

Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады студентов по теоретической механике

Казань, Казанский государственный
энергетический университет
5-9 декабря 2016 г.

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:

доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштары Айрат Ильдарович

Рецензент:

доцент кафедры АГД К(П)ФУ Марданов Ренат Фаритович

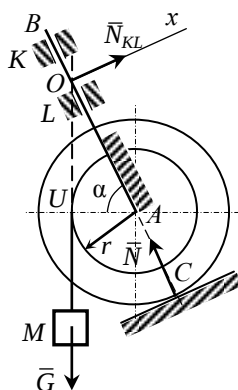


Рис. 1

Решение задачи C1.

1). Линии действия силы тяжести груза $\bar{G}$ и реакции опоры $\bar{N}$ в точке C пересекаются в точке O стержня (рис. 1). Эти силы уравновешиваются приложенной в этой точке равнодействующей сил реакций направляющих K и L стержня $\bar{N}_{KL}$. Уравнение равновесия для проекций на ось x , перпендикулярную AB :

$$\sum_k F_{kx} = -G \cos \alpha + N_{KL} = 0.$$

$$N_{KL} = mg \cos \alpha.$$

Из треугольника AOU расстояние от точки A до линии действия $\bar{N}_{KL}$ равно:

$$d = \frac{r}{\cos \alpha}.$$

2). Рассмотрим равновесие системы, образованной колесом 1, стержнем и точкой M (рис. 2). Обозначим через $\bar{S}$ силу натяжения нити в точке D . Проецируя на ось y , получим:

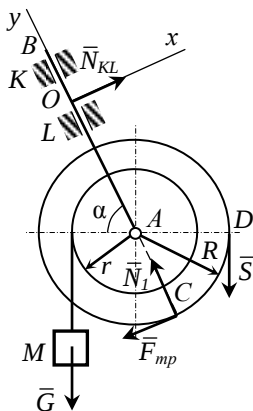


Рис. 2

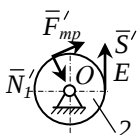


Рис. 3

$$\sum_k F_{ky} = N - S \sin \alpha - P \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

С учетом того, что реакции шарнира дают нулевые моменты относительно A , запишем для колеса 1:

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = Gr - SR - F_{mp}R = 0. \quad (2)$$

Аналогично для колеса 2 (рис. 3):

$$\sum_k M_O(\bar{F}_k) = -F_{mp}r_2 + Sr_2 = 0. \quad (3)$$

Из (3):

$$S = F_{mp}. \quad (4)$$

Из (2), (4):

$$2F_{mp}R = Gr.$$

$$F_{mp} = \frac{r}{2R} G. \quad (5)$$

Выразим G из (1), с учетом (4):

$$G \sin \alpha = N - F_{mp} \sin \alpha.$$

$$G = \frac{N}{\sin \alpha} - F_{mp}.$$

Подставим в (5) и затем учтем закон Кулона:

$$F_{mp} = \frac{r}{2R} \left(\frac{N}{\sin \alpha} - F_{mp} \right).$$

$$\left(1 + \frac{r}{2R} \right) F_{mp} = \frac{r}{2R \sin \alpha} N.$$

$$F_{mp} = \frac{r}{2R \sin \alpha} \cdot \frac{2R}{2R + r} N \leq fN.$$

$$f \geq \frac{r}{(2R + r) \sin \alpha}.$$

Замечание. Из условия $\sum_k M_A(\bar{F}_k) = 0$, записанного для стержня, следует $N_{KL} \cdot OA = 0$. Так как $N_{KL} \neq 0$ (очевидно при проецировании

всех сил системы на горизонтальную ось), то здесь $OA = 0$. На вывод решения это не влияет.

Ответ. 1). $N_{KL} = mg \cos \alpha$, $d = \frac{r}{\cos \alpha}$. 2). $f \geq \frac{r}{(2R+r) \sin \alpha}$.

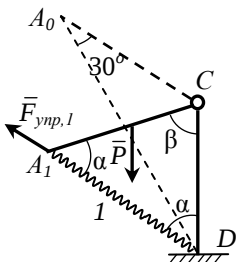


Рис. 4

Решение задачи C2.

Обозначим индексами «0» и «1» положения концов стержней при недеформированных пружинах и при равновесии, соответственно (рис. 4). Запишем уравнение равновесия стержня AC, обозначив через α, β углы между AC и пружиной 1 и между AC и CD, соответственно:

$$\begin{aligned} \sum_k M_C(\bar{F}_k) &= -F_{yp,1} \sin \alpha \cdot l + P \sin \beta \cdot \frac{l}{2} + \\ &+ M_C(\bar{F}_{yp,3}) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для сохранения положения равновесия независимо от коэффициента жесткости пружины 3 должно выполняться условие:

$$M_C(\bar{F}_{yp,3}) = 0. \quad (2)$$

Из (1) с учетом (2) и $\sin \beta = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$:

$$\begin{aligned} F_{yp,1} \sin \alpha &= \frac{1}{2} P \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha. \\ F_{yp,1} &= P \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{yp,1} &= c_1 \Delta l_1 = c_1 (A_0 D - A_1 D) = \\ &= c_1 \cdot (2l \cos 30^\circ - 2l \cos \alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}-2} \cdot \frac{P}{l} (\sqrt{3}l - 2l \cos \alpha). \end{aligned}$$

Из (3) после арифметических преобразований получим:

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2} P (\sqrt{3} - 2 \cos \alpha) = P \cos \alpha.$$

$$(2 + \sqrt{6} - 2) \cos \alpha = P\sqrt{3}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ. \quad (4)$$

Условие (2) может реализоваться в двух случаях. В 1-м случае $F_{\text{уп},3} = 0$. Во 2-м случае линия действия $\bar{F}_{\text{уп},3}$ проходит через точку C .

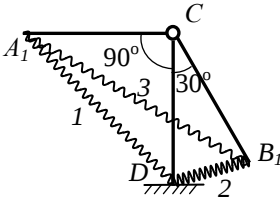


Рис. 5

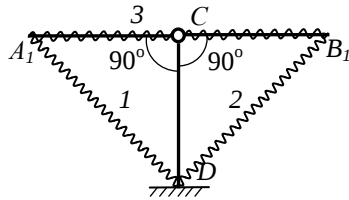


Рис. 6

В 1-м случае пружина 3 недеформирована, т.е. угол между стержнями AC и BC равен 120° . При этом возможны два положения пружины 2.

При одном из них отрезок BC получается поворотом AC на 120° вокруг C против часовой стрелки (рис. 5). Обозначим $c_2 = k_2 \frac{P}{l}$. Записывая уравнение равновесия BC по аналогии с (1), получим аналог (3):

$$F_{\text{уп},2} = P \cos \alpha_2, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\text{уп},2} &= c_2 \Delta l_2 = c_2 (B_0 D - B_1 D) = \\ &= c_2 \cdot (2l \cos 30^\circ - 2l \cos \alpha_2) = k_2 \frac{P}{l} (\sqrt{3}l - 2l \cos \alpha_2). \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Тогда из (5):

$$k_2 (\sqrt{3} - 2 \cos 75^\circ) = \cos 75^\circ.$$

$$k_2 = \frac{\cos 75^\circ}{\sqrt{3} - 2 \cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2(\sqrt{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})}.$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2(\sqrt{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} \cdot \frac{P}{l}.$$

Другое возможное положение BC , при котором отрезок BC получается поворотом AC на 120° вокруг C по часовой стрелке, не является равновесным, так как несложно заметить: при этом пружина BC растянута, в записи $\sum_k M_C(\bar{F}_k)$ получим $M_C(\bar{F}_{\text{упр},2}) < 0$, $M_C(\bar{P}) < 0$, откуда $\sum_k M_C(\bar{F}_k) < 0$.

Во 2-м случае, когда линия действия $\bar{F}_{\text{упр},3}$ проходит через точку C , получаем, что AC и BC лежат на одной прямой, угол между ними 180° , т.е. угол между BC и CD также равен 90° (рис. 6). В силу симметрии сразу получаем при этом для равновесия:

$$c_2 = c_1 = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} \cdot \frac{P}{l}.$$

Ответ. $c_2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2(\sqrt{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} \cdot \frac{P}{l}$ или $c_2 = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} \cdot \frac{P}{l}.$

Решение задачи K1.

1). Построим мгновенные центры скоростей P_1 и P_2 для AB и BC , соответственно (рис. 7). Так как $AP_1 = BP_1$, то $v_B = v_A = v$. Так как

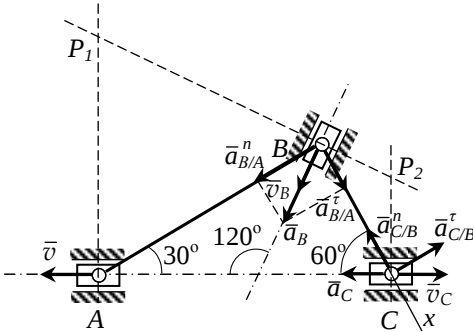


Рис. 7

$BP_2 = CP_2$, то

$$v_C = v_B = v.$$

При этом

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{v}{l}. \quad (1)$$

С учетом $BC = \frac{l}{\sqrt{3}}$,

$$BP_2 = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{l}{3}:$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{3v}{l}. \quad (2)$$

При плоскопараллельном движении AB с учетом $v = \text{const}$:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A}^\tau + \bar{a}_{B/A}^n = \bar{a}_{B/A}^\tau + \bar{a}_{B/A}^n.$$

Из соответствующего прямоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a_{B/A}^n}{a_{B/A}^\tau}.$$

$$a_{B/A}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{v^2}{l}.$$

$$a_{B/A}^\tau = \frac{a_{B/A}^n}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}v^2}{3l}.$$

При плоскопараллельном движении BC :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B}^\tau + \bar{a}_{C/B}^n = \bar{a}_{B/A}^\tau + \bar{a}_{B/A}^n + \bar{a}_{C/B}^\tau + \bar{a}_{C/B}^n. \quad (3)$$

$$a_{C/B}^n = BC \cdot \omega_{BC}^2 = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9v^2}{l^2} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{l}.$$

Проецируем на ось x (перпендикулярно $\bar{a}_{C/B}^\tau$):

$$-a_C \cos 60^\circ = a_{B/A}^\tau - a_{C/B}^n.$$

$$a_C = 2 \left(\frac{3\sqrt{3}v^2}{l} - \frac{\sqrt{3}v^2}{3l} \right) = \frac{16\sqrt{3}v^2}{3l}.$$

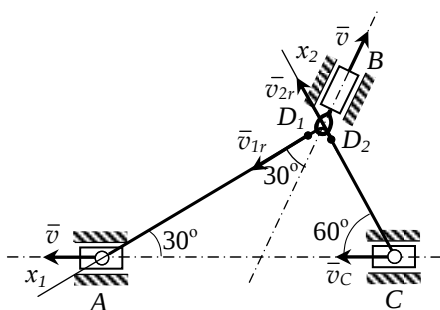


Рис. 8

2). 1 способ (геометрический). Обозначим через D_1 и D_2 точки нити, предельно близкие к ушку, находящиеся по разные стороны от него (рис.8). Движение каждой из них можно рассмотреть как сложное, при котором переносным является движение ушка со скоростью $\bar{v}_B$, $v_B = v$, а от-

носительным – движение D_1 или D_2 относительно ушка со скоростью $\bar{v}_{1r}$ или $\bar{v}_{2r}$, соответственно. Так как нить нерастяжима, то $v_{1r} = v_{2r} = v$.

По теореме о сложении скоростей при сложном движении:

$$\bar{v}_{D_1} = \bar{v}_B + \bar{v}_{1r}.$$

Участок нити AD_1 в данный момент совершает плоскопараллельное движение. По теореме о проекциях скоростей для AD_1 при проектировании на ось x_1 :

$$v_A \cos 30^\circ = v_r - v_B \cos 30^\circ.$$

$$2v \cos 30^\circ = v_r.$$

$$v_r = \sqrt{3}v. \quad (4)$$

Аналогично для точки D_2 и участка нити D_2C получим:

$$\bar{v}_{D_2} = \bar{v}_B + \bar{v}_{2r}.$$

$$v_r + v_B \cos 60^\circ = v_C \cos 60^\circ.$$

Учтем здесь (4):

$$\sqrt{3}v + \frac{v}{2} = \frac{v_C}{2}.$$

$$v_C = (2\sqrt{3} + 1)v.$$

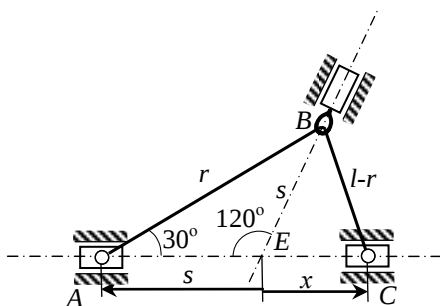


Рис. 9

2 способ (аналитический). Рассмотрим положение системы в произвольный момент времени, предполагая, что все время $v_A = v_B = v$ и треугольник ABE остается равнобедренным (рис.9). Обозначим $AE = BE = s$, $AB = r$. Тогда $BC = l - r$, где l – длина всей нити.

$$r = 2s \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} s.$$

$$\dot{r} = \sqrt{3} \dot{s} = \sqrt{3} v. \quad (5)$$

По теореме косинусов:

$$BC^2 = BE^2 + EC^2 - 2BE \cdot EC \cdot \cos 60^\circ,$$

$$(l - r)^2 = s^2 + x^2 - 2sx \cdot \frac{1}{2}.$$

$$(l - r) \cdot (-2\dot{r}) = 2s\dot{s} + 2x\dot{x} - \dot{s}x - s\dot{x}. \quad (6)$$

В рассматриваемый момент времени треугольник BEC по условию является равносторонним. При этом $l - r = s = x$. Сокращаем в (6) этот общий множитель и учитываем $\dot{s} = v$, $\dot{x} = -v_C$ и (5):

$$-2\dot{r} = 2\dot{s} + 2\dot{x} - \dot{s} - \dot{x}.$$

$$-2\sqrt{3}v = v - v_C.$$

$$v_C = (2\sqrt{3} + 1)v.$$

Ответ К1. 1). $v_C = v$. $a_C = \frac{16\sqrt{3}v^2}{3l}$. 2). $v_C = (2\sqrt{3} + 1)v$.

Решение задачи К2.

1 способ (геометрический). Сначала рассмотрим случай, когда AB движется поступательно, т.е. в данный момент $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$. Тогда векторы ускорений для всех точек AB одинаковы. Значит, одинаковы

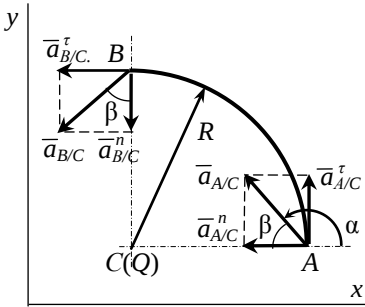


Рис. 10

рение которой равно нулю. Это точка Q – мгновенный центр ускорений (МЦУ). Для любой точки M тела при этом выполняется:

$$a_M = MQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Из условия равенства величин ускорений всех точек AB следует, что расстояние MQ для любой точки тела принимает одно и то же значение. Такая ситуация реализуется, если МЦУ находится в центре C закругления AB (рис. 10). Тогда все расстояния MQ равны радиусу R закругления AB .

Получаем: $\bar{a}_C = 0$, $\bar{a}_A = \bar{a}_{A/C} = \bar{a}_{A/C}^\tau + \bar{a}_{A/C}^n$. Так как вектор нормального ускорения $\bar{a}_{A/C}^n$ направлен к точке C либо равен нулю (если $\omega = 0$), то угол $\beta = 180^\circ - \alpha$ между $\bar{a}_A$ и $\bar{a}_{A/C}^n$ не может превышать 90° . Это условие возможно при $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. При этом:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B/C} = \bar{a}_{B/C}^\tau + \bar{a}_{B/C}^n.$$

В силу $a_{B/C}^\tau = a_{A/C}^\tau$, $a_{B/C}^n = a_{A/C}^n$, угол между векторами $\bar{a}_B$ и $\bar{a}_{B/C}^n$ тоже равен β .

$$a_{Bx} = -a \sin \beta = -a \sin \alpha, \quad a_{By} = -a \cos \beta = a \cos \alpha.$$

Приведенное рассуждение с использованием МЦУ позволяет строго обосновать отсутствие других решений задачи.

и величины ускорений всех точек. При всех α из заданного в условии промежутка $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ получим:

$$a_{Bx} = a_{Ax} = a \cos \alpha,$$

$$a_{By} = a_{Ay} = a \sin \alpha.$$

Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одно из значений ω или ε не равно нулю. Согласно известной теореме, в этом случае при движении плоской фигуры в своей плоскости в каждый момент времени имеется единственная точка, уско-

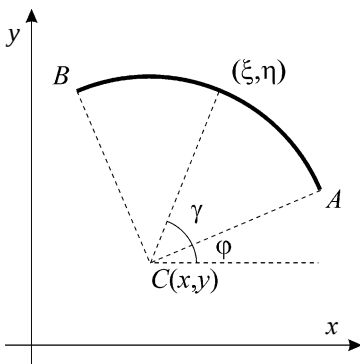


Рис. 11

2 способ (аналитический, предложен Р.Ф. Мардановым). Плоскопараллельное движение AB задается перемещением полюса C с координатами (x, y) и поворотом вокруг него, определяемым углом φ . Обозначим через (ξ, η) координаты точки AB с угловой координатой γ (рис. 11). Тогда

$$\xi = x + R \cos(\varphi + \gamma),$$

$$\eta = y + R \sin(\varphi + \gamma).$$

Дифференцируя, получим:

$$\dot{\xi} = \dot{x} - R \sin(\varphi + \gamma) \dot{\varphi},$$

$$\dot{\eta} = \dot{y} + R \cos(\varphi + \gamma) \dot{\varphi},$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} - R \cos(\varphi + \gamma) \dot{\varphi}^2 - R \sin(\varphi + \gamma) \ddot{\varphi},$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{y} - R \sin(\varphi + \gamma) \dot{\varphi}^2 + R \cos(\varphi + \gamma) \ddot{\varphi}.$$

Или, учтя, что в расчетный момент времени $\varphi = 0$:

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} - R \cos \gamma \dot{\varphi}^2 - R \sin \gamma \ddot{\varphi},$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{y} - R \sin \gamma \dot{\varphi}^2 + R \cos \gamma \ddot{\varphi}.$$

Так как для любой точки AB по условию задачи модуль ускорения постоянен и равен a , то его квадрат по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} w^2 = \ddot{\xi}^2 + \ddot{\eta}^2 &= \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + R^2 \dot{\varphi}^4 + R^2 \ddot{\varphi}^2 - 2\ddot{x}R(\cos \gamma \dot{\varphi}^2 + \sin \gamma \ddot{\varphi}) - \\ &- 2\ddot{y}R(\sin \gamma \dot{\varphi}^2 - \cos \gamma \ddot{\varphi}) = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + R^2 \dot{\varphi}^4 + R^2 \ddot{\varphi}^2 + \\ &+ 2R[\cos \gamma (\ddot{y} \ddot{\varphi} - \ddot{x} \dot{\varphi}^2) - \sin \gamma (\ddot{x} \dot{\varphi}^2 + \ddot{y} \ddot{\varphi})] = a^2. \end{aligned}$$

Для того чтобы последнее соотношение выполнялось для любой точки AB необходимо, чтобы w^2 не зависело от γ . Для этого потребуем равенства нулю коэффициентов при $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$:

$$\begin{cases} \ddot{y} \ddot{\varphi} - \ddot{x} \dot{\varphi}^2 = 0, \\ \ddot{x} \dot{\varphi}^2 + \ddot{y} \ddot{\varphi} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) = 0, \\ \ddot{x}(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2) = 0. \end{cases}$$

Удовлетворение последней системы уравнений возможно лишь в двух случаях: а) $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ или б) $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$.

Так как для точки A угол $\gamma = 0$, то

$$\ddot{\xi}_A = \ddot{x} - R\dot{\phi}^2 = a \cos \alpha, \quad \ddot{\eta}_A = \ddot{y} + R\dot{\phi}^2 = a \sin \alpha. \quad (1)$$

Для точки B угол $\gamma = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\ddot{\xi}_B = \ddot{x} - R\ddot{\phi}, \quad \ddot{\eta}_B = \ddot{y} - R\dot{\phi}^2. \quad (2)$$

В случае а) $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ точка C будет являться мгновенным центром ускорений. Из соотношений (1) запишем

$$R\dot{\phi}^2 = -a \cos \alpha, \quad R\dot{\phi}^2 = a \sin \alpha.$$

Так как $R\dot{\phi}^2 > 0$, то из последних формул следует, что этот случай возможен только для $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Тогда в этом случае из (2) получим

$$\ddot{\xi}_B = -a \sin \alpha, \quad \ddot{\eta}_B = a \cos \alpha.$$

В случае б) $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ движение AB является поступательным. Из соотношения (1) имеем

$$\ddot{x} = a \cos \alpha, \quad \ddot{y} = a \sin \alpha.$$

Тогда в этом случае из (2) найдем

$$\ddot{\xi}_B = a \cos \alpha, \quad \ddot{\eta}_B = a \sin \alpha,$$

причем $0 < \alpha < \pi$.

Ответ. При $0 \leq \alpha < 90^\circ$ $a_{Bx} = a \cos \alpha$, $a_{By} = a \sin \alpha$.

При $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ $a_{Bx} = a \cos \alpha$, $a_{By} = a \sin \alpha$ либо $a_{Bx} = -a \sin \alpha$, $a_{By} = a \cos \alpha$.

Решение задачи Д1.

1). Дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \frac{dv_x}{dt} = (-t + 2) mg.$$

$$\int_0^{v_x} dv_x = g \int_0^t (-t + 2) dt .$$

$$v_x = g \left(-\frac{t^2}{2} + 2t \right) .$$

При $v_x = 0$, $t > 0$ получим: $-\frac{t^2}{2} + 2t = 0$, откуда $t = 4$.

2). При $t = 0$: $Q_x(0) = kmg > 0$. Значит, в этот момент точка не начнет смещаться влево.

2.1. Условие того, что точка сразу начнет смещаться вправо, преодолев силу трения $F_{mp,max} = fmg = mg$, $F_{mp,x} = -mg$, имеет вид: $a_x(0) > 0$, т.е. $Q_x(0) + F_{mp,x} > 0$, $(k-1)mg > 0$, откуда $k > 1$. Тогда движение вправо ($v_x > 0$) вплоть до момента, когда $v_x = 0$, описывается ДУ:

$$m \frac{dv_x}{dt} = [(1-k)t + k]mg - mg .$$

$$\int_0^{v_x} dv_x = (1-k)g \int_0^t (t-1)dt .$$

$$v_x = (1-k)g \left(\frac{t^2}{2} - t \right) .$$

Значит $v_x = 0$ в момент $t = 2$. При этом $Q_x(2) = (2-k)mg$. Так как $k > 1$, то $Q_x(2) < mg$ и исключено немедленное возобновление движения вправо из-за невозможности преодоления F_{mp} .

Для немедленного начала движения влево ($v_x < 0$) при $t = 2$ должно быть: $a_x(2) < 0$, $Q_x(2) + F_{mp,x} < 0$, т.е. с учетом $F_{mp,x} = mg$, должно быть: $(2-k+1)mg < 0$, откуда $k > 3$. При дальнейшем увеличении t $Q_x(t)$ уменьшается, значит, тем более будет $Q_x(t) + F_{mp,x} < 0$. Поэтому точка больше не остановится. Итак, при $k > 3$ $v_x(t) = 0$ при $t = 2$.

2.2. В случае $1 < k \leq 3$ после момента $t = 2$ точка в течение какого-то промежутка времени окажется в состоянии покоя. При предельном равновесии точки, т.е. перед тем, как она начнет смещаться влево, в момент $t = \tau$: $Q_x(\tau) + F_{mp,x} = 0$ при $F_{mp,x} = mg$. Отсюда

$[(1-k)\tau + k] + 1 = 0$, т.е. $\tau = \frac{k+1}{k-1}$. (При $k = 3$ будет $\tau = 2$, точка выйдет из равновесия в момент $\tau + dt$, где dt – бесконечно малый промежуток времени. Временной отрезок, когда точка находится в покое, сведется к единственному моменту $t = 2$.) При дальнейшем увеличении t будет $Q_x(t) + F_{mp,x} < 0$, поэтому точка больше не остановится.

Итак, при $1 < k \leq 3$ $v_x(t) = 0$ при $2 \leq t \leq \frac{k+1}{k-1}$.

2.3. В альтернативном случае, при $0 < k \leq 1$ после момента $t = 0$ точка какое-то время будет оставаться в покое. При этих k $Q_x(t) > 0$, поэтому смещение влево исключено при любом t . При предельном равновесии точки, т.е. перед тем, как она начнет смещаться вправо, в момент $t = T$: $Q_x(T) + F_{mp,x} = 0$ при $F_{mp,x} = -mg$. Отсюда

$[(1-k)T + k] - 1 = 0$, т.е. $T = \frac{1-k}{1-k} = 1$, если $k \neq 1$! При дальнейшем увеличении t будет $Q_x(t) > mg$, т.е. $Q_x(t) + F_{mp,x} > 0$, поэтому точка больше не остановится. Итак, при $0 < k < 1$ $v_x(t) = 0$ при $0 < t \leq 1$.

2.4. Если $k = 1$, сила $Q_x = mg$ не сможет преодолеть $F_{mp} = mg$, и $v_x(t) = 0$ при всех $t > 0$.

Ответ. 1). $t = 4$. 2). При $0 < k < 1$: $0 < t \leq 1$. При $k = 1$: $t > 0$. При $1 < k \leq 3$: $2 \leq t \leq \frac{k+1}{k-1}$. При $k > 3$: $t = 2$.

Решение задачи Д2.

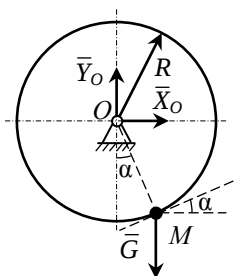


Рис. 12

1). Диск с прикрепленной точкой M образуют единое твердое тело с моментом инерции относительно оси вращения Oz , равным

$$J_z = mR^2. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 12):

$$J_z \varepsilon_z = -GR \sin \alpha,$$

где $\varepsilon_z = -$ алгебраическое угловое ускорение (с учетом знака). Из (1), (2) получаем:

$$\varepsilon = |\varepsilon_z| = \frac{g \sin \alpha}{R}.$$

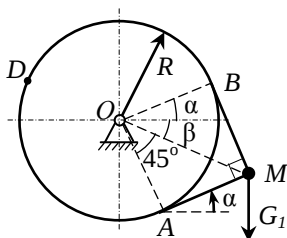


Рис. 13

2). Сначала решим задачу при условии, что обе нити остаются натянутыми в начале движения. В рамках этого условия систему можно рассматривать как единое твердое тело. С учетом $OM = \sqrt{2}R$ его момент инерции относительно Oz (рис.13):

$$J_{12,z} = m_1 \cdot (\sqrt{2}R)^2 + \frac{m_2 R^2}{2} = \left(2m_1 + \frac{m_2}{2} \right) R^2.$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz :

$$J_{12,z} \varepsilon_z = -G_1 \cdot OM \cos \beta,$$

где $\beta = 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$.

$$\left(2m_1 + \frac{m_2}{2} \right) R^2 \varepsilon_z = -m_1 g \cdot \sqrt{2}R \cos(45^\circ - \alpha).$$

С учетом

$$\cos(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$$

получим:

$$\varepsilon = |\varepsilon_z| = \frac{2m_1 g (\sin \alpha + \cos \alpha)}{(4m_1 + m_2)R}. \quad (3)$$

Очевидно, что, так как при заданном условии $0 \leq \alpha < 90^\circ$ точка M находится ниже B , участок BM нити будет натянут независимо от соотношения между α , m_1 , m_2 (подробнее см. замечание 2).

Условием натянутости нижней нити является $S_1 > 0$, где $\bar{S}_1$ – сила натяжения для AM (рис. 14). При этом точка M начинает движение по

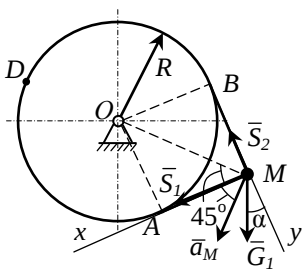


Рис. 14

окружности с центром в точке O , поэтому $\bar{a}_M \perp OM$ (рис. 14),

$$a_M = OM \cdot \varepsilon = \sqrt{2}R\varepsilon. \quad (4)$$

Запишем второй закон динамики для точки M в проекции на ось x , перпендикулярную участку нити BM (чтобы обнулить проекцию его силы натяжения $\vec{S}_2$):

$$m_1 a_M \cos 45^\circ = S_1 + G_1 \sin \alpha. \quad (5)$$

С учетом (4) и (3) получим из (5):

$$S_1 = m_1 \cdot \sqrt{2}R \frac{2m_1g(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(4m_1 + m_2)R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - m_1g \sin \alpha =$$

$$= m_1g \left(\frac{2m_1(\sin \alpha + \cos \alpha)}{4m_1 + m_2} - \sin \alpha \right),$$

Из условия $S_1 > 0$:

$$2m_1(\sin \alpha + \cos \alpha) - (4m_1 + m_2)\sin \alpha > 0.$$

$$2m_1 \cos \alpha > (2m_1 + m_2) \sin \alpha .$$

$$\operatorname{tg} \alpha < \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} . \quad (6)$$

При невыполнении (6), т.е. в случае $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2m_1}{2m_1 + m_2}$, участок нити

AM не натянут (начинает провисать). При этом точка M имеет две степени свободы: при движении вдоль x и вдоль y (рис. 15).

$$\vec{a}_M = \vec{a}_x + \vec{a}_y .$$

Одна из степеней свободы связана с движением M вдоль линии нити BM с ускорением a_y . При этом очевидно, что $a_y = R\epsilon$. (Другая степень свободы связана с движением M в направлении оси x , перпендикулярной нити, при повороте участка BM и не связана с угловым ускорением диска.)

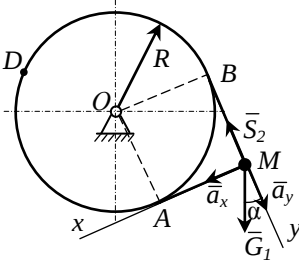


Рис. 15

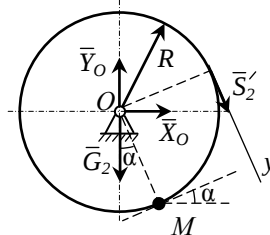


Рис. 16

Запишем второй закон динамики в проекции на y :

$$m_1 a_y = G_1 \cos \alpha - S_2 .$$

С учетом $a_y = R\epsilon$ получим:

$$m_1 R\epsilon = m_1 g \cos \alpha - S_2 . \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение вращения отдельно рассматриваемо-

го диска вокруг оси Oz (рис.16):

$$\frac{m_2 R^2}{2} \varepsilon_z = -S_2' R.$$

С учетом $\varepsilon_z = -\varepsilon$ получим:

$$S_2 = \frac{m_2 R}{2} \varepsilon. \quad (8)$$

Подставим (8) в (7):

$$\begin{aligned} m_1 R \varepsilon &= m_1 g \cos \alpha - \frac{m_2 R}{2} \varepsilon. \\ (2m_1 + m_2) R \varepsilon &= 2m_1 g \cos \alpha. \\ \varepsilon &= \frac{2m_1 g \cos \alpha}{(2m_1 + m_2) R}. \end{aligned} \quad (9)$$

Замечание 1. Проверим, что в пограничном случае при

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} \quad (10)$$

выражения (3) и (9) совпадают. Из (10) следует

$$\sin \alpha = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} \cos \alpha. \quad (11)$$

Подстановка (11) в выражение (3) дает:

$$\frac{2m_1 g \left(\frac{2m_1}{2m_1 + m_2} + 1 \right) \cos \alpha}{(4m_1 + m_2) R} = \frac{2m_1 g \cdot \frac{4m_1 + m_2}{2m_1 + m_2} \cos \alpha}{(4m_1 + m_2) R} = \frac{2m_1 g \cos \alpha}{(2m_1 + m_2) R},$$

что совпадает с выражением (9).

Замечание 2. Дадим обоснование того, что $S_2 > 0$.

Предположим противное: пусть при некоторых значениях α , m_1 , m_2 будет $S_2 = 0$. Тогда диск либо находится в покое, либо за счет натяжения нити AM вращается против часовой стрелки. Тогда для

точки M получаем $a_y \leq 0$.

С другой стороны, независимо от того, натянута ли нить AM , по второму закону динамики в проекции на ось y : $m_1 a_y = G_1 \cos \alpha - S_2$.

Отсюда в силу следующего из условия задачи неравенства $\cos \alpha > 0$ получаем $a_y > 0$.

Пришли к противоречию. Значит, $S_2 > 0$.

Ответ. 1). $\varepsilon = \frac{g \sin \alpha}{R}$.

2). При $\operatorname{tg} \alpha < \frac{2m_1}{2m_1 + m_2}$ $\varepsilon = \frac{2m_1 g (\sin \alpha + \cos \alpha)}{(4m_1 + m_2)R}$.

При $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2m_1}{2m_1 + m_2}$ $\varepsilon = \frac{2m_1 g \cos \alpha}{(2m_1 + m_2)R}$.

Решение задачи ДЗ.

Предположим, что колесо 1 катится вниз, а колесо 2 вверх (рис.17). (Если это так, то сумма работ внешних сил должна получиться положительной, в противном же случае отрицательной.) Так как нить нерастяжима, то $v_A = v_B = v$. Мгновенные центры скоростей колес 1 и 2 при их плоскопараллельных движениях находятся в точках P_1 и P_2 , соответственно.

$$\begin{aligned} \frac{v_A}{v_1} &= \frac{AP_1}{C_1 P_1} = \frac{3r}{2r}. \\ v_1 &= \frac{2}{3}v. \\ \omega_2 &= \frac{v_B}{BP_1} = \frac{v}{3r}. \end{aligned} \tag{1}$$

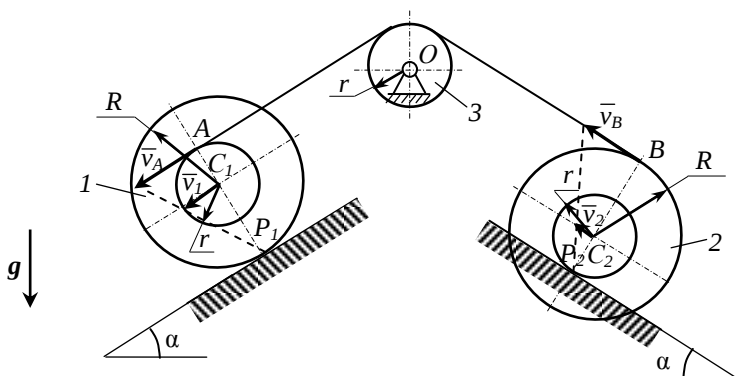


Рис. 17

С учетом этого и, например, теоремы Гюйгенса-Штейнера найдем кинетическую энергию колеса 1:

$$J_{P_1} = mr^2 + m(2r)^2 = 5mr^2.$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{P_1} \omega_1^2 = \frac{5}{18} mv^2. \quad (2)$$

Такой же результат можно получить при использовании формулы

$$T = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega^2.$$

Аналогично для колеса 2:

$$\frac{v_B}{v_2} = \frac{BP_2}{C_2P_2} = \frac{3r}{r}.$$

$$v_2 = \frac{1}{3} v. \quad (3)$$

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_1} = \frac{v}{3r}.$$

$$J_{P_2} = mr^2 + mr^2 = 2mr^2.$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{P_2} \omega_2^2 = \frac{1}{9} mv^2. \quad (4)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_{B_z} \omega_1^2 = \frac{7}{18} m v^2. \quad (5)$$

Интегрируем по времени (1) и (3) при нулевых начальных условиях, получим соотношения для соответствующих перемещений:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3} s, \quad s_2 = \frac{1}{3} s. \\ \sum_k A_k^e &= A_{G_1} + A_{G_2} = m g s_1 \sin \alpha - m g s_2 \sin \alpha = \\ &= m g \left(\frac{2}{3} s - \frac{1}{3} s \right) \sin \alpha = \frac{1}{3} m g s \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

По теореме об изменении кинетической энергии механической системы с учетом (5) и (6):

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \sum_k A_k^e. \\ \frac{7}{18} m v^2 &= \frac{1}{3} m g s \sin \alpha. \end{aligned}$$

С учетом $v = r\omega$, $s = r\varphi$ получим:

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= \frac{6g \sin \alpha}{7r} \varphi_3. \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{6g \sin \alpha}{7r}} \varphi_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцируем (7) по времени:

$$2\omega_3 \varepsilon_3 = \frac{6g \sin \alpha}{7r} \omega_3.$$

Сокращая ω_3 , находим ε_3 :

$$\varepsilon_3 = \frac{3g \sin \alpha}{7r}.$$

Ответ. $\omega_3 = \sqrt{\frac{6g \sin \alpha}{7r}} \varphi_3, \quad \varepsilon_3 = \frac{3g \sin \alpha}{7r}.$

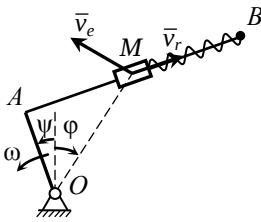


Рис. 18

Решение задачи Д4.

Рассмотрим движение точки M как сложное: переносное движение – вращение вместе со стержнем, относительное движение – движение вдоль стержня (рис. 18).

$$\bar{v}_M = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Обозначим через ψ угол поворота OAB .

Его угловая скорость: $\omega = \frac{d\psi}{dt}$. Закон сохранения кинетического момента:

$$K_{z,1} = K_{z,0}. \quad (1)$$

Здесь

$$K_{z,0} = 0,$$

$$K_{z,1} = J_z \omega + m_2 v_e \cdot OM - m_2 v_r \cdot OA. \quad (2)$$

Момент инерции стержня $J_z = \frac{m_1 l^2}{3}$, $OM^2 = l^2 + s_r^2$, где $s_r = AM$.

Переносная и относительная скорости точки M равны: $v_e = OM \cdot \omega$,

$v_r = \frac{ds_r}{dt}$. Из (1), (2) получаем с учетом того, что в начальный и конеч-

ный моменты $AM_0 = 0$ и $AM_1 = 2l$, соответственно:

$$\left(J_z + m_2 (l^2 + s_r^2) \right) \frac{d\psi}{dt} = m_2 \frac{ds_r}{dt} l.$$

$$\int_0^{\psi_1} d\psi = m_2 l \int_0^{2l} \frac{ds_r}{\left(J_z + m_2 l^2 \right) + m_2 s_r^2}.$$

$$\psi_1 = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_z + m_2 l^2}{m_2}}} \operatorname{arctg} \frac{2l}{\sqrt{\frac{J_z + m_2 l^2}{m_2}}}.$$

Обозначим для удобства: $k = \sqrt{\frac{m_2 l^2}{J_z + m_2 l^2}} = \sqrt{\frac{3m_2}{m_1 + 3m_2}}$. Тогда

$$\psi_1 = k \operatorname{arctg} 2k .$$

Из геометрических соображений для конечного положения:

$$\operatorname{tg}(\psi_1 + \varphi_1) = \frac{AM_1}{OA} = \frac{2l}{l} = 2 .$$

$$\psi_1 + \varphi_1 = \operatorname{arctg} 2 .$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} 2 - \psi_1 = \operatorname{arctg} 2 - k \operatorname{arctg} 2k .$$

Заметим, что так как $k < 1$, то $\varphi_1 > 0$.

Ответ. $\varphi = \operatorname{arctg} 2 - k \operatorname{arctg} 2k$, где $k = \sqrt{\frac{3m_2}{m_1 + 3m_2}}$.