

**Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады  
студентов по теоретической механике**

**Казань, КГЭУ, 19 – 23 ноября 2018 г.**

**Задачи теоретического конкурса**

**Задача C1** (7 баллов). К концу  $B$  однородного стержня  $AB$  веса  $P$  прикреплена материальная точка веса  $7P$  (рис. 1). Своим концом  $A$  стержень упирается в обод однородного диска, шарнирно закрепленного в точке  $O$ . Прямая  $AB$  проходит через центр диска, заданы углы  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Коэффициент трения между стержнем и диском равен  $f = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ . Кроме того, стержень  $AB$  опирается на гладкую наклонную поверхность по всей своей длине кроме малой окрестности около точки  $A$  так, что между левым краем этой поверхности и диском сохраняется зазор. При каком весе  $Q$  диска система при этих условиях будет в равновесии?

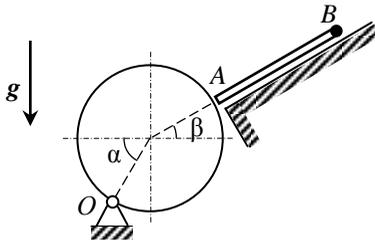


Рис. 1

**Задача C2** (9 баллов). Однородный стержень  $AB$  и стержень  $AC$ , массой которого пренебрегаем, опираются на гладкие выступы своими серединами  $D$  и  $E$ , соответственно (рис. 2). Длины стержней, а также углы их наклона к горизонтали одинаковы.

1). Стержни  $AB$  и  $AC$  жестко прикреплены друг к другу в точке  $A$  (рис. 2а). Вес стержня  $AB$  равен  $P$ . При каких значениях веса  $Q$  груза можно подобрать такую точку стержня  $AC$ , что если к ней подвесить этот груз, то тело  $BAC$  окажется в равновесии? (3 балла)

2). Стержни  $AB$  и  $AC$  соединены шарниром  $A$  и дополнительно опираются на гладкие выступы своими точками, расположенными на пренебрежимо малом расстоянии от концов  $B$  и  $C$ , соответственно (рис. 2б). При каких значениях угла  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) система будет в равновесии? Во сколько раз при этом реакция опоры в точке  $B$  отличается от реакции опоры в точке  $C$ ? (6 баллов)

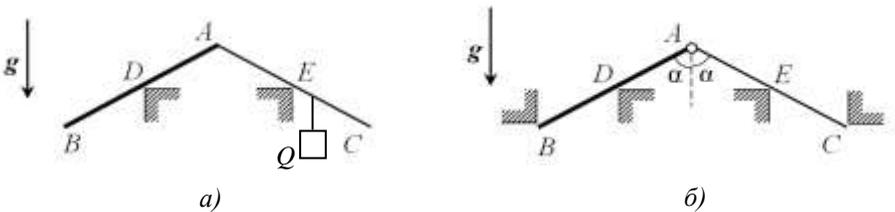


Рис. 2

**Задача К1** (4 балла). Точка  $M$  движется в плоскости, на которой введены оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , как указано на рисунке (рис. 3). Проекции на оси  $x_1$  и  $x_3$  радиус-вектора точки  $M$  изменяются по законам:  $x_1(t) = t$ ,  $x_3(t) = t^3$ . Определите  $a_{x_2}(t)$  – проекцию вектора ускорения точки  $M$  на ось  $x_2$  в зависимости от времени  $t$ .

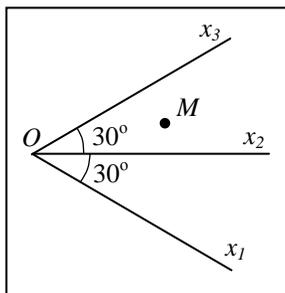


Рис. 3

**Задача К2** (9 баллов). Крестовина  $K$  может скользить вдоль стержней  $AB$  и  $OC$  (рис. 4). Направляющие ползунов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $O$  под углом  $60^\circ$ .  $AB = l$ . Угловая скорость стержня  $OC$  постоянна и равна  $\omega$ . В рассматриваемом положении механизма  $AK = BK$ .

- 1). Определите скорость ползуна  $B$ . (3 балла)
- 2). Найдите ускорение крестовины  $K$  относительно стержня  $OC$ . (6 баллов)

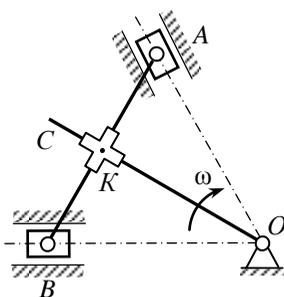


Рис. 4

**Задача Д1** (5 баллов). Материальная точка  $M$  массы  $m$  находится на гладкой горизонтальной площадке  $KL$  шириной  $2\delta$  (рис. 5). По окружности с центром в середине площадки  $O$  движется магнит  $A$ , притягивающий точку  $M$  с силой  $\bar{Q}$ . Величину  $\delta$  считаем пренебрежимо малой по сравнению с радиусом этой окружности. Силу  $Q$  считаем постоянной и заданной,  $Q \leq mg$ . В момент  $t=0$  точка  $M$  была в покое в положении  $K$ . При каком значении  $\omega$  в законе вращения магнита  $A$   $\varphi = \omega t$  ( $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$ ) точка  $M$  будет двигаться по площадке  $KL$  неограниченно долго?

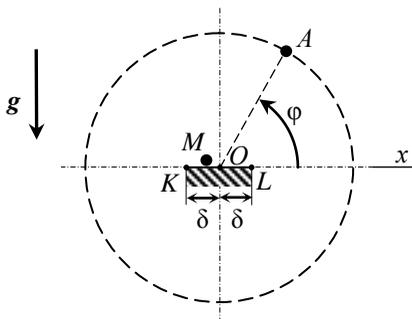


Рис. 5

**Задача Д2** (8 баллов). Твердое тело образовано однородными дисками 1 и 2, жестко соединенными друг с другом, с совмещенными центрами (рис. 6). Радиусы дисков равны  $r$  и  $2r$ , соответственно. Толщины и плотности обоих дисков одинаковы. Тело находится на гладкой горизонтальной поверхности. К сходящим с дисков невесомым нерастяжимым нитям приложены силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Направления этих сил постоянны,  $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$ ,  $F_1(t) = e^{\sin t}$ ,  $F_2(t) = 2e^{\sin t}$ . При  $t = 0$  тело было в покое. Определите угловую скорость тела в момент, когда скорость точки  $A$  приложения силы  $\vec{F}_1$  равна  $v$ .

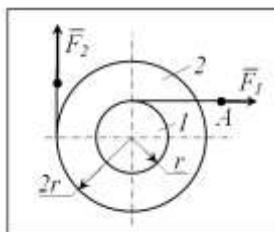


Рис. 6

**Задача ДЗ** (8 баллов). Клин массы  $m$  расположен на горизонтальной плоскости (рис. 7). Угол скоса клина равен  $\alpha$ . Поверхность скоса клина контактирует с малым валиком на конце стержня  $AB$ , скользящего вдоль гладких направляющих. Другой конец стержня прикреплен к пружине жесткости  $c$ , расположенной вдоль прямой  $AB$ . Размеры клина не позволяют ему опрокинуться. Массой валика и пружины пренебрегаем.

1). Стержень  $AB$  горизонтален, его массой пренебрегаем (рис. 7а). Коэффициент трения скольжения между клином и плоскостью равен  $f$ . Найдите ускорение клина в момент, когда его скорость направлена вправо, а величина сжатия пружины равна  $\lambda = mg/c$ . (3 балла)

2). Стержень  $AB$  вертикален, его масса равна  $m_2$  (рис. 7б). Трением пренебрегаем. В момент  $t=0$ , когда система была в равновесии, клину придали начальную скорость вправо. Найдите время движения клина до момента, когда его скорость будет равна нулю. Считаем, что поверхность скоса клина достаточно протяженная. (5 баллов)

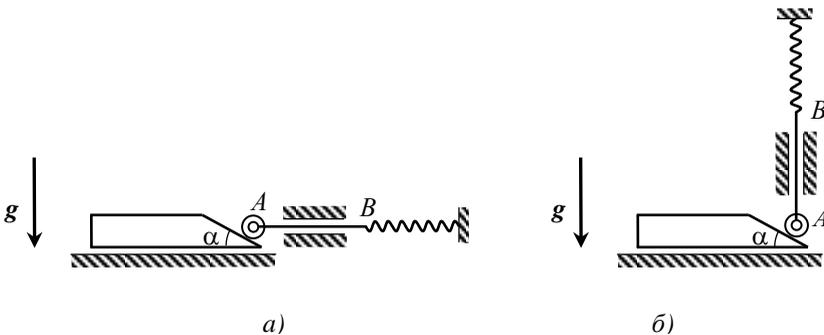


Рис. 7

**Задача Д4** (10 баллов). В конструкции спортивного тренажера маховик 1 радиуса  $R$  и массы  $M$  имеет ось вращения  $O$  (рис. 8). Считаем, что масса маховика равномерно распределена по его ободу. Тело 2 имеет массу  $m$ . В указанном на рисунке положении система находилась в покое. Определите скорость точки  $B$ , когда она окажется в своем нижнем положении, для следующих двух случаев.

1). Тело 2 – криволинейный шатун  $ABC$  с прямолинейными участками  $AB$  и  $BC$  пренебрежимо малой массы с прикрепленной к нему в точке  $B$  материальной точкой (рис. 8а).  $AB = BC = 2R$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Массой ползуна  $C$  пренебрегаем. (3 балла)

2). В точке  $B$  к ободу маховика прикреплена педаль 3 (рис. 8б). С помощью специального механизма, расположенного на ободу, (он не изображен на рисунке) поверхность педали все время остается горизонтальной. Массами педали и специального механизма пренебрегаем. Тело 2 – спортсмен, опирающийся ногой на педаль (стопа зафиксирована относительно педали) и своими мышечными усилиями обеспечивающий поступательность своего движения. При этом центр тяжести спортсмена находится на одной вертикали с точкой  $B$  и выше нее на расстояние  $l$ ,  $0 < l < (M + m)R / m$ . (7 баллов)

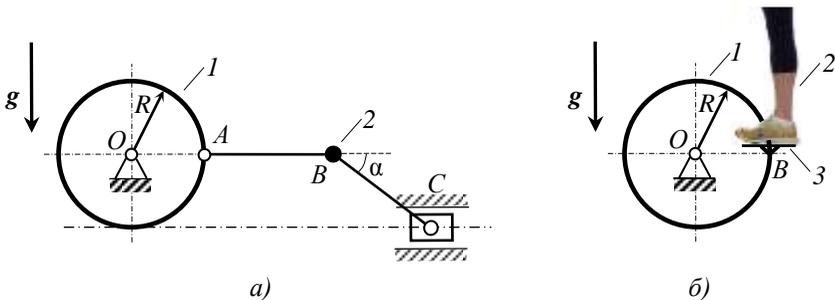


Рис. 8