сила упругости, действующая на материальную точку со стороны каждой нити, равна:

$$dF_{\text{уп}} = dc \cdot \lambda_0 = dc \cdot R. \quad (7)$$

Рассматривая рисунок, аналогичный рис. 15, запишем условие равновесия материальной точки в положении A :

$$\sum_k F_{kz} = \int_K dF_{\text{уп},z} - G = 0. \quad (8)$$

Здесь через K обозначена окружность кольца, вдоль которой происходит интегрирование.

$$dF_{\text{уп},z} = dF_{\text{уп}} \cos 30^\circ. \quad (9)$$

С учетом (7) и (9) получим из (8):

$$\int_K dc \cdot R \frac{\sqrt{3}}{2} = mg. \quad (10)$$

Введем обобщенный коэффициент упругости c :

$$c = \int_K dc. \quad (11)$$

Тогда из (9):

$$c = \frac{2mg}{\sqrt{3}R}. \quad (12)$$

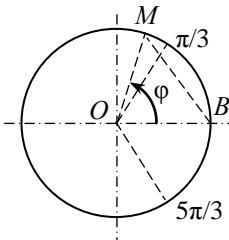


Рис. 16

Обозначим через φ угол, определяющий положение конца M какой-либо нити на окружности кольца K , $0 \leq \varphi < 2\pi$, и отсчитываемый от луча OB (рис. 16). Малый угол, характеризующий малое расстояние между концами соседних нитей, обозначим через $d\varphi$. Тогда имеет место пропорциональность:

$$\frac{dc}{c} = \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

$$dc = \frac{c}{2\pi} d\varphi. \quad (13)$$

Работа силы упругости для каждой нити:

$$dA_{\text{упр}} = -\frac{dc}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_0^2). \quad (14)$$

Здесь λ_1 – деформация нити в момент, когда материальная точка окажется в положении B (далее кратко: «при положении B »).

Обозначим часть окружности при $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi$ через K_1 . При этом $BM < R$, где R – длина нити в нерастянутом состоянии. Поэтому на K_1 нити провисают при положении B , при этом в (14): $\lambda_1 = 0$. Работа сил упругости этих нитей на перемещении материальной точки от A до B с учетом (14), (13), (12) и (6):

$$\begin{aligned} A_{\text{упр},1} &= \int_{K_1} dA_{\text{упр}} = -\int_{K_1} \frac{dc}{2}(0 - \lambda_0^2) = \frac{c}{4\pi} R^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} d\varphi \right) = \\ &= \frac{2mg}{\sqrt{3}R} \cdot \frac{1}{4\pi} R^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{mgR}{3\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим остальную часть окружности, для которой $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$, через K_2 . При этом $BM \geq R$. Поэтому на K_2 нити при положении B растянуты (а на концах K_2 недеформированы) и в (14): $\lambda_1 = BM - R \geq 0$. Из равнобедренного треугольника OBM :

$$\begin{aligned} BM &= 2R \sin \frac{\varphi}{2}. \\ \lambda_1 &= R \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1 \right). \\ \lambda_1^2 - \lambda_0^2 &= R^2 \left((2 \sin(\varphi/2) - 1)^2 - 1 \right) = R^2 \left(4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$= 2 \left(1 - \cos \varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) R^2. \quad (16)$$

Работа сил упругости этих нитей на перемещении материальной точки от A до B с учетом (14), (16), (13), (12) и (6):

$$\begin{aligned} A_{\text{уп},2} &= \int_{K_2} dA_{\text{уп}} = -\frac{c}{2\pi} R^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(1 - \cos \varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= -\frac{cR^2}{2\pi} \left(\varphi - \sin \varphi + 4 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{\pi/3}^{5\pi/3} = \\ &= -\frac{cR^2}{2\pi} \left(\frac{4\pi}{3} - (\sin(5\pi/3) - \sin(\pi/3)) + 4(\cos(5\pi/6) - \cos(\pi/6)) \right) = \\ &= -\frac{cR^2}{2\pi} \left(\frac{4\pi}{3} - 3\sqrt{3} \right) = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)mgR}{3\sqrt{3}\pi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Работа силы тяжести A_G на перемещении от A до B такая же, как и на перемещении от A до O и вычисляется по (4).

По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_{\text{уп},1} + A_{\text{уп},2} + A_G. \quad (18)$$

С учетом (15), (17) и (4), а также $v_B = 0$, получим из (18):

$$-\frac{mv_A^2}{2} = \frac{mgR}{3\sqrt{3}} + \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)mgR}{3\sqrt{3}\pi} - mg\sqrt{3}R.$$

$$v_A = \sqrt{\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\pi} \right) gR}.$$

Замечание 1. Условие о наложении на материальную точку идеальной связи, позволяющей ей перемещаться лишь вдоль отрезка AB , было введено для того, чтобы задача имела решение.

При отсутствии этого условия материальная точка, отпущенная без начальной скорости из положения B , не пройдет через положение

статического равновесия A . В этом можно убедиться с помощью численного моделирования. При этом достаточно рассмотреть более простое движение обычного пружинного маятника (материальной точки на конце одной пружины) в вертикальной плоскости, записав систему двух дифференциальных уравнений движения материальной точки и выбрав её начальное и конечное положения, аналогичные положениям B и A в основной задаче, соответственно.

А так как задача обратимая (изменение кинетической энергии и выражения работ сил на обратном перемещении лишь меняют знак), то каким бы ни было направление и величина вектора начальной скорости материальной точки в положении A , она не сможет оказаться в положении B в покое, если только её не принудить к этому, введя вышеназванное условие об идеальной связи.

Замечание 2. Очевидно, исключена ситуация, при которой скорость точки M в некотором промежуточном положении на AB была бы равна нулю, а затем точка прошла бы положение B на ненулевой скорости. Это связано с тем, что в промежуточном положении на AB удлинения нитей, и, тем более, суммы проекций сил упругости на вертикальную ось будут меньше, чем в положении A . Значит, если бы в таком положении скорость точки M оказалась бы равной нулю, то затем она стала бы перемещаться не вверх вдоль AB , а вниз вдоль AB в сторону положения равновесия A . Поэтому минимальной величине v_A в вопросе задачи соответствует $v_B = 0$.

Ответ. 1). $v_A = 2\sqrt{\frac{gR}{\sqrt{3}}}$. 2). $v_A = \sqrt{\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\pi}\right)gR}$.

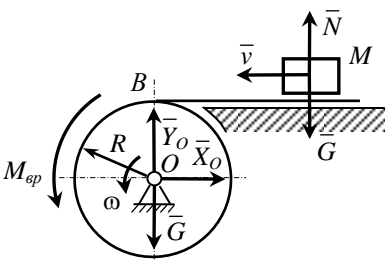


Рис. 17

Решение задачи Д2. Возможны два случая: 1) точка M не проскальзывает относительно ленты, 2) происходит проскальзывание точки M относительно ленты.

В 1-м случае скорость точки M и угловая скорость барабана связаны соотношением $v = R\omega$ (рис. 17). По

теореме об изменении кинетического момента системы относительно оси O_z барабана:

$$\frac{dK_{O_z}}{dt} = \sum_k M_{O_z}(\bar{F}_k^e).$$

$$\frac{d}{dt}(J_{O_z}\omega + mv \cdot R) = M_{ep}. \quad (1)$$

При этом учли, что силы трения являются внутренними силами, а моменты сил тяжести и нормальной реакции для точки M взаимно сокращаются. Далее, из (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mR^2}{2}\omega + mR^2\omega\right) = M_{ep}.$$

$$\frac{3}{2}mR^2\varepsilon = mgRt.$$

$$\varepsilon = \frac{2gt}{3R}. \quad (2)$$

Так как в 1-м случае ускорение точки M равно $a = a_B^{\tau} = R\varepsilon$, то при этом из (2):

$$a = \frac{2gt}{3}. \quad (3)$$

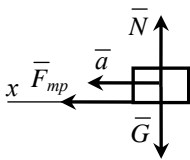


Рис. 18

Теперь рассмотрим отдельно движение точки M в общем случае (рис. 18). Единственная сила, действующая на M вдоль горизонтали – сила трения \bar{F}_{mp} со стороны ленты. Она направлена влево (так как вначале точка M была в покое относительно ленты, а затем при вращении барабана лента ускоренно смещается влево, способствуя движению M также влево). Второй закон Ньютона для точки M в проекции на ось x :

$$ma = F_{mp}. \quad (5)$$

Учтем, что $F_{mp} \leq F_{mp, \max}$, то есть $F_{mp} \leq fmg$. Поэтому в любом из двух случаев из (5) следует:

$$a \leq fg. \quad (6)$$

Таким образом, формула (3), а значит и 1-й случай могут реализо-

ваться лишь при необходимом (но не достаточном) условии:

$$\frac{2gt}{3} \leq fg .$$

$$t \leq 1 . \quad (7)$$

Для реализации 1-го случая необходимо также, чтобы в начальный момент движения точка M не имела скорости относительно ленты. Это условие выполняется, так как вначале система была в покое.

Таким образом, при начальных условиях в положении A $x(0) = 0$, $v_x(0) = 0$ в промежутке времени $0 \leq t \leq 1$ выполняется следующее из (3) дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2gt}{3} .$$

$$v = \frac{gt^2}{3} .$$

$$x = \frac{gt^3}{9} .$$

При $t_1 = 1$:

$$v_1 = \frac{g}{3} \text{ (м/с)}, \quad x_1 = \frac{g}{9} \text{ (м)}. \quad (8)$$

При $t \geq 1$: $F_{mp} = F_{mp, \max} = fmg$, и реализуется 2-й случай. При этом из (5): $a = fg$. Введем новый отсчет времени τ , при котором $\tau = 0$ при $t = 1$. Обозначим за τ_1 время движения точки M с момента $\tau = 0$ до положения B . По формуле для равноускоренного движения при начальных условиях (8):

$$l = fg \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{g}{3} \tau_1 + \frac{g}{9} .$$

$$\frac{7g}{9} = \frac{2}{3} g \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{g}{3} \tau_1 + \frac{g}{9} .$$

$$\tau_1^2 + \tau_1 - 2 = 0 .$$

$$\tau_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1 .$$

Окончательно, все время движения точки M от положения A до положения B :

$$T = t_1 + \tau_1 = 1 + 1 = 2 \text{ (с)}.$$

Ответ. $T = 2 \text{ с}$.

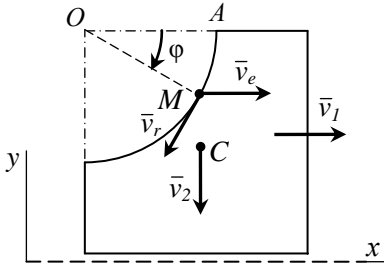


Рис. 19

Решение задачи ДЗ. Обозначим массы материальной точки и призмы через m и m_1 , соответственно, а действующие на них силы тяжести через \vec{G} и \vec{G}_1 . Со стороны горизонтальной плоскости на призму действует нормальная реакция \vec{N}_1 . Сумма проекций на горизонтальную ось x внешних сил, приложенных к системе:

$$\sum_k F_{kx}^e = G_x + G_{1x} + N_{1x} = 0.$$

С учетом того, что вначале система была в покое, по закону сохранения количества движения механической системы получим (рис. 19):

$$Q_x = (m + m_1)v_{2,x} = 0. \quad (1)$$

$$v_{2,x} = 0. \quad (2)$$

Значит, вектор скорости центра масс системы \vec{v}_2 вертикален.

Движение точки M рассмотрим как сложное. Ее переносное движение – движение M вместе с призмой вдоль x . При этом переносная скорость $\vec{v}_e = \vec{v}_1$. Ее относительное движение – движение по закруглению призмы. При этом относительная скорость \vec{v}_r направлена по касательной к закруглению.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (3)$$

Количество движения системы в проекции на ось x с учетом (1):

$$m(v_{1,x} - v_r \sin \varphi) + m_1 v_{1,x} = 0.$$

$$v_r = \frac{(m + m_1)v_{1,x}}{m \sin \varphi}. \quad (4)$$

Так как $v_r > 0$, то в (4): $v_{1,x} = v_1$, т.е. призма движется вправо.

Приравняем два способа записи количества движения системы в проекции на ось y :

$$Q_y = -(m + m_1)v_2 = -mv_r \cos \varphi.$$

$$v_r = \frac{(m + m_1)v_2}{m \cos \varphi}. \quad (5)$$

Теперь приравниваем (4) и (5):

$$\frac{(m + m_1)v_1}{m \sin \varphi} = \frac{(m + m_1)v_2}{m \cos \varphi}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{v_1}{v_2}.$$

$$\varphi = \arctg(v_1 / v_2).$$

Ответ. $\varphi = \arctg(v_1 / v_2)$.

Решение задачи Д4.

1). Обозначим $OA = l$, m – масса, C – центр тяжести стержня (рис. 20). Дифференциальное уравнение вращения однородного стержня OA вокруг оси Oz :

$$J_{Oz} \varepsilon = M_{Oz}(\bar{G}).$$

$$\frac{ml^2}{3} \varepsilon = mg \frac{l}{2} \cos 60^\circ.$$

$$\varepsilon = \frac{3g}{4l}. \quad (1)$$

Теорема о движении центра масс для OA :

$$m(\bar{a}_C^\tau + \bar{a}_C^n) = \bar{G} + \bar{X}_O + \bar{Y}_O. \quad (2)$$

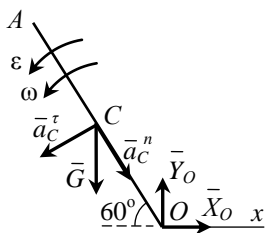


Рис. 20

Спроецируем (2) на горизонтальную ось x и учтем условие вертикальности реакции шарнира O , а именно $X_O = 0$:

$$m(-a_C^{\tau} \sin 60^\circ + a_C^n \cos 60^\circ) = 0. \quad (3)$$

Учтем $a_C^{\tau} = (l/2)\varepsilon$, $a_C^n = (l/2)\omega^2$ в (3):

$$-\frac{\sqrt{3}\varepsilon}{2} + \frac{\omega^2}{2} = 0. \quad (4)$$

Подставляя (1), получим из (4):

$$\omega = \sqrt{\varepsilon\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{l}}.$$

2). Движение точки A рассмотрим как сложное. При этом относительным будет движение A вдоль BC , а переносным – движение A вместе с BC при его плоскопараллельном движении (рис. 21, 22). По теореме о сложении скоростей при сложном движении точки:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (5)$$

Так как A вращается вокруг O , то $\bar{v}_A \perp OA$. На пересечении перпендикуляров к \bar{v}_B и \bar{v}_C получаем точку P – МЦС для BC . Переносная скорость $\bar{v}_e \perp AP$. Относительная скорость \bar{v}_r направлена вдоль BC .

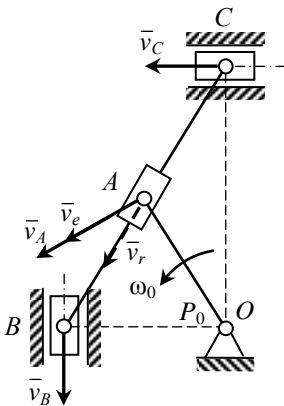


Рис. 21

В начальный момент (рис. 21) положение P_0 совпадает с точкой O . Поэтому при этом $\bar{v}_e \perp OA$. Так как из условия следует, что в этот момент OAB – правильный треугольник, то \bar{v}_e и \bar{v}_r не параллельны. Если спроецировать (5) на ось вдоль OA , получим $v_r = 0$. Поэтому в начальный момент:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_e.$$

Кинетическая энергия OA в начальный момент:

$$T_{OA,0} = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega_0^2 = \frac{ml^2 \omega_0^2}{6}. \quad (6)$$

Угловая скорость BC :

$$\omega_{BC,0} = \frac{v_e}{AP_0} = \frac{v_A}{OA} = \omega_0. \quad (7)$$

Кинетическая энергия BC в начальный момент с учетом (7) и того, что центр тяжести BC находится в точке, положение которой в данный момент совпадает с точкой A :

$$\begin{aligned} T_{BC,0} &= \frac{1}{2} J_{P_0z} \omega_{BC,0}^2 = \frac{1}{2} (J_{Az} + m_{BC} AO^2) \omega_0^2 = \frac{1}{2} \left(m_{BC} \frac{(2l)^2}{12} + m_{BC} l^2 \right) \omega_0^2 = \\ &= \frac{2m_{BC} l^2 \omega_0^2}{3} = \frac{ml^2 \omega_0^2}{3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (6) и (8) кинетическая энергия системы в начальный момент:

$$T_0 = T_{OA,0} + T_{BC,0} = \frac{ml^2 \omega_0^2}{2}. \quad (9)$$

С началом движения с учетом направления ω_0 центры тяжести OA и BC начинают опускаться. При этом работа силы тяжести положительна и кинетическая энергия системы будет возрастать. Установим положение системы, при котором скорости точек стержня BC окажутся равными нулю, но при этом стержень OA с кинетической энергией, равной кинетической энергии всей системы, продолжит свое движение.

Заметим, что угловая скорость стержня BC будет равна нулю (а значит и скорости всех его точек равны нулю), если скорость какой-то его точки, отличной от B или C , окажется равной нулю. (Несложно убедиться, что МЦС в такой точке оказаться не может.) В качестве такой точки рассмотрим точку стержня BC , в положении которой в данный момент находится ползун A . Таким

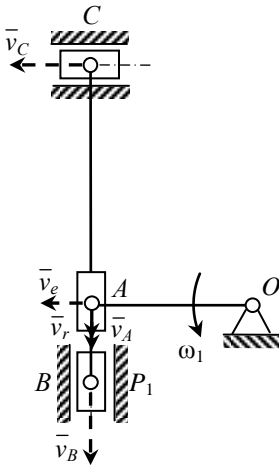


Рис. 22

образом, переносная скорость \bar{v}_e ползуна A должна равняться нулю. Из (5):

$$\bar{v}_A = \bar{v}_r.$$

Тогда \bar{v}_A параллельна BC . Так как $\bar{v}_A \perp OA$, то в этот момент должно быть $OA \perp BC$. На рис. 22 указано такое положение системы. Оно реализуется благодаря тому, что расстояние от шарнира O до линии движения ползуна B равно длине OA . Из геометрических соображений можно сделать вывод, что до этого момента условие $OA \perp BC$ realizоваться не может (см. замечание).

Возможно также несколько иное рассуждение. При вертикальном положении BC положение МЦС P_1 совпадает с точкой B . При этом получается, что $\bar{v}_e \perp AB$. При проецировании (5) на ось вдоль OA получим $\bar{v}_e = 0$, откуда $\omega_{BC} = v_e / AP_1 = 0$.

Кинетическая энергия системы в этот момент (по аналогии с (6)):

$$T_1 = T_{OA,1} = \frac{ml^2 \omega_1^2}{6}. \quad (10)$$

Изменение высот центров тяжести OA и BC :

$$H_{OA} = \frac{OA}{2} \sin 60^\circ = \frac{l\sqrt{3}}{4},$$

$$H_{BC} = \frac{BC}{2} (1 - \sin 60^\circ) = l \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Тогда сумма работ внешних сил:

$$\begin{aligned} \sum_k A_k^e &= A_{G_{OA}} + A_{G_{BC}} = m_{OA} g H_{OA} + m_{BC} g H_{BC} = \\ &= \frac{mgl\sqrt{3}}{4} + \frac{mgl}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{mgl}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляем (9), (10) и (11) в теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^e.$$

$$\frac{ml^2\omega_1^2}{6} - \frac{ml^2\omega_0^2}{2} = \frac{mgl}{2}.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3(l\omega_0^2 + g)}{l}}.$$

Замечание. То, что условие $OA \perp BC$ не может реализоваться ранее достижения положения, указанного на рис. 22, и так достаточно хорошо видно по рисунку. Приведем схему рассуждений для строгого обоснования этого. Можно было бы ввести систему координат xu с началом в точке пересечения линий ползунов B и C и осью x вдоль горизонтали, записать уравнение прямой BC в виде $ax + by + c = 0$ с учетом $x_C^2 + y_B^2 = (2l)^2$, записать формулу для расстояния от точки O до этой прямой $h = \frac{|ax_O + by_O + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и далее численно показать, что при уменьшении x_C от l до 0 величина h монотонно возрастает от $\sqrt{3}l/2$ до l . Из последнего с учетом $OA = l$ будет следовать, что условие $OA \perp BC$ достигается при $x_C = 0$, что соответствует положению системы на рис. 22.

Ответ. 1). $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{l}}$. 2). $\omega_1 = \sqrt{\frac{3(l\omega_0^2 + g)}{l}}$.