Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КГЭУ, 5-9 декабря 2016 г.

Решения задач компьютерного конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович.
Рецензент:
доцент кафедры АГД К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович.

Решение задачи 1.

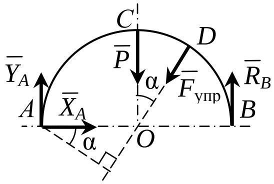

Рис. 1

1.1. Уравнение равновесия арки (рис. 1):

$$\sum_k M_A(\overline{F}_k) = R_B \cdot 2r - Pr - F_{упр} r\cos\alpha = 0 .$$

$$R_B = 0.5(P + F_{упр}\cos\alpha) . \qquad (1)$$

Если обозначить через l длину дуги CD, то $F_{упр} = c(l + r - r) = cl = c\alpha r$. Тогда из (1):

$$R_B = 0.5(P + cr\alpha\cos\alpha) . \qquad (2)$$

Так как $\alpha\cos\alpha \ge 0$, причем при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ будет $\alpha\cos\alpha = 0$, то $R_{B,\max}$ достигается во внутренней точке отрезка $0 \le \alpha \le \pi/2$. Ищем $R_{B,\max}$ численно.

1 способ.

Проще всего вычислить $R_{B,\max}$ перебором значений $R_B(\alpha)$, последовательно увеличивая α от 0 до $\pi/2$ с малым шагом $\Delta\alpha$. Для требуемой точности достаточно выбрать $\Delta\alpha = 10^{-4}$ (рад).

2 способ.

$$f(\alpha) = dR_B / d\alpha = 0.5cr(\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) .$$

Решаем нелинейное уравнение $f(\alpha) = 0$, например, методом последовательного деления отрезка пополам.

При $P = 10$ Н, $c = 20$ Н/м получим $R_{B,max} = 7.805$ Н. Это значение достигается при $\alpha = 0.8603$ рад.

Заметим, что значение R_B не зависит от того, отсчитывается ли α от OC против часовой или по часовой стрелке.

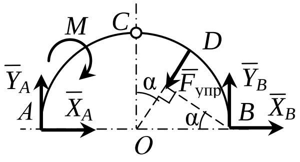

Рис. 2

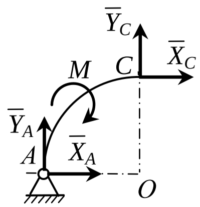

Рис. 3

1.2. Уравнение равновесия всей арки *ACB* (рис. 2):

$$\sum_k M_B(\overline{F}_k) = -Y_A \cdot 2r - M + F_{упр} \cdot r\cos\alpha = 0 .$$

$$Y_A = \frac{1}{2r}\left(cr^2\alpha\cos\alpha - M\right). \qquad (3)$$

Рассмотрим равновесие части *AC* (рис. 3). Заметим, что сила упругости нити, приложенная к шарниру *C*, является составной частью реакции $\overline{X}_C$, приложенной к *AC* в точке *C*. Достаточно записать следующее уравнение равновесия *AC*:

$$\sum_k M_C(\overline{F}_k) = X_A \cdot r - Y_A \cdot r - M = 0 .$$

$$X_A = Y_A + \frac{M}{r} . \qquad (4)$$

Учтем (3) в (4):

$$X_A = \frac{1}{2r}\left(cr^2\alpha\cos\alpha + M\right). \qquad (5)$$

Тогда с учетом (3), (5):

$$R_A(\alpha) = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} ,$$

причем выражения для X_A, X_A согласно (3), (5) можно подставить уже в самой программе. При желании легко получить и окончательное выражение для $R_A(\alpha)$:

$$R_A(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}r}\sqrt{\left(cr^2\alpha\cos\alpha\right)^2+M^2}\ .$$

Численное решение для определения $R_{A,\max}$ возможно теми же двумя способами, что и в решении задания 1.1. Фактически задача вновь сводится к нахождению максимального значения функции $\alpha\cos\alpha$. В решении задания 1.1 было получено, что оно достигается при $\alpha=0.8603$ рад.

При $M=10$ Н$\cdot$ м, $c=100$ Н/м получим $R_{A,\max}=24.363$ Н.

Решение задачи 2.

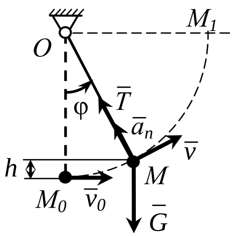

Рис. 4

2.1. Так как точкам *A*, *B*, *C* придали одинаково направленные начальные скорости, то диск начинает двигаться поступательно. Очевидно, что движение останется поступательным и в дальнейшем. (Это можно строго обосновать, записав теорему об изменении кинетического момента относительно центра тяжести диска и показав, что угловые ускорения относительно любой из координатных осей остаются равными нулю,) Равнодействующая трех одинаковых сил реакций стержней приложена к центру тяжести диска. Поэтому исходная задача сводится к задаче о движении материальной точки *M* массы m, прикрепленной к концу невесомого стержня длины *l*, вращающегося вокруг неподвижной оси *O* (рис. 4).

Работа силы тяжести на перемещении M_0M:

$$A_G=-mgh=-mg(l-l\cos\varphi).$$

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-mgl(1-\cos\varphi). \tag{1}$$

На перемещении M_0M_1:

$$-\frac{mv_0^2}{2}=-mgl. \qquad (2)$$

С учетом (2), а также $v=l\dot{\varphi}$ получим из (1):

$$\frac{mv^2}{2}=mglcos\varphi.$$

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{2g\,cos\varphi}{l}}\,. \qquad (3)$$

Начальное условие: $\varphi(0)=0$. Искомый момент $t=\tau$ реализуется при условии $h=l/2$, т.е. $\varphi(\tau)=\pi/3$.

Для численного решения ДУ 1-го порядка (3) можно использовать, например, метод Рунге-Кутта с шагом по времени $h=10^{-6}$ с. Вычисления прекращаются, как только в программе реализуется $\varphi\geq\pi/3$.

Из записи 2-го закона Ньютона в проекции на нормальную ось *MO* получим соотношение для силы реакции стержня *T*, с учетом (3):

$$ma_n=T-Gcos\varphi.$$

$$T=m(l\dot{\varphi}^2+g\,cos\varphi)=3mgcos\varphi. \qquad (4)$$

Подставляем в (4) значение φ, соответствующее моменту $t=\tau/2$, которое определяется численно. Из исходной постановки задачи о диске, прикрепленном к трем шарнирным стержням, следует окончательно:

$$R_{O_1}=T/3=mgcos\varphi.$$

2.2. Как следует из условия, при $t=0$ распределение скоростей диска соответствует вращению тела вокруг неподвижной оси *z*. Однако при $t>0$ вследствие наложенных на тело связей – нерастяжимых стержней – движение тела будет иметь кроме вращательной составляющей также и поступательную составляющую. Обозначим через *s* и φ вертикальное перемещение диска и его угол поворота вокруг *z*, соответственно. (При этом s возрастает от 0 до *l*, а в силу условия $0<l<2r$ максимальное значение φ меньше π). Движение каждой точки тела M_k рассмотрим как сложное движение, при котором переносным является движение точки вверх вдоль z со скоростью $v_{k,e} = v_D = \dot{s}$, а относительным – вращение вокруг оси z со скоростью $v_{k,r}$ и угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Переносная и относительная скорости $\bar{v}_{k,e}$ и $\bar{v}_{k,r}$ взаимно перпендикулярны. Тогда кинетическая энергия тела равна:

$$T = \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_k \frac{m_k \bar{v}_{k,абс}^2}{2} = \sum_k \frac{m_k (\bar{v}_{k,e} + \bar{v}_{k,r})^2}{2} =$$

$$= \sum_k \left(\frac{m_k v_{k,e}^2}{2} + \frac{m_k 2 v_{k,e} v_{k,r} \cos 90^o}{2} + \frac{m_k v_{k,r}^2}{2} \right) = \sum_k \left(\frac{m_k v_{k,e}^2}{2} + \frac{m_k v_{k,r}^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{m \dot{s}^2}{2} + \frac{J_{Dz} \dot{\varphi}^2}{2}. \qquad (5)$$

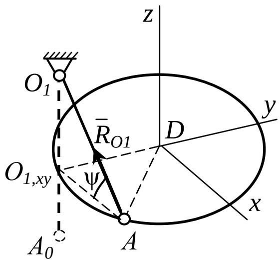

Рис. 5

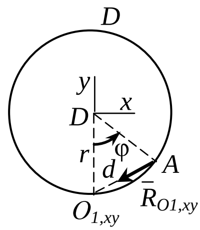

Рис. 6

Точка A стержня O_1A перемещается из начального положения A_0 вдоль оси z на величину $A_0O_{1,xy} = s$ (рис. 5), а в перпендикулярной ей плоскости Dxy, поступательно поднимающейся вместе с центром диска D, перемещается на величину $O_{1,xy}A = d$ (рис. 6):

$$d = 2r \sin(\varphi/2) = \sqrt{2r^2(1 - \cos\varphi)}. \qquad (6)$$

В прямоугольном треугольнике $O_1O_{1,xy}A$, находящемуся в вертикальной плоскости, по теореме Пифагора с учетом (6) запишем:

$$l^2 = (l - s)^2 + d^2.$$

$$s = l - \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)}\,. \tag{7}$$

$$\dot{s} = -\frac{-2r^2 \sin\varphi}{2\sqrt{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)}}\dot{\varphi} = \frac{r^2 \sin\varphi}{\sqrt{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)}}\dot{\varphi}\,. \tag{8}$$

Учтем $J_{Dz} = mr^2/2$, а также (8) в (5):

$$T = \frac{m}{2}\frac{r^4 \sin^2\varphi}{(l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi))}\dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{4} = \frac{mr^2}{4}\left(\frac{2r^2 \sin^2\varphi}{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)} + 1\right)\dot{\varphi}^2\,. \tag{9}$$

Работа силы тяжести с учетом (7):

$$A_G = -mgs = -mg\left(l - \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)}\right). \tag{10}$$

Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела с учетом (9) и (10):

$$T - T_0 = A_G\,.$$

$$\frac{mr^2}{4}\left(\frac{2r^2 \sin^2\varphi}{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)} + 1\right)\dot{\varphi}^2 - T_0 = -mg\left(l - \sqrt{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)}\right). \tag{11}$$

Так как при перемещении тела из начального в наивысшее положение будет выполняться:

$$-T_0 = -mgl,$$

то в (11) произойдет сокращение этих слагаемых и получим после сокращения *m*:

$$\frac{r^2}{4}\left(\frac{2r^2 \sin^2\varphi}{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)} + 1\right)\dot{\varphi}^2 = g\sqrt{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)}\,. \tag{12}$$

Для удобства обозначим в (12):

$$f(\varphi) = \frac{r^2}{4}\left(\frac{2r^2 \sin^2\varphi}{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)} + 1\right), \quad q(\varphi) = g\sqrt{l^2 - 2r^2(1 - cos\varphi)}\,,$$

Получим окончательно ДУ 1-го порядка:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{q(\varphi)}{f(\varphi)}}\,. \tag{13}$$

Начальное условие: $\varphi(0)=0$. Искомый момент $t=\tau$ реализуется при условии $s=l/2$. (Вычисления в программе прекращаются, как только реализуется $s \geq l/2$).

Для определения R_{O_1} запишем теорему об изменении кинетического момента относительно оси *z* (рис. 5, 6). При этом учтем, что реакция шарнира равна реакции шарнирного стержня, приложенной к точке *A*. Так как векторы количеств движений $m_k \bar{v}_{k,e}$ дают нулевые моменты относительно оси *z*, теорема будет иметь вид ДУ вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$J_{Dz}\ddot{\varphi}=3M_z(\bar{R}_{O_1}).$$

С учетом $cos\alpha = d/l$, соотношения (6) и того, что плечо составляющей $\bar{R}_{O_1,xy}$ равно $h=r\,cos(\varphi/2)$, найдем:

$$M_z(\bar{R}_{O_1})=-R_{O_1,xy}h=-R_{O_1}\,cos\alpha\cdot r\,cos(\varphi/2)=-R_{O_1}\frac{r^2}{l}sin\,\varphi.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi}=-3R_{O_1}\frac{r^2}{l}sin\,\varphi.$$

$$R_{O_1}=-\frac{Ml\,\ddot{\varphi}}{6\,sin\,\varphi}.$$

Определить $\ddot{\varphi}$ проще всего численно с помощью соотношения:

$$\ddot{\varphi}=\frac{\dot{\varphi}(t+\Delta t)-\dot{\varphi}(t)}{\Delta t},$$

использовав (13). Здесь Δt – малый шаг по времени при численном решении ДУ (13).

Другой способ получения разрешающего ДУ состоит в выражении кинетической энергии на базе (5) через $\dot{s}$. Из (7) можно получить:

$$cos\varphi=\frac{2r^2-2ls+s^2}{2r^2}. \qquad (14)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(l-s)\dot{s}}{r^2 \sin\varphi}.$$

Далее из (5):

$$T = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{(l-s)^2}{2r^2(1-\cos^2\varphi(s))}\right)\dot{s}^2 = mp(s)\,\dot{s}^2, \qquad (15)$$

где выражение $\cos\varphi(s)$ берется из (14), а обозначение $p(s)$ ввели для удобства записи. С учетом (10) теорему запишем в кратком виде:

$$mp(s)\,\dot{s}^2 - T_0 = -mgs.$$

С учетом $T_0 = mgl$ получим окончательно ДУ вида

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{g(l-s)}{p(s)}}.$$

При его программировании возникает затруднение, связанное с тем, что на первом шаге численного метода при $t = 0$ в (15) в знаменателе будет $1 - \cos^2\varphi = 0$, при этом и в числителе будет $\dot{s}^2 = 0$, т.е. возникает неопределенность вида $0/0$. Проблему с делением на ноль можно решить, изменив на пренебрежимо малую величину начальное условие, полагая, например, $s(0) = 10^{-8}$. В корректности этого можно убедиться, сопоставив ответ с ответом, полученным первым способом.

Для определения R_{O_1} запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось z:

$$m\ddot{s} = -mg + 3R_{O_1}\sin\alpha.$$

Здесь $\sin\alpha = \dfrac{l-s}{l}$, а ускорение $\ddot{s}$ удобно определить численно из:

$$\ddot{s} = \frac{\dot{s}(t+\Delta t) - \dot{s}(t)}{\Delta t}.$$

Тогда окончательно:

$$R_{O_1} = \frac{m(\ddot{s}+g)}{3(l-s)}.$$

Ответы, полученные двумя способами, совпадают.

Заметим также, что для получении ДУ можно также использовать уравнения Лагранжа 2 рода для механической системы с одной степенью свободы. Получится ДУ второго порядка.

Примеры вычислений для заданий 2.1 и 2.2 приведены в условиях задач в примерах для отладки.

Критерии оценивания ответов участников

При записи ответов в бланки указывается ровно столько цифр после десятичной запятой, сколько их приведено в соответствующих примерах для отладки. Последняя значащая цифра пишется с учетом округления.

При проверке ответов участников во всех конкурсных заданиях полный балл присуждается, если либо предложенный ответ совпадает с правильным либо абсолютная погрешность не превышает «1» по последней значащей цифре. При большей погрешности предложенного ответа, если ответ близок к правильному, баллы присуждаются на основании разбалловки, выработанной жюри.