Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КГЭУ, 25-29 ноября 2019 г.

Решения задач компьютерного конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович

Рецензент:
доцент кафедры АГМ К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович

Решение задачи 1.

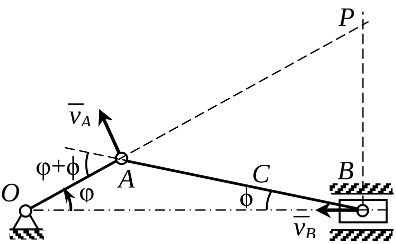

Рис. 1

1.1. Обозначим $\phi = \angle OBA$ (рис. 1). По теореме синусов в ΔOAB:

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{2l}{\sin\varphi}.$$

$$\phi = \arcsin(0{,}5\sin\varphi). \qquad (1)$$

По теореме о проекциях скоростей для AB:

$$v_A \cos(90^\circ - (\varphi + \phi)) = v_B \cos\phi.$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\sin(\varphi + \phi)}{\cos\phi}. \qquad (2)$$

$$\frac{\sin(\varphi + \phi)}{\cos\phi} - k_1 = 0. \qquad (3)$$

Требуется решить нелинейное уравнение (3) относительно угла φ, с учетом выражения ϕ через φ из (1).

Отметим, что после ряда тригонометрических преобразований возможно свести уравнение (3) к кубическому уравнению, которое имеет довольно громоздкое аналитическое решение. Проще решить (3) численно.

Вначале проанализируем (3), исходя из

$$k_1 = \frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP},$$

где P – МЦС для AB.

Из рисунка можно заметить, что при увеличении φ от 0 до $\pi/2$ величина k_1 вначале монотонно возрастает от 0 до некоторого значения $k_{1,\max}$ ($k_{1,\max} > 1$), а затем монотонно убывает до 1. Это можно проверить численно, используя (2). При этом устанавливается, что $k_{1,\max} = 1.12321$ при $\varphi_{1,\max} = 1.18158$ рад.

При $0 < k_1 < 1$ уравнение (3) имеет единственное решение, которое принадлежит отрезку $[0; \varphi_{1,\max}]$. Например, при $k_1 = 0.6$ получим $\varphi = 0.42164$ рад. При $1 \le k_1 < k_{1,\max}$ уравнение (3) имеет два корня, наибольший из которых принадлежит отрезку $[\varphi_{1,\max}; \pi/2]$. Например, при $k_1 = 1.1$ получим $\varphi = 1.34341$ рад. При $k_1 > k_{1,\max}$ уравнение (3) не имеет решений.

График зависимости $k_1 = k_1(\varphi)$ приведен на рис. 2.

При численном решении этого и последующих заданий можно использовать метод половинного деления (на участках монотонности) либо метод простого перебора по сетке.

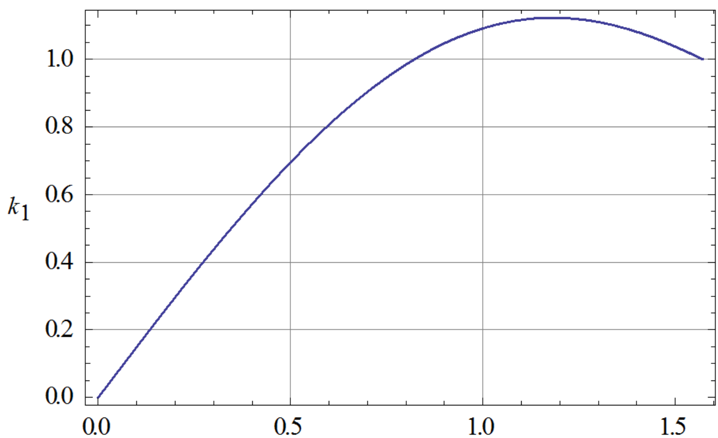

Рис. 2

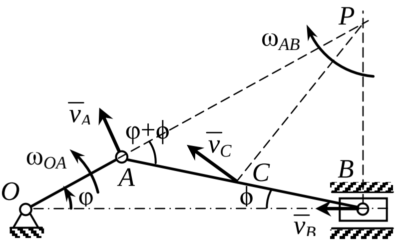

Рис. 3

1.2. Приведем способ, использующий в отличие от решения пункта 1.1 теорему косинусов для ΔOAB. Обозначим $d = OB$ (рис. 3).

$$4l^2 = l^2 + d^2 - 2ld\cos\varphi .$$

Решаем квадратное уравнение относительно d:

$$d = l(\cos\varphi + \sqrt{3+\cos^2\varphi}) .$$

$$AP = OP - l = \frac{d}{\cos\varphi} - l = l\sqrt{1+\frac{3}{\cos^2\varphi}} . \qquad (4)$$

Теорема косинусов для ΔACP:

$$CP = \sqrt{l^2 + AP^2 - 2l\,AP\cos(\varphi+\phi)} , \qquad (5)$$

где ϕ определяется из (1).

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CP}{AP} = k_2 .$$

$$\frac{CP}{AP} - k_2 = 0 . \qquad (6)$$

В нелинейном уравнении (6) CP и AP определяются согласно (5) и (4). При этом, так как величина l сокращается, в программе можно положить $l = 1$. Требуется решить (6) относительно угла φ.

Можно заметить из рисунка, а затем проверить численно, что при увеличении φ от 0 до $\pi/2$ величина k_2 вначале монотонно возрастает от 0,5 до некоторого значения $k_{2,\max}$ ($k_{2,\max} > 1$), а затем монотонно убывает до 1. При этом устанавливается, что $k_{2,\max} = 1.04616$ при $\varphi_{2,\max} = 1.27067$ рад.

При $0{,}5 < k_2 < 1$ уравнение (6) имеет единственное решение, которое принадлежит отрезку $\lfloor 0;\, \varphi_{2,\max} \rfloor$. Например, при $k_2 = 0.6$ получим $\varphi = 0.29611$ рад. При $1 \le k_2 < k_{2,\max}$ уравнение (6) имеет два корня, наибольший из которых принадлежит отрезку $\lfloor \varphi_{2,\max};\, \pi/2 \rfloor$. Например, при $k_2 = 1.03$ получим $\varphi = 1.44417$ рад. При $0 < k_2 < 0{,}5$ и $k_2 > k_{2,\max}$ уравнение (6) не имеет решений.

График зависимости $k_2 = k_2(\varphi)$ приведен на рис. 4.

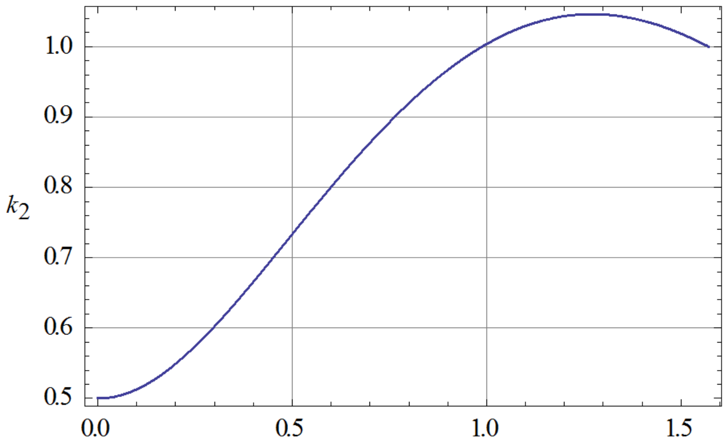

Рис. 4

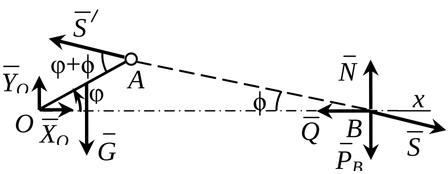

Рис. 5

1.3. 1-й способ решения возможен с помощью уравнений равновесия, записанных отдельно для *B* и для *OA* (рис. 5). Для системы сил, сходящихся в точке *B*:

$$\sum_k F_{kx} = S\cos\phi - Q = 0\,.$$

Для стержня *OA*:

$$\sum_k M_O(\overline{F}_k) = S\sin(\varphi + \phi)l - G(l/2)\cos\varphi = 0\,.$$

Выражаем силу реакции S стержня *AB* из этих уравнений и, приравнивая, получаем:

$$2k_2\sin(\varphi + \phi) - \cos\varphi\cos\phi = 0\,. \qquad (7)$$

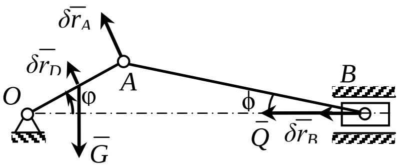

Рис. 6

2-й способ решения, с помощью принципа возможных перемещений, удобен использованием соотношений из решения задания 1.1 (рис. 6):

$$Q\delta s_B - G\delta s_D \cos\varphi = 0 .$$

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{BP}{AP} = k_1 .$$

$$\delta s_D = \frac{1}{2}\delta s_A = \frac{\delta s_B}{2k_1} .$$

$$Q - \frac{G\cos\varphi}{2k_1} = 0 .$$

$$\frac{\cos\varphi}{2k_1} - k_3 = 0 . \qquad (8)$$

В (8) выражение для k_1 содержится в правой части (2). Видно, что (8) и (7) одинаковы.

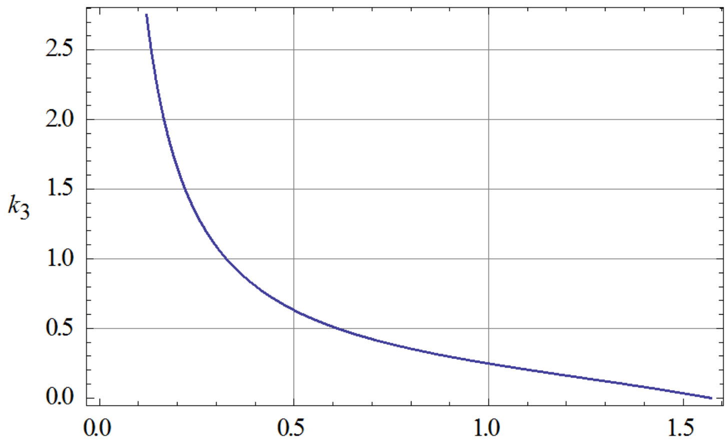

Рис. 7

Требуется решить нелинейное уравнение (8) относительно угла φ. Из рисунка можно заметить, что при равновесии при $\varphi \to 0$ будет $k_3 \to \infty$, а при $\varphi = \pi/2$ будет $k_3 = 0$. Поэтому можно вначале предположить, а затем проверить численно, что первое слагаемое в (8) монотонно убывает при $\varphi \in (0;\ \pi/2]$. Значит, уравнение (8) при любом $k_3 > 0$ имеет единственное решение. Например, при $k_3 = 0.6$ получим $\varphi = 0.52237$ рад.

График зависимости $k_3 = k_3(\varphi)$ приведен на рис. 7.

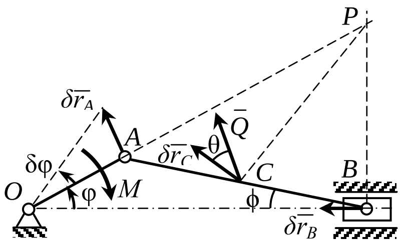

Рис. 8

1.4. Применим принцип возможных перемещений (рис. 8):

$$Q\delta s_C \cos\theta - M\delta\varphi = 0. \qquad (9)$$

Здесь θ – угол между $\overline{Q}$ и $\delta\overline{r}_C$.

$$\delta\varphi = \delta s_A / l.$$

$$\frac{\delta s_C}{\delta s_A} = \frac{CP}{AP} = k_2.$$

Зависимость k_2 от φ была получена ранее в решении задания 1.2.

Из (9) получаем:

$$Qk_2\delta s_A \cos\theta - M\delta s_A / l = 0.$$

$$\frac{k_4 M k_2 \cos\theta}{l} - \frac{M}{l} = 0.$$

$$k_4 = \frac{1}{k_2 \cos\theta}. \qquad (10)$$

В решении задания 1.2 было установлено, что при увеличении φ от 0 до $\pi/2$ величина k_2 вначале монотонно возрастает от 0,5 до значения $k_{2,\max} = 1.04616$, а затем монотонно убывает до 1. Кроме того, так как $k_4 > 0$, $k_2 > 0$, то $0 < \cos\theta \le 1$.

Требуется, чтобы угол φ при равновесии системы был наименьшим. Заметим, что при $\varphi = 0$ (это как раз наименьшее возможное значение из отрезка $0 \le \varphi \le \pi/2$) с учетом $k_2 = 0.5$ получим из (10): $k_4 = \dfrac{2}{\cos\theta}$. При $k_4 \ge 2$ подобрать соответствующий угол θ возможно. Таким образом, при $k_4 \ge 2$ ответом будет $\varphi = 0$.

С другой стороны, если $k_4 < 1/k_{2,\max} = 0.95588$, то тем более $k_4 < \dfrac{1}{k_2 \cos\theta}$ при любых возможных φ и θ, то есть (10) не выполняется. Таким образом, при $k_4 < 0.95588$ задача не имеет решения.

Наконец, при $0.95588 \le k_4 < 2$ для минимизации φ нужно, чтобы k_2 был как можно меньше. Для этого при фиксированном k_4 в (10) значение $\cos\theta$ должно быть как можно больше, то есть выбирается $\cos\theta = 1$. (При этом направление вектора $\overline{Q}$ сонаправлено $\delta\bar{r}_C$.) Решаем нелинейное уравнение $k_2 = \dfrac{1}{k_4}$ относительно φ, используя результаты, полученные в решении задания 1.2. При этом φ выбираем на отрезке $\lfloor 0;\, \varphi_{2,\max} \rfloor$. Например, при $k_4 = 1.5$ получим $\varphi = 0.40130$.

Решение задачи 2.

2.1. Обозначим для удобства $l = AB = BC = CM$, $d = AD$, φ – угол поворота тела вокруг оси *z*, отсчитываемый против часовой стрелки. Из дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси получим:

$$\ddot{\varphi} = M_z / J_z . \qquad (1)$$

Здесь момент инерции материальной точки: $J_z = ml^2$. Численно решаем ДУ (1) при следующих начальных условиях (учитываем, что начальная угловая скорость по рисунку в условии направлена по часовой стрелке):

$$\varphi(0) = 0,\ \dot{\varphi}(0) = -v_0 / l . \qquad (2)$$

Искомая величина скорости в заданный момент времени *t*:

$$v = l|\dot{\varphi}| .$$

Другой способ решения связан с разделением переменных в (1) с последующим интегрированием. Задача сведется к численному нахождению определенного интеграла:

$$v = v_0 + \frac{1}{ml}\int_0^t M_z(t)dt .$$

Для определения реакции R_D используем следствия из принципа Даламбера (рис. 9). Сила инерции, приложенная к точке M:

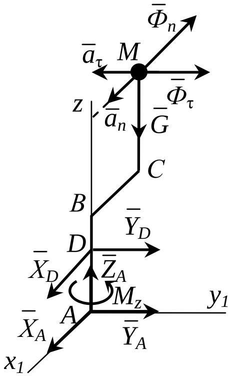

Рис. 9

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_\tau + \overline{\Phi}_n .$$

Здесь $\overline{\Phi}_\tau = -m\overline{a}_\tau$, $a_\tau = l\ddot{\varphi}$, где $\ddot{\varphi}$ определено в (1); $\overline{\Phi}_n = -m\overline{a}_n$, $a_n = l\dot{\varphi}^2$, где $\dot{\varphi}$ была найдена ранее при численном решении (1). Для данного момента времени t направим оси координат x_1 и y_1, как указано на рисунке. Запишем суммы моментов всех сил, включая силы инерции, относительно оси y_1, а затем оси x_1:

$$-G \cdot l + X_D \cdot d - \Phi_n \cdot 2l = 0 .$$

$$-\Phi_\tau \cdot 2l - Y_D \cdot d = 0 .$$

Отсюда находим:

$$X_D = \frac{G \cdot l + \Phi_n \cdot 2l}{d}, \quad Y_D = -\frac{2l}{d}\Phi_\tau .$$

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} .$$

Например, при $t = 1$ с получим $v = 3.1083$ м/с, $R_D = 163.19$ Н.

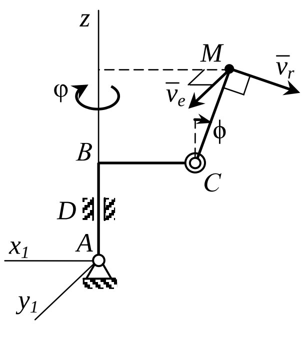

Рис. 10

2.2. *Способ 1.* Угол φ поворота твердого тела *ABC* вокруг *z* будем отсчитывать по часовой стрелке (рис. 10). Угол ϕ поворота *CM* вокруг *C* будем отсчитывать от начального вертикального положения в направлении удаления точки M от оси z. Движение точки M рассмотрим как сложное: ее переносное движение свяжем с изменением угла φ, а относительное – с изменением угла ϕ. Тогда по теореме о сложении скоростей:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

$$v_e = (BC + CM\sin\phi)\dot{\varphi} = l(1+\sin\phi)\dot{\varphi}. \tag{3}$$

$$v_r = CM\,\dot{\phi} = l\dot{\phi}. \tag{4}$$

При этом вектор $\bar{v}_e$ перпендикулярен плоскости ABC, а вектор $\bar{v}_r$ лежит в этой плоскости.

Выполняется закон сохранения момента количества движения точки относительно оси z: $k_z = k_{z,0}$. С учетом (3):

$$m v_e l(1+\sin\phi) = m v_0 l.$$

$$v_e = \frac{v_0}{1+\sin\phi}. \tag{5}$$

Запишем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки с последующей подстановкой (4) и (5):

$$\frac{mv_M^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_G.$$

$$\frac{m\left(v_e^2 + v_r^2\right)}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(l - l\cos\phi).$$

$$\frac{v_0^2}{(1+\sin\phi)^2} + l^2\dot{\phi}^2 - v_0^2 = 2gl\,(1-\cos\phi).$$

$$\dot{\phi} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{v_0^2\left(1 - \frac{1}{(1+\sin\phi)^2}\right) + 2gl\,(1-\cos\phi)}. \tag{6}$$

При определении t_1 перед квадратным корнем в (6) нужно выбирать знак «+», так как сразу после начала движения нормальная сила инерции очевидно способствует удалению точки M от оси z, а при этом $\dot{\phi} > 0$. (Нужно численно это проверять вплоть до конечного положения $\phi_1 = \pi/2$.)

Решаем ДУ 1-го порядка (6) при начальном условии:

$$\phi(0) = 0. \tag{7}$$

Конечное условие: $\phi(t) = \pi / 2$.

При численной реализации (6), (7) можно столкнуться со следующей проблемой. (Аналогичная ситуация возникала при решении задач компьютерного конкурса на прошедшей в КНИТУ ВСО-2015, в заданиях 1.4 и 1.5, и там была подробно исследована.) При $t = 0$ правая часть (6) равна нулю. Поэтому при любом численном методе решения такого ДУ для любого $t \geq 0$ получится $\phi(t) \equiv \phi(0) = 0$, чего, очевидно, быть не должно. (В этом легко убедиться, решив аналитически и попробовав решить численно, например, ДУ $\dot{x} = \sqrt{x}$ при начальном условии $x(0) = 0$).

Для решения этой проблемы можно положить в программе $\phi(0)$ равным числу, очень близкому к нулю.

Например, пусть $v_0 = 1$ м/с и используется метод Рунге-Кутта с шагом $\Delta t = 10^{-7}$. Численный эксперимент дает результаты: при $\phi(0) = 10^{-5}$ $t_1 = 0.70071$, при $\phi(0) = 10^{-6}$ $t_1 = 0.70224$, при $\phi(0) = 10^{-7}$ $t_1 = 0.70272$, при $\phi(0) = 10^{-8}$ $t_1 = 0.70287$, при $\phi(0) = 10^{-9}$ $t_1 = 0.702921$, при $\phi(0) = 10^{-10}$ и при $\phi(0) = 10^{-11}$ $t_1 = 0.702936$. Последний результат достигается также и при $\Delta t = 10^{-6}$. Видно, что удовлетворительная сходимость результатов достигается при выборе $\phi(0) = 10^{-8}$ и меньших значениях. При этом получаем окончательно с учетом требуемой точности: $t_1 = 0.7029$ с.

Способ 2. Способ, связанный с применением уравнений Лагранжа 2 рода, технически несколько сложнее, зато дает существенно более точный результат.

В качестве обобщенных координат выберем углы φ и ϕ.

Кинетическая энергия системы с учетом (3) и (4):

$$T = \frac{m\left(v_e^2 + v_r^2\right)}{2} = (ml^2 / 2)\left((1 + \sin\phi)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\phi}^2\right). \tag{8}$$

Потенциальная энергия системы:

$$П = -mg(l - l\cos\phi). \tag{9}$$

Из (8), (9):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 (1+\sin\phi)^2 \dot{\varphi}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2 \left(2(1+\sin\phi)\cos\phi \cdot \dot{\phi}\dot{\varphi} + (1+\sin\phi)^2 \ddot{\varphi}\right).$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) = ml^2 \ddot{\phi}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = ml^2 (1+\sin\phi)\cos\phi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = -mgl\sin\phi.$$

Подставляем эти выражения в уравнения Лагранжа 2 рода

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \phi} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \phi}. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} ml^2 \left(2(1+\sin\phi)\cos\phi \cdot \dot{\phi}\dot{\varphi} + (1+\sin\phi)^2 \ddot{\varphi}\right) = 0, \\ ml^2 \ddot{\phi} - ml^2 (1+\sin\phi)\cos\phi \cdot \dot{\varphi}^2 = mgl\sin\phi. \end{cases}$$

Отсюда выражаем:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = -\dfrac{2\cos\phi \cdot \dot{\phi}\dot{\varphi}}{1+\sin\phi}, \\ \ddot{\phi} = (1+\sin\phi)\cos\phi \cdot \dot{\varphi}^2 + (g/l)\sin\phi. \end{cases} \tag{10}$$

Начальные условия для системы ДУ 2-го порядка (10):

$$\varphi(0)=0,\ \dot{\varphi}(0)=v_0/l,\ \phi(0)=0,\ \dot{\phi}(0)=0.$$

Однако отметим, что во 2-м уравнении (10) единственная величина, связанная с φ, а именно $\dot{\varphi}^2$, может быть выражена через ϕ. Действительно, из (5) следует:

$$(l + l\sin\phi)\,\dot{\varphi} = \frac{v_0}{1+\sin\phi}.$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{l(1+\sin\phi)^2}. \tag{11}$$

После подстановки (11) во 2-е уравнение (10) получим окончательно:

$$\ddot{\phi} = \frac{v_0^2\cos\phi}{l^2(1+\sin\phi)^3} + (g/l)\sin\phi. \tag{12}$$

Численно решаем ДУ 2-го порядка (12) при начальных условиях

$$\phi(0)=0,\ \dot{\phi}(0)=0 \tag{13}$$

и конечном условии $\phi(t)=\pi/2$.

Так как в начальный момент $\ddot{\phi}=v_0^2/l^2 \neq 0$, то не возникает проблемы, описанной в способе 1, то есть нет необходимости брать значение $\dot{\phi}(0)$, чуть отличающееся от нуля. Поэтому результат получается более точным по сравнению со способом 1.

При использовании метода Рунге-Кутта получаем при $v_0 = 1$ м/с: при шаге $\Delta t = 10^{-6}$ $t_1 = 0.702944$, при шаге $\Delta t = 10^{-7}$ $t_1 = 0.702945$. Таким образом, с учетом требуемой точности: $t_1 = 0.7029$ с, что совпадает с ответом, полученным по способу 1.

Определим $\max\tau(z)$. Из вида ДУ (6) или (12) следует, что движение точки M является периодическим относительно переменной ϕ.

(ДУ (12) является обобщением ДУ математического маятника, совпадая с последним при $v = 0$.)

Это подтверждается при численном моделировании. Пусть также $v_0 = 1$ м/с. Применим способ 2. Точка *M*, опускаясь, вначале достигает своего самого нижнего положения (при $\phi = \pi$), далее продолжает движение с тем же направлением угловой скорости $\dot{\phi}$ и в момент $t = 1.0276$ достигает максимально возможного угла $\phi_{\max} = 4.0030$ рад, при котором $\dot{\phi} = 0$. (Заметим, что достижение значения $\phi = 3\pi/2$, при котором точка *M* оказалась бы на оси *z*, принципиально невозможно в силу закона сохранения момента количества движения.) Условием достижения угла $\phi_{\max}$ в программе является смена знака $\dot{\phi}$. Затем точка *M* движется в обратном направлении (относительно ϕ) и в момент $t = 2.0552$ поднимается до своего наивысшего положения, соответствующего $\phi = 0$, при котором вновь $\dot{\phi} = 0$. Далее все повторяется с периодом $T = 2.0552$ с.

Очевидно, $\max \tau(z)$ достигается при *z*, соответствующем $\phi = 0$. (При любом другом возможном *z* промежуток времени между соседними моментами прохождения точкой *M* этого положения будет меньше T.)

Таким образом, при $v_0 = 1$ м/с получим: $\tau = \max \tau(z) = 2.0552$.

Заметим, что, если применять способ 1, то в силу периодического изменения знака $\dot{\phi}$ необходимо в правой части ДУ (6) менять знак при достижении $\dot{\phi}$ в программе значения, очень близкого к нулю. В способе 2 этого делать не требуется, что также делает этот способ более предпочтительным.